第13卷第5期　　大 学 物 理　　Vol.13 No.5
1994年　5月　　COLLEGE PHYSICS　　May. 1994

教学研究

惠斯通电桥的理论研究

杨万明

(河北煤炭建筑工程学院，邯郸　056038)

摘要　本文从电源内阻 r 不等于零，及不对桥臂电阻作任何限制性假设的最一般情形出发，解出非平衡电流，证明了检流计的电流灵敏度与其平均等效内阻 R_g 的平方根成正比. 指出，只当电源和桥臂线路作为一等效电压源的内阻等于 R_g，且桥臂电阻满足电桥平衡条件下的一定极限关系时，电桥灵敏度才有极大值，进而给出个电桥最大灵敏度的普遍表达式，并提出了惠斯通电桥用于测电阻时选择电路参数的一般步骤和方法.

关键词　惠斯通电桥；灵敏度；非平衡电流

分类号　TM938.41

无论在精密测量、自动控制或其它用途的应用电路中，惠斯通电桥都被设计在平衡状态附近工作. 因此，谋求电桥能工作在有最大灵敏度的最佳状态，一直是理论研究和各种技术应用中设计电路的关键. 电桥电路中所含的七个电磁性能参数 R_1、R_2、R_s、R_x、R_g、E 及 r 的相互牵连，常使电路的最大灵敏度变得十分复杂. 在这种情况下，不经过证明和严格的数学计算而选择电路参数，难免带有经验的甚至盲目的性质，这对充分发挥现有量仪的性能指标及提高惠斯通电桥的工作质量都很不利. 本文从电源内阻 r 不等于零，及不对桥臂电阻作任何限制性假设的最一般情形出发，试图给出惠斯通电桥最大灵敏度的普遍表达式，并提出用惠斯通电桥测电阻时选择电路参数的一般步骤和方法.

1　非平衡电流与等效电源的内阻

为讨论方便，现给出惠斯通电桥的典型电路如图1所示.

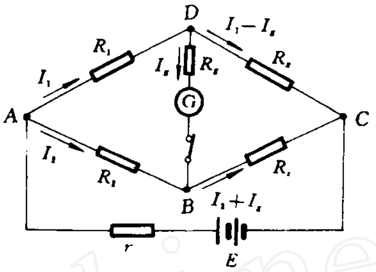

图1　惠斯通电桥基本线路　图示电流为闭合按纽开关后的值，其方向为假定正方向

在各种用途的应用电路中，惠斯通电桥都被设计在平衡状态附近工作. 所谓平衡状态，是指在测量中调整比较臂电阻 R_s，或在其它场合设计时预先选择合适的桥臂电阻，使 B、D 两点之间出现等电势，这时流过检流计或没有外加信号时放大器的输入回路的电流为零. 因此，在设计电桥电路时我们将特别关心电桥从平衡状态发生稍许偏离时，流过负载电阻 R_g 的小电流与引起这一改变的其它电路参数之间依从关系的性质. 这就是说，电桥的灵敏度始终是设计电路选择量仪或元器件时所要考虑问题的关键.

为不失研究问题的普遍性，我们来求出一般情况下流过负载电阻 R_g 的非平衡电流. 设流过惠斯通电桥中各支路的电流如图1所示. 根据基尔霍夫定律，电桥电路中有三个独立回路，故可列出三个独立的回路电压方程

$$\begin{cases} I_1R_1+I_gR_g-I_2R_2=0 \\ (I_1-I_g)R_x-(I_2+I_g)R_s-I_gR_g=0 \\ (I_1+I_2)r+I_1R_1+(I_1-I_g)R_x=E \end{cases}$$

即 $\begin{cases} I_1R_1-I_2R_2+I_gR_g=0 \\ I_1R_x-I_2R_s-I_g(R_x+R_s+R_g)=0 \\ I_1(r+R_1+R_x)+I_2r-I_gR_x=E \end{cases}$

经计算可知，此三元一次方程组的系数行列式不等于零，电流 I_1、I_2、I_g 有唯一解. 我们仅写出我们感兴趣的流过负载电阻 R_g 的电流为

$$I_g=\frac{(R_2R_x-R_1R_s)E}{R_g\Delta_2+\Delta_1} \tag{1}$$

式中 $\Delta_1=r(R_1+R_2)(R_x+R_s)+R_1R_x(R_2+R_s)+R_2R_s(R_1+R_x)$

$\Delta_2=r(R_1+R_2+R_x+R_s)+(R_1+R_x)\cdot(R_2+R_s)$

易知 Δ_2 不等于零. 现把(1)式改写成如下形式

$$I_g=\frac{(R_2R_x-R_1R_s)E/\Delta_2}{R_g+\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}}$$

根据戴维南定理，可知 Δ_2/Δ_1 就是当断开检流计时电桥作为一等效电压源的内阻，分子上的部分即是等效电压源的电动势.

2 电桥灵敏度的定义

电桥的灵敏度有相对灵敏度和绝对灵敏度之分. 考虑电桥用于测量的目的，故为计算的方便，我们采用相对灵敏度的概念[1]. 即灵敏度为

$$S=\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta R_s/R_s}\right)_0=R_s\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta R_s}\right)_0=R_s\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta I_g}\right)_0\left(\frac{\Delta I_g}{\Delta R_s}\right)_0=R_sS_iS_L$$

式中 $S_i=(\Delta\theta/\Delta I_g)_0$ 为检流计的电流灵敏度，$S_L=(\Delta I_g/\Delta R_s)_0$ 为电桥线路的灵敏度. 由电桥的平衡条件可证上式对无论取哪一个桥臂电阻为调整变量，其形式和大小都保持不变.

现在来证明，检流计的电流灵敏度 S_i 与检流计内阻 R_g 的平方根成正比. 检流计指针的偏转是固连于指针的通电线框在永磁铁的均匀磁场中受到磁力矩的作用而发生的. 在指针由平衡状态的 0 °转到最大偏转角 θ 的过程中，由于磁力矩作功使游丝弹簧发生形变而具有一定的机械能. 在断开电路时，这部分机械能又由于要克服磁通量变化时产生的感应电流的反向磁力矩作功，而把能量回授给电磁场，并进而转变成焦耳热释放出来. 我们假设游丝弹簧的转矩常数为 k_0，则

$$\int_0^{\theta}-k_0\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}k_0\theta^2$$

且因 $$\int_0^{\infty}I^2R\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}I_g^2\mathrm{e}^{-\frac{2R}{L}t}R\mathrm{d}t=-I_g^2\frac{L}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{L}t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2}LI_g^2$$

令 $\frac{1}{2}LI_g^2=I_g^2R_g$，$R_g$ 是检流计的平均等效内阻. 当忽略克服摩擦转矩所做的功时，有

$$\frac{1}{2}k_0\theta^2=I_g^2R_g$$

即 $$\theta=\sqrt{\frac{2R_g}{k_0}}I_g$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}I_g}=\sqrt{\frac{2R_g}{k_0}}$$

即检流计的电流灵敏度 $S_i=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}I_g$ 与检流计的平均等效内阻 R_g 的平方根成正比. 于是，我们可以把检流计的电流灵敏度写成如下形式

$$S_i=\sqrt{\frac{2R_g}{k_0}} \tag{2}$$

式中，k_0 是游丝弹簧的转矩常数，R_g 是检流计的平均等效内阻.

至于电桥的线路灵敏度，我们可以通过对非平衡电流 I_g 求 R_s 的一阶偏导数并代入电桥的平衡条件而得到

$$S_L=\left|\left(\frac{\partial I_g}{\partial R_s}\right)_0\right|=\frac{R_1E}{R_g\Delta_2+\Delta_1} \tag{3}$$

所以，惠斯通电桥的相对灵敏度的普遍表达式可以写成如下形式

$$S=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}\sqrt{R_g}\ R_1R_sE}{R_g\Delta_2+\Delta_1} \qquad (4)$$

或
$$S=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}R_1R_sE}{\sqrt{R_g}\ \Delta_2+\frac{\Delta_1}{\sqrt{R_g}}} \qquad (4)'$$

容易看出，S 依赖于 R_g 变化时可能存在极值.

3 惠斯通电桥的最大灵敏度

在(4)'式中分子上不含 R_g，如果分母随 R_g 变化有极值存在的话，则 S 有随负载电阻变化的极值存在，且求此极值时只须分母对 R_g 求一、二阶导数. 因此，R_g 不在下面将要给出的电桥的平衡条件中出现，它只决定电流灵敏度的值，而与线路灵敏度极值的出现与否无关. 这就是说，R_g 在决定电桥灵敏度 S 的极值时是一个先期待选参量，其地位与四桥臂电阻并不平行. 即求电桥灵敏度极值可分步进行，无须把分母看作是 R_g 与四桥臂电阻的多元函数. 从定性上考虑，无论桥臂电阻怎样选择，当电桥作为一等效电压源的内阻等于负载电阻 R_g 时，负载上应有最大功率输出，这时出现电桥灵敏度的极大值是很自然的.

令
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_g}\left(\sqrt{R_g}\ \Delta_2+\frac{\Delta_1}{\sqrt{R_g}}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Delta_2}{\sqrt{R_g}}-\frac{1}{2}\frac{\Delta_1}{\sqrt{R_g^3}}=0$$

可求得
$$R_g=\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \qquad (5)$$

且
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R_g^2}\left(\sqrt{R_g}\ \Delta_2+\frac{\Delta_1}{\sqrt{R_g}}\right)\Bigg|_{R_g=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}=\left(-\frac{1}{4}\frac{\Delta_2}{\sqrt{R_g^3}}+\frac{3}{4}\frac{\Delta_1}{\sqrt{R_g^5}}\right)\Bigg|_{R_g=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}>0$$

故当负载电阻等于电桥作为一等效电压源的内阻时，S 将有极大值出现，因分母这时有极小值，把(5)式代入(4)'式，得到

$$S=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}\ E}{2\sqrt{\frac{\Delta_1\Delta_2}{R_1^2R_s^2}}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}\ E}{2\sqrt{\Delta}} \qquad (6)$$

式中，简记 $\Delta=\frac{\Delta_1\Delta_2}{R_1^2R_s^2}$

我们来继续研究(6)式分母有无随桥臂电阻变化而出现极值的问题. 为简化计算，我们在此处给出熟知的电桥平衡条件，并引入两个正实数常量参数 K 和 Q，即

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_x}{R_s}=K$$
$$\frac{R_2}{R_s}=\frac{R_1}{R_x}=Q$$

在此情形下，有 $R_1=QR_x$，$R_2=\frac{Q}{K}R_x$，$R_s=\frac{R_x}{K}$，于是

$$\begin{aligned}\Delta=&\left(K^2+3K+3+\frac{1}{K}\right)\frac{r^2}{R_x}+4\left(K+2+\frac{1}{K}\right)r\\&+\frac{1}{Q}\left(K^2+3K+3+\frac{1}{K}\right)\frac{r^2}{R_x}\\&+\frac{1}{K}\left(Q^2+3Q+3+\frac{1}{Q}\right)R_x\\&+2\left(QK+\frac{Q}{K}+\frac{K}{Q}+\frac{1}{KQ}\right)r\\&+\left(Q^2+3Q+3+\frac{1}{Q}\right)R_x+4\left(Q+\frac{1}{Q}\right)r\end{aligned}$$

或
$$\Delta=\frac{(K+1)^3}{K}\cdot\frac{Q+1}{Q}\cdot\frac{r^2}{R_x}+\left\{4\left[\frac{(K+1)^2}{K}+\frac{Q^2+1}{Q}\right]\right.$$

$$+2\frac{K^2+1}{K}\cdot\frac{Q^2+1}{Q}\Big\}r$$

$$+\frac{(Q+1)^3}{Q}\cdot\frac{K+1}{K}R_x$$

从上式可以看出，Δ 对 Q 及 K 都可能有极值，但我们并不把 Δ 看成是 Q 和 K 的二元函数．这固然是由于求有待定文字系数的二元三次方程的根，从数学计算的角度来看非常困难，但更主要的还是由于，当我们把 K 留作为满足不同应用需要可任意置定的常数时更有利．比如用惠斯通电桥测电阻时，通过选择 K 值可取得读数所期望的有效数字的一定位数．现在来求 Δ 对 Q 的一阶导数，并进而决定 Δ 随 Q 变化而可能出现的极值．

令

$$\frac{d\Delta}{dQ}=2\left(1+\frac{1}{K}\right)R_xQ^3+\left[2\left(K+\frac{1}{K}+2\right)r+3\left(\frac{1}{K}+1\right)R_x\right]Q^2-\left[\left(K^2+3K+3+\frac{1}{K}\right)\frac{r^2}{R_x}+\left(\frac{2}{K}+2K+4\right)r+\left(1+\frac{1}{K}\right)R_x\right]=0 \tag{7}$$

由(7)式易知，$\frac{d^2\Delta}{dQ^2}>0$，故 Δ 可能有极小值，从而 S 可能有极大值．现在的任务是求出满足(7)式的正实数 Q 的值，将(7)式两端同除以 $2\left(1+\frac{1}{K}\right)R_x$，得到

$$Q^3+BQ^2+D=0 \tag{8}$$

式中 $B=(K+1)\frac{r}{R_x}+\frac{3}{2}$

$$D=-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^2r^2+\left(\frac{K+1}{R_x}\right)r+\frac{1}{2}\right]$$

令 $Q=y-\frac{B}{3}=y-\frac{1}{3}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)r-\frac{1}{2}$，

代入(8)式，我们得到

$$y^3+py+q=0 \tag{9}$$

式中 $p=-\frac{B^2}{3}=-\frac{1}{3}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^2r^2-\left(\frac{K+1}{R_x}\right)r-\frac{3}{4}<0$

$$q=\frac{2}{27}B^3+D=\frac{2}{27}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^3r^3-\frac{1}{6}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^2r^2-\frac{1}{2}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)r-\frac{1}{4}$$

$$判别式=\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=-\left[\frac{1}{54}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^5r^5+\frac{25}{432}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^4r^4+\frac{13}{216}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^3r^3+\frac{1}{48}\left(\frac{K+1}{R_x}\right)^2r^2\right]<0$$

故三次方程(9)恒有三个相异实根[2]，可表为

$$y=2\sqrt[3]{r_0}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}，k=0,1,2$$

式中 $r_0=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\left(\frac{B}{3}\right)^3$

$$=\frac{1}{27}\zeta^3+\frac{1}{6}\zeta^2+\frac{1}{4}\zeta+\frac{1}{8}$$

$$\cos\varphi=-\frac{q}{2r_0}$$

$$=1-\frac{\left(\frac{2}{27}\zeta+\frac{1}{12}\right)\zeta^2}{\frac{1}{27}\zeta^3+\frac{1}{6}\zeta^2+\frac{1}{4}\zeta+\frac{1}{8}}$$

从而方程(8)有根

$$Q=\frac{B}{3}\left(2\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-1\right)$$

$$=\left[\frac{1}{3}(K+1)\frac{r}{R_x}+\frac{1}{2}\right]\cdot\left(2\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-1\right) \qquad (10)$$

在上面r_0及$\cos\varphi$的表式中，已令$\zeta=(K+1)\frac{r}{R_x}$. 根据所研究问题的不同精度要求，$\cos\varphi$的表达式还可以进一步化简. 特别当$\zeta\ll 1$时

$$\cos\varphi=1-\frac{2}{3}\zeta^2 \qquad (11)$$

由于Q为正实数，我们只取(10)式中大于零的根，且一般而论，这样的根是一定存在的至于这样的根能否是二个甚或三个，我们不拟在本文中讨论. 从应用的角度来看，这个问题满可以代入具体的K及r值，算出结果来检验.

4 电桥灵敏度为极大时Q与K的关系

现在求当断开检流计时，电桥作为一等效电压源时的内阻R_{eq}. 此值即为使惠斯通电桥灵敏度为极大时，负载电阻亦即应选检流计的内阻所取的值. 应用电桥平衡条件容易求得

$$R_{eq}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}=[r(R_1+R_2)(R_x+R_s)+R_1R_x(R_2+R_s)+R_2R_s(R_1+R_x)]\cdot[r(R_1+R_2+R_s+R_x)+(R_1+R_x)(R_2+R_s)]^{-1}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{K}}{1+\frac{1}{Q}}R_x \qquad (12)$$

上式表明，当惠斯通电桥的灵敏度有极大值时，K与Q之间通过待测电阻R_x与应取的检流计内阻$R_g=R_{eq}$，以极简单的关系式相联系. 这一关系式指出，当给定电源的内阻r、桥臂电阻R_x，并且置定K而算出使电桥灵敏度为极大值的Q值时，计算负载电阻就变得相当简单. 选择这样的负载电阻，检流计将有最大的匹配功率输出，从而使S的极值更尖锐.

现在来求惠斯通电桥最大灵敏度的普遍表达式. 为此，我们把惠斯通电桥灵敏度的普遍表达式(4)稍许变形，并代入(5)和(12)式，最后得到

$$S_m=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}R_g}\;E}{\left(R_g+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)\frac{\Delta_2}{R_1R_s}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}\;E}{2\sqrt{\left(1+\frac{1}{K}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2}{k_0}}\;E}{\left[(K+1)\frac{r}{\sqrt{R_x}}+(Q+1)\sqrt{R_x}\right]} \qquad (13)$$

式中$\sqrt{2/k_0}$为检流计的电流灵敏度与其平均等效内阻平方根的比值. 在上式中我们已代入了中间演算结果

$$\frac{\Delta_2}{R_1R_s}=[r(R_1+R_2+R_s+R_x)+(R_1+R_x)\cdot(R_2+R_s)]/R_1R_s$$

$$=\left(1+\frac{1}{Q}\right)\left[(K+1)\frac{r}{R_x}+(Q+1)\right]$$

5 惠斯通电桥用于测电阻时的简单设计分析

用惠斯通电桥测电阻时，我们总希望测量能有较高的精确度. 这时，我们就可以根据上面的理论结果，通过计算选配现有的或可能选取的量仪及元器件的电磁参数，使电桥有合理的尽可能高的灵敏度. 比如在实验室条件下测一标称值为45Ω的电阻，而可供选择的桥臂电阻最小步进值为0.1Ω、准确度等级为0.1级的ZX21型电阻箱；检流计为AC5型系列的直流指针式检流计；其中AC5/1型内阻为

9Ω 左右，Ac5/2 型内阻为 42Ω、AC5/3 型内阻为 234Ω；直流电源用电动势为 1.5V、实测内阻为 0.353Ω 的甲电池．设计一能工作在最佳状态的惠斯通电桥的一般步骤如下．

5.1 因单次测量值的均方误差仅为量仪基本误差限（即最大允差）的几分之一而显著小于量仪的基本误差限，考虑到所用电阻箱的最大允差及最小示数，取 $K=0.1$ 以使比较臂 R_s 能读得四位有效数字的读数．又人眼对示零仪表指针偏转 0.2 格为分辨极限，故调整电桥达于平衡时合理的电桥相对灵敏度为 $\frac{0.2}{(0.1/R_s)}=2R_s=2\frac{R_x}{K}=2\times\frac{45}{0.1}=900$.

5.2 将 $K=0.1$, $r=0.353\Omega$, $R_x=45\Omega$ 代入(10)式，计算得到 $Q=0.5029$, $R_g=165.6\Omega$. 易知，无内阻合适的检流计可供选用．现合理调整参数 K 来满足实验要求．由于 $\zeta=(K+1)\cdot\frac{r}{R_x}$ 很小，我们来考察 K 的小范围变化对 Q 的影响并确定合适的 K 值．

若令 $\cos(\varphi/3)\geqslant 0.9999$，则 $\cos\varphi=1-\frac{2}{3}(K+1)^2\left(\frac{r}{R_x}\right)^2\geqslant 0.9991$，即有 $(K+1)\cdot\frac{r}{R_x}\leqslant\sqrt{(1-0.9991)\times\frac{3}{2}}=0.03674$，或 $K\leqslant 3.69$. 这就是说，当 K 在小于 3.7 的相当大范围内变化时，都可近似认为 $Q=\frac{1}{3}(K+1)\cdot\frac{r}{R_x}+\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}$. 于是我们可以把 $Q=0.15$, $R_x=45\Omega$，且令 $R_g=R_{eq}=234\Omega$ 代入(12)式，计算得到 $K=0.069$，由于 $R_s=\frac{R_x}{K}=652.2\Omega$，其千分位（电阻箱准确度等级为 0.1 级）为 0.6，考虑到单次测量的随机误差仅为量仪基本误差限的几分之一，从读数的可信赖程度来分析，这种最小示数位上的步进调整仍然在有效的合理范围之内，因而 $K=0.069$ 可取，进而可算出 $Q=0.5028$.

5.3 由于检流计的机械性能参数 k_0 散离性较大，一般资料多不提供，我们可用检流计电流灵敏度与其内阻平方根比值的平均数值来代替 $\sqrt{2/k_0}$．对 AC5/3 型检流计而言，取 $\sqrt{2/k_0}=1.21\times10^5$. 当再把 $K=0.069$、$Q=0.5028$、r 及 R_x 的值代入(13)式，计算可得到 $S_m=877.5E=1316$. 而这时 $\left(R_s=\frac{R_x}{K}=\frac{45}{0.069}=652.2\Omega\right)$ 调整电桥时的相对灵敏度 $\frac{0.2}{(0.1/R_s)}=1304$. 由此可见，使用一节甲电池，电桥的相对灵敏度已基本满足要求，使用两节甲电池电桥灵敏度会更好些．但追求过高灵敏度，会使电桥调平衡变得困难，因此是无意义的．

5.4 置 $R_1=QR_x=22.6\Omega$, $R_2=QR_s=\frac{Q}{K}R_x=327.9\Omega$, $R_s=\frac{R_x}{K}=652.2\Omega$（预置），这样得到的惠斯通电桥在调整电桥达到平衡时将会有合理的最大灵敏度．

6 参考文献

1 列德生．惠斯通电桥的最大灵敏度．物理通报，1986(9):3.

2 B.И 斯米尔诺夫．高等数学教程．2(中译本)．北京：人民教育出版社，1959.449.

THEORETICAL RESEARCH OF WHEATSTONE BRIDGE

Yang Wanming

(Hebei Coal Mining and Civil Engineering Institute, Handan, China. 056038)

Abstract The current through galvanometer is strictly calcalated for a Wheatstone bridge and the sensiticity of the bridge is investigated, the condition of maxmum sensitivity is given.

Key Words wheatstone bridge; Sensitivity; nonequilibrium electric current