

用有效质量法研究晶振特性

俞熹* 许文仪 (复旦大学物理系 上海邯郸路 220 号 200433)

摘要: 扫描显微镜 SPM (Scanning Probe Microscopy) 技术中作为力感应器件的石英晶振, 其本征频率会由于粘合的针尖与环境的气体和压强不同而发生改变。本文介绍了通过有效质量、有效杨氏模量来研究各项条件改变对频移的影响的方法, 并建立了一个统一的模型来解释这些实验结果, 方便我们从另一个深度来理解石英晶振的力感应特性。

关键词: 石英晶振, 扫描显微镜 SPM, 原子力显微镜 AFM, 有效质量, 有效杨氏模量

1. 背景介绍

石英晶振 (石英电子表的起振器件) 在近些年以来, 作为力感应器件已被广泛应用于扫描显微镜 SPM (Scanning Probe Microscopy) 技术中¹。其力学特性中极其高的品质因素 (Q) 特别适合于针对于生物样品或者软物质²和原子分辨率³的非接触模式 (non-contact mode)⁴ AFM (Atomic Force Microscopy) ⁵ 图像扫描。其不必借助激光而自感应的力学特性则是低温和超低温下工作的理想器件⁶。

石英晶振是基于晶体的压电效应而工作的。在晶片上加上交变电压, 由电致伸缩, 晶片将随交变信号的变化而产生机械振动, 通过改变电压频率可以使机械振动达到共振极大。在 AFM 中, 由于原子力对针尖和晶振的作用, 晶体共振频率会发生变化, 通过频移的大小可以敏感地探测到样品表面的起伏。

2. 有效质量

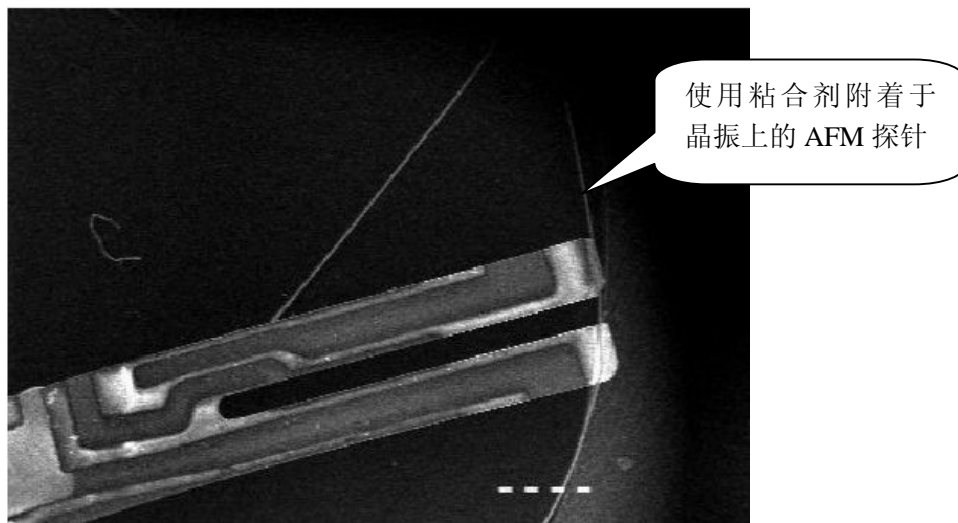


图 1: 制备的石英晶振的扫描电子显微镜 (SEM) 照片 (其中一端已经安装了一根钨丝制作的 AFM 扫描探针)

图 1 显示的是在我们的 AFM 中, 实际所使用的石英晶振。

我们使用的晶振可以看作为两个简单的对称的长方体石英构成, 在大气环境中一般工作于 2^{15} Hz, 品质因数 $Q = 10000$

根据晶振的物理尺寸 (宽 $w=320$ 微米, 厚 $t=380$ 微米, 长 $l=3.2$ 毫米), 我们可以利用石英的杨氏模量 ($E=7.87 \times 10^{10}$ N/m²) 测算大致的弹性常数 $k=0.25Ew(t/l)^3 = 10.5$ kN/m。代入晶振的密度 $\rho = 2650$ kg/m³, 理论本征频率为^{7 8}:

$$f_0^{theory} = \frac{(1.8751)^2}{2\pi\sqrt{3}}\sqrt{k/m} = \frac{1.01498t}{2\pi l^2}\sqrt{E/\rho} = 32668Hz \quad (1)$$

可以看到理论计算结果和晶振的设定频率很接近 32768 (0.3%误差)。该误差的来源应该是计算过程中将晶振的形状作为完美的长方体以及没有考虑晶振边缘的金属电极造成的影响。

在 AFM 中，一般需要将针尖加装在晶振上，这样就会改变晶振的本征频率，这一个变化可以根据有效质量的模型⁹估算出来。

根据刚才的公式，如果认为晶振的振动为理想的简谐振动的话，则：

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} \quad (2)$$

对于理想的长方体晶振，臂的等效质量 $m^* = 0.24m = 0.24\rho lwt = 250\mu g$ 。当一个新增的质量 M 被放置到晶振上以后，共振频率变化为：

$$f_{shift} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m^* + M}} \quad (3)$$

在实验中，我们选取某样品进行测量，其原共振频率 $f_0 = 32.40kHz$ ，加载针尖后的频率

$f_{shift} = 32.37kHz$ 。代入计算得：

$$M = \frac{k}{4p^2}\left(\frac{1}{f_{shift}^2} - \frac{1}{f_0^2}\right) \approx 490ng \quad (4)$$

上式中有效质量 490ng，而估算的粘合剂（银胶）加上针尖的总质量与之相符合。

通过有效质量法，可以将质量的非均匀分布简单地归结为有效质量。当频移很小时，根据上式则有近似公式：

$$M = -\frac{k^2}{2p^2 f_0^3} \Delta f \quad (5)$$

利用公式 (5)，可以方便地估算外加质量（如：针尖）对晶振的本征频率的影响，以便于选择合适的针尖材料、尺寸等。

除了在 AFM 中的应用外，利用公式 (4)、(5)，还可以进行微小质量的测量。经过适当修正，可以给出精度较高的结果。

3. 压强变化对晶振的频率变化影响

工作在不同气体与气压下的 AFM，由于晶振本征频率的变化，精度会受到影响。

在气体中的晶振，振动时对气体有扰动，因而产生晶振的能量损失。其作用效果相当于有额外的质量分布附着在晶振表面而产生的阻尼损耗。尽管涉及到空气的动力学过程，但如果使用有效质量的概念，就容易理解共振频率随压强升高而降低的关系（图 2）。

图 2 给出了共振频率以及品质因数随压强的改变而变化的数据图，并对频率与压强的关系做了线性拟合，从图上就可以直观地看到，两者有较好的线性关系。

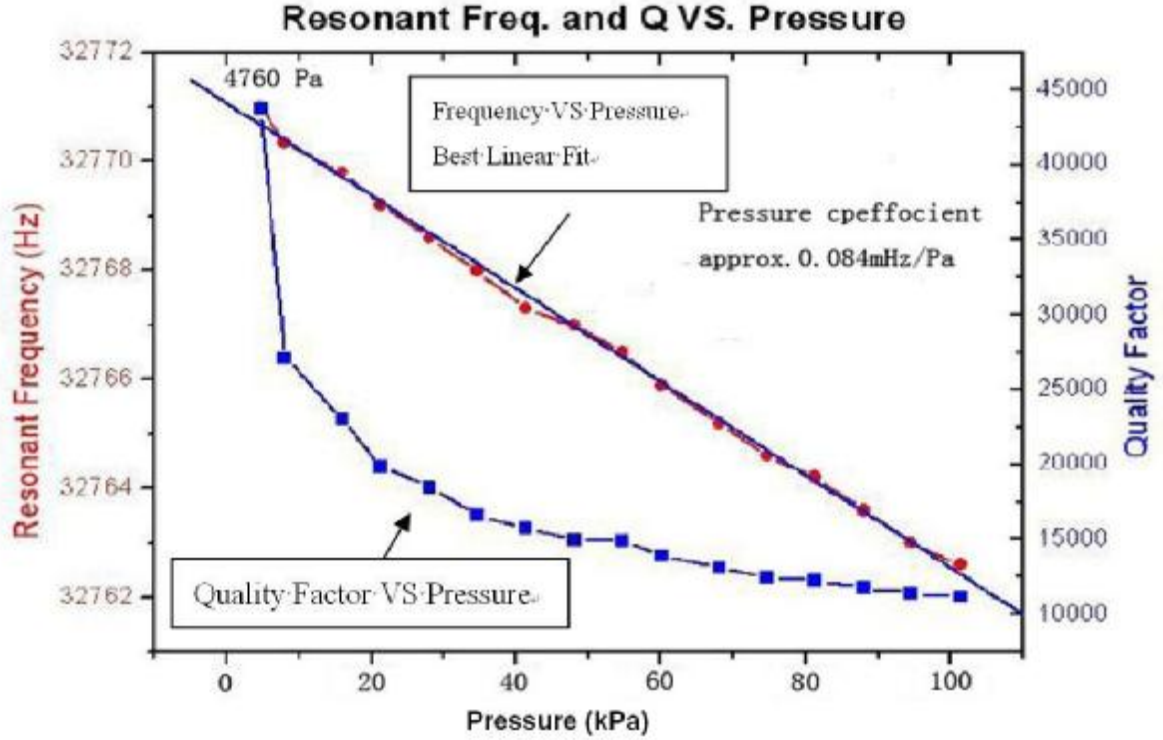


图2: 共振频率、品质因数Q与气压(氩气环境)的关系.(室温环境, 约20°C)

对于AFM的力探测来说, 一般采用的精度要求为 $<0.1\text{Hz}$ 。从图2中可以看到, 气压变化造成的频移是有相当影响的。因此有必要确定气压变化对频移的影响。

为了理论计算共振频率与气压的关系, 可以先设想将晶振置于无限大的非粘滞、可压缩气体中。严格求解流体弹性体的相互作用是十分困难的, 但类比有效质量的方法, 可以引入有效杨氏模量的概念, 并认为气体的引入仅仅是改变了杨氏模量, 而不影响臂的振动方程。计算上述理想化的流体模型中的等效杨氏模量¹⁰:

$$E_f = E_v \left(1 + \frac{\rho r_f w}{4r_c t}\right) \quad (6)$$

根据公式 (1), 则引入流体后的频率与真空中的频率之比为:

$$f_f = f_v \left(1 + \frac{\rho r_f w}{4r_c t}\right)^{-1/2} \quad (7)$$

上式中, f_v 是真空中的共振频率, r_f 是流体的密度, r_c 、 t 与、 w 分别是晶振的密度、厚度与宽。

当将晶振置于氩气、氦气等气体中时, $r_c \gg r_f$ 。对于理想气体, 恒温下, 密度与气压成正比, 再使晶振的长、宽近似相等, 即 $\frac{w}{t}$ 不会太大, 则我们可以得到如下的近似公式:

$$f_f - f_v = -f_v \frac{\rho w m_0}{8r_c t R T} P \quad (8)$$

即频移正比于流体的密度。 m_0 为气体mol质量, R 为热力学常数。因此频移也就与压强成

正比关系，可以解释图2中利用氩气获得的曲线。根据（8）式算得的比例系数为0.072mHz/Pa，与实验结果0.084mHz/Pa在数量级上符合。

为了考察对不同气体公式（8）的符合程度，又测量了在氦气中，将压强从 10^5Pa 抽至真空的过程中共振频率的变化：在 0°C 下，实验得到的频移为0.5 Hz。取氦气密度 $r_f =$

0.1785kg/m^3 ，石英 $r_c = 2650\text{kg/m}^3$ 。理论计算得频移为0.7 Hz，也与实验结果定性吻合，误差的来源也应该是由于上述论证中采用的频率变化较小的假设。

图2还给出了品质因数Q随压强的变化。由于周围气体的扰动而造成的能量损失随压强降低而减少，Q也就得以大大提高。

再利用（8）式，可得

$$r_h / r_a = \Delta f_h / \Delta f_a \quad (9)$$

即氦气与氮气的频移之比等于密度之比，理论计算得到两个比值分别为12.14与13.24，仍有一定偏离，也只是与理论计算定性相符。

可见根据有效模量与理想气体方程得出的（8）式，可以给出频移的大致范围，对不同的气体都可以适用，但总是会出现有限的偏差。

在常压区域，更符合实际情况的是范德瓦尔斯方程，因此在中间区，对不同气体，要选取其范氏参数分别进行修正；而在极端低压区（2000Pa以下），虽然范氏方程过渡为理想气体近似，但由于气体十分稀薄，有效模量的模型会有偏差，公式（8）仍然不能严格成立。事实上，气体的平均自由程 \bar{l} 反比于密度，当抽至高度真空时， \bar{l} 很大，导致迟豫时间大大变长，达到平衡所需的时间因此变长，非平衡效应显著加强，因此实验测得的低压区曲线实际上很不光滑。

4. 总结

在 AFM 用晶振的特性研究中，我们使用有效质量法简化了对针尖影响的计算，求出的频移有较好的符合程度。但有效质量法无法区别不同结构的针尖。而进一步的工作则可以采用有效质量法研究加装针尖对品质因数 Q 的影响。

当 AFM 工作在气体中时，我们通过理论分析给出了式（8），用来描述不同气体中晶振频移的统一行为。在极端低压区，由于测量精度限制以及气体过于稀薄，会与式（8）有偏离。低压时，式（8）符合得比较好。而在常压与高压区域，更精确的是范德瓦尔斯方程，对不同的气体，需要采用不同的参数进行修正。为了适应 AFM 的不同工作模式，可以通过 Q-Control 来调整 Q，达到一个最适宜的工作范围，该部分的工作请参考作者文章和著作^{11 12}。

在气体之后，还可以进一步考虑液体情况，尤其是低温液氦中晶振的应用。考虑到低温液相的蒸发和流体的不可压缩性，必然要有新的方法来进行研究，限于篇幅，这部分低温的工作将在另文叙述。

5. 致谢

本文实验数据工作是在英国诺丁汉大学物理实验室中完成，后期工作获得国家基础科学人才培养基金 (No J0730310)和 2007 年度复旦大学青年科学基金(EYH1512025)的资助，特此感谢。

6. 作者简介：俞熹（1978—），男，浙江东阳，讲师，博士，低温扫描显微镜成像，核磁共振，近代物理教学。

7. 参考文献

-
- ¹ G. Binnig, C. F. Quate, and C. Gerber. Atomic Force Microscope[J]. Phys. Rev. Lett., 1986, vol. 56: p. 930.
 - ² G. M. King and G. N. Jr. Attractive-mode force microscope for investigations of biomolecules under ambient conditions[J]. Rev. Sci. Instr., 2001, vol. 72: p. 4261.
 - ³ F. J. Giessibl. Atomic resolution on Si(111)-(7×7) by noncontact atomic force microscopy with a force sensor based on a quartz tuning fork[J]. Appl. Phys. Lett., 2000, vol. 76: p. 1470.
 - ⁴ Q. Zhong, D. Inniss, K. Kjoller, and V. Elings. Fractured polymer/silica fiber surface studied by tapping mode atomic force microscopy[J]. Surface Science Letters, 1993, vol. 290: p. 688,.
 - ⁵ P. Gunther, U. C. Fischer, and K. Dransfeld. Scanning near-field acoustic microscopy[J]. Appl. Phys. B., 1989, vol. 48: p. 89.
 - ⁶ F. D. Callaghan, X. Yu, and C. J. Mellor. Dynamic force microscopy in superfluid helium[J]. App Phy Letters, 2002, vol. 81: p. 916.
 - ⁷ R. W. H.J.Güntherodt. Scanning Tunneling Microscopy II 2nd Edition[M], Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1995.
 - ⁸ C. J. Chen. Introduction to Scanning Tunneling Microscopy[M], Oxford University Press, New York, 1993.
 - ⁹ J. P. Cleveland, S. Manne, D. Bocek, and P. K. Hansma. Nondestructive method for determining the spring constant of cantilevers for scanning force microscopy[J]. Rev. Sci. Instrum., 1993, vol. 64: p. 403.
 - ¹⁰ W. H. Chu. Technical Report No. 2 DTMB Contract No 86396(X)[M] Southwest Research Institute. San Antonio. TX., 1963.
 - ¹¹ F. D. Callaghan, X. Yu, and C. J. Mellor. Variable temperature magnetic force microscopy with piezoelectric quartz tuning forks as probes optimized using Q-control Appl. Phys[J]. Lett. 87 (21):, 214106.
 - ¹² Xi Yu. Thesis: MULTI-MODE LOW TEMPERATURE SCANNING PROBE MICROSCOPY[M], University of Nottingham, 2004.

The Study of Quartz Tuning Forks via Effective Mass

Xi Yu, Wenyi Xu

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai, 200433, China)

Abstract: It is well established that quartz tuning forks can be used as sensors for acoustic and force microscopy. These self-oscillating high mechanical quality factor sensors provide a good method of detecting sub-pN forces especially at low temperature. This paper introduces the conceptions of effective mass and effective Yang module to simplify the calculation of the resonance frequency. Furthermore, a simplified model based on some theoretical analysis was set up to explain most of the experimental results and provide us another image of how the quartz tuning fork works.

Keywords: Quartz tuning folks, SPM(Scanning Probe Microscopy), AFM(Atomic Force Microscopy), Effective mass, Effective Yang module.