

# 循环摆 Looping Pendulum 结题报告

**摘要:** 循环摆 (Looping Pendulum) 是 IYPT2019 的选题之一, 具体描述为将一重一轻的两个负载通过水平杆上的一根绳子相连, 下拉轻负载以吊起重负载; 释放轻负载, 它将绕着杆扫动, 从而阻止重负载落到地面。本文通过理论与实验相结合的方法对上述现象进行分析与研究: 进行理论建模与实验观测, 分析了循环摆运动过程各阶段的形成原因; 对整个过程中的重要参量进行了半定量研究, 得到重负载最大下落距离  $S_{max}$  与总绳长  $l$ 、轻重负载质量比  $M/m$ 、初始释放摆角  $\theta$  间的经验公式; 利用 Tracker 对重负载下落距离  $S$  随时间  $t$  的变化进行了研究, 得到的  $S-t$  图像为非对称 S 型曲线, 并利用经验公式进行拟合分析; 定性研究了绳子弹性、杆的粗细、摩擦系数等参量对运动过程的影响。

**关键词:** IYPT 1; 循环摆 2; Looping Pendulum 3; Tracker 分析 4

循环摆是指“将一重一轻的两个负载通过水平杆上的一根绳子相连, 下拉轻负载以吊起重负载; 释放轻负载, 它将绕着杆扫动, 从而阻止重负载落到地面”的现象。作为一个有趣的宏观力学现象, 在网络上存在大量的演示实验视频, 在央视与国外的科普节目中, 循环摆现象也多次被展示。然而在已有的资料中, 对循环摆的产生原因、运动轨迹、动力学分析、参数测量却鲜有涉及, 一部分人仅通过现象的观察便认为其运动轨迹是阿基米德螺旋线, 这是缺乏依据的; 在电视台的节目中, 也仅仅是从摩擦、能量的角度定性的给出了一些浅显的解释。而在 2019 年的 IYPT 竞赛中, 循环摆的研究作为题目 14 被提出, 说明这一现象的原理并非那么浅显简单, 其背后有众多的细节有待挖掘, 因此我们将其作为“物理演示实验拓展”课程的研究题目, 利用半个学期的探索, 对循环摆现象建立了一套较为完善的理论模型与基于实验的解释。

## 1 理论模型的建立

### 1.1 预实验现象观察

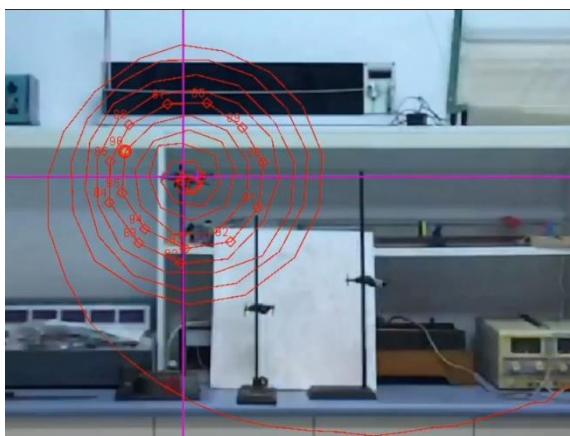


图 1 预实验观察轻负载轨迹追踪示意图

根据现象的描述, 搭建实验装置, 进行预实验的现象观察, 利用 Tracker 软件追踪了运动整个过程中轻负载  $m$  的轨迹, 如图 1 所示。通过实验观察, 我们可以将“循环摆”的整个运动过程分为两个阶段。

**第一阶段:** 重负载下落, 重力势能下降转化为系统的动能, 轻负载被带动, 绕杆扫动。在第一阶段的运动过程中, 轻重负载同时运动, 是一个两体运动过程。

**第二阶段:** 轻负载绕杆扫过一定角度后, 重负载停止下落, 在这之后, 轻负载继续绕杆转动, 直至所有绳子都绕在杆上为止。在第二阶段的运动过程中, 只有轻负载在运动, 重负载静止, 是一个单体运动过程。

### 1.2 第二阶段运动理论模型

首先考虑较为简单的第二阶段单体运动过程, 模型示意图如图 2 所示。

以水平杆横截面中心位置作为原点建立坐标轴, 轻负载质量为  $m$ , 重力加速度为  $g$ , 未绕上杆的绳长记为  $R$ , 水平杆半径记为  $r$ , 绳子与杆的切点与原点的连线与水平轴  $x$  轴的夹角记为  $\theta$ , 以  $R$  和  $\theta$  作为广义坐标建立动力学方程。轻负载质心位置坐标用  $(X, Y)$  表示。运动方程如下列式子给出。

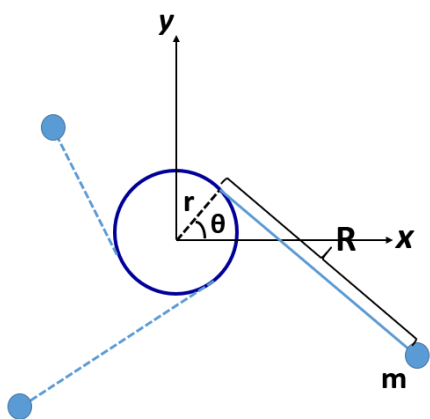


图 2 第二阶段运动模型示意图

$$\begin{aligned}
 X &= r \cos \theta + R \sin \theta \\
 Y &= r \sin \theta - R \cos \theta \\
 L &= \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - mgY \\
 R(t) &= R_0 - r \int_0^t \dot{\theta} dt
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

公式(1)便是第二阶段运动的完整的动力学方程组,由于是单体运动过程,求解起来较为简单,轻负载以圆的渐开线的轨迹接近水平杆。拉格朗日方程包含了该动力学过程的全部信息,在后续的讨论中,便不再讨论第二阶段的运动,我们将主要目光放在对第一

阶段两体运动过程的分析与研究中。

### 1.3 第一阶段运动理论模型 1

对第一阶段的运动分析中,首先考虑一个较为简单的包含 2 个参数(广义坐标)的模型如图 3 所示。忽略杆的摩擦与半径,总绳长记为  $l$ ,轻负载质量  $m$ ,重负载质量  $M$ ,重负载到杆的距离记为  $x$ ,轻负载端绳子与竖直方向夹角记为  $\theta$ ,运动方程如下给出:

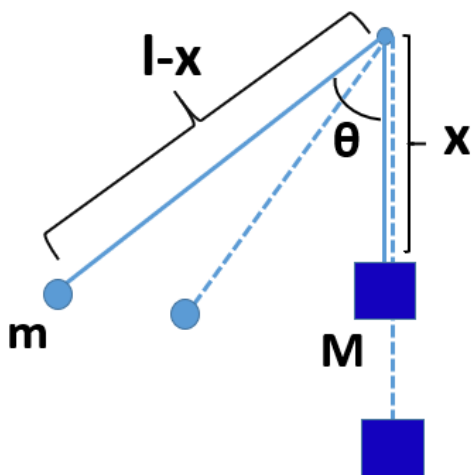


图 3 第二阶段运动模型 1 示意图

$$\begin{cases}
 T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l-x)^2\dot{\theta}^2 \\
 V = -Mgx - mg(l-x)\cos\theta \\
 -gM + mg\cos\theta + m(l-x)\dot{\theta}^2 + (M+m)\ddot{x} = 0 \\
 g\sin\theta(l-x) - \dot{x}\dot{\theta} + (l-x)\ddot{\theta} = 0
 \end{cases}
 \tag{2}$$

将方程(2)利用 Mathematic 求解,设定总绳长为  $1m$ ,初始摆角  $\theta = 90^\circ$ ,初始  $x = 0$ ,质量比  $M/m = 5$ ,求得方程的数值解,画出重负载到杆距离  $x$  关于时间  $t$  的图像,如图 4 所示。

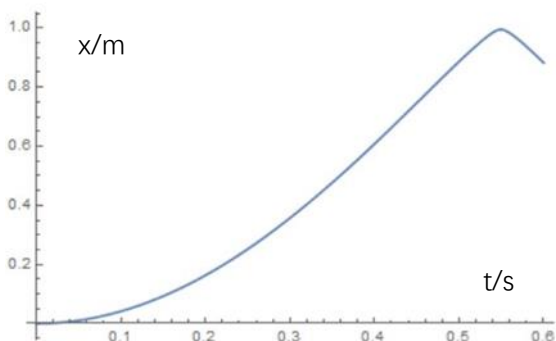


图 4 数值求解得到的  $x-t$  图像

从图像上,可以看到重负载有一个先加速后减速的过程,加速与减速的过程具有不同的加速度变化过程。然而,图像也反应出这个双参数模型过于粗糙,可以看到曲线的顶点对应的下落距离与设置的绳长相等,因此并不能反应重负载被拉停的这一现象。

因此,第一阶段运动理论模型 1 只能定性反应重物速度的变化趋势,整体上由于忽略了摩擦、水平杆半径的存在而过于粗糙,无法体现出循环摆运动过程中的细节和要点,需要进一步的优化。

### 1.4 第一阶段运动理论模型 1

在 1.3 的基础上,加入绳子与水平杆的摩擦和水平杆的半径,得到优化后的理论模型如图

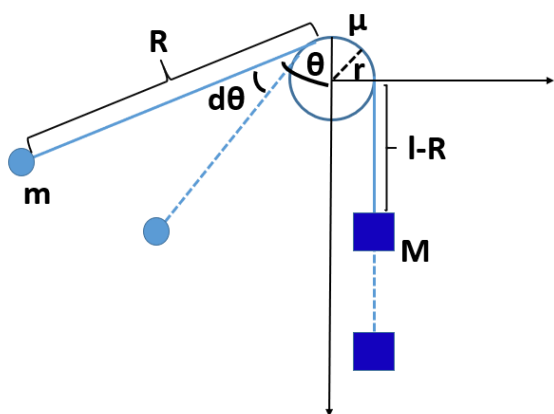


图 5 第二阶段运动模型 2 示意图

5 所示。

总绳长 $l$ ，忽略初始释放时靠在水平杆上的那段绳长；轻负载 $m$ ， $m$ 端绳长 $R$ ，与竖直夹角 $\theta$ ，角速度 $\omega$ ；重负载 $M$ ，下落速度 $v$ ；杆半径 $r$ ，摩擦系数 $\mu$ 。将角速度、速度、轻负载端绳长写成其他各参量的函数，即：

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(l, r, \mu, M, m, \theta) \\ v &= v(l, r, \mu, M, m, \theta) \\ R &= R(l, r, \mu, M, m, \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

根据约束关系与力学分析，可以得到系统运动满足的动力学微分方程组，即：

$$\begin{cases} dR = vdt + rd\theta = -(\frac{v}{\omega} + r)d\theta \\ dv = \frac{[Mg - (m\omega^2 R + mg \cos \theta)e^{\mu\theta}]}{\omega(M+m)} d\theta \\ d\omega = \frac{(\omega r + 2v + gR \sin \theta)}{\omega R^2} d\theta \\ \omega = d\theta/dt \end{cases} \quad (4)$$

分析公式(4)，可以看到除了第二个式子，其余式子与轻重负载的质量无关。而在第二个式子中不难发现， $M$ 和 $m$ 成比例变化时，方程保持不变，因此在后续分析与实验中，可以将 $M$ 和 $m$ 两个变量简化为质量比 $M/m$ 一个参量。理论上求解公式(4)便可获知运动的全部信息，但是可以到，微分方程组本身比较复杂，求解解析解几乎是不可能的，又因为多参量之间存在耦合，难以分离变量，在做数值模拟时也比较难以得到可以量化的结果，得到的运动轨迹图像也缺乏有效的信息。于是，我们确定后续的研究思路应该是通过实验，寻求经验公式来建立物理图像较为清晰的理论框架。

## 2 实验的总体研究思路与方法

由以上讨论可知，循环摆运动的第一阶段和第二阶段的分隔是重负载停止下落的时刻，将重负载下落距离记为 $S$ ，那么在重负载被拉停时对应了一个 $S_{max}$ ，这个 $S_{max}$ 的大小由杆的半径、摩擦系数、绳长、释放摆角、轻重负载质量比共同决定，是系统运动的一个本征参量；同时假如确定了第一阶段运动过程中 $S$ 随 $t$ 的变化关系，那么利用公式(4)可以得到其他变量随时间的变化关系。由此确定了实验的主要研究对象，即 $S_{max}$ 与其他参量的关系以及 $S$ 随时间的变化规律。简单起见，控制初始释放时 $S = 0$ ，对一组相同参量下的 $S_{max}$ 测量，测量5次取平均值以减小误差。进一步仔细观察循环摆的整个运动过程，根据不同的实验现象，大致可以将运动过程分为三类，如图6所示。

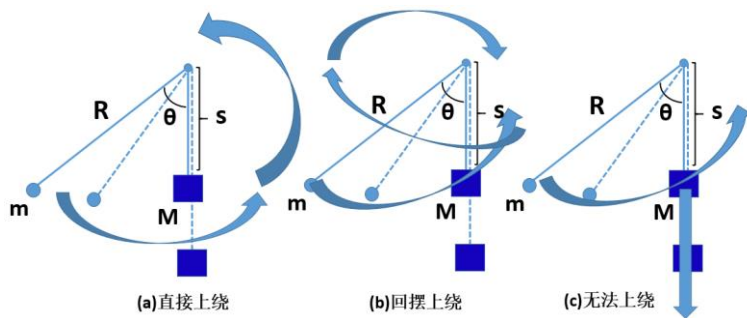


图 6 运动过程分类示意图

第一类运动过程如图 6(a) 所示，轻负载释放后经过一次摆动直接从上方缠绕扫过水平杆，我们称之为“直接上绕”过程；第二类运动过程如图 6(b) 所示，轻负载第一次摆过竖直轴后并没有绕上水平杆，而是在回摆过程中与重负载一侧的绳子交叉，与初始释放的那一侧摆过水平杆进行缠绕，我们称之为“回摆上绕”过程；第三类运动过程如图 6(c) 所示，轻负载无法绕上水平杆从而阻止重负载落到地面，称之为“无法上绕”过程。简单分析可以知道，在其他参量不变的前提下，保持质量比  $M/m$  不变，三个过程之间存在两个临界的初始释放摆角  $\theta$ ；保持初始释放摆角  $\theta$  不变，三个过程之间存在两个临界的质量比  $M/m$ 。

由于 (b)、(c) 所示的过程在实验研究中的可重复性较低，因此我们将主要研究对象确定为第一类运动，即“直接上绕”过程。

### 3 重负载最大下落距离 $S_{max}$ 的研究

#### 3.1 $S_{max}$ 与负载质量比 $M/m$ 的关系

控制绳长、初始释放摆角不变，改变负载质量比  $M/m$ ，研究  $S_{max}$  的变化，得到的结果如图 7、图 8 所示。

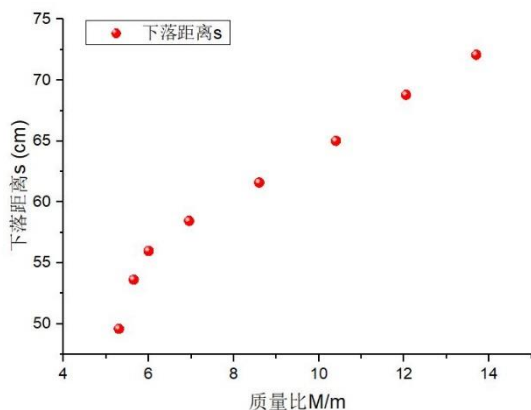


图 7 下落距离-质量比散点图

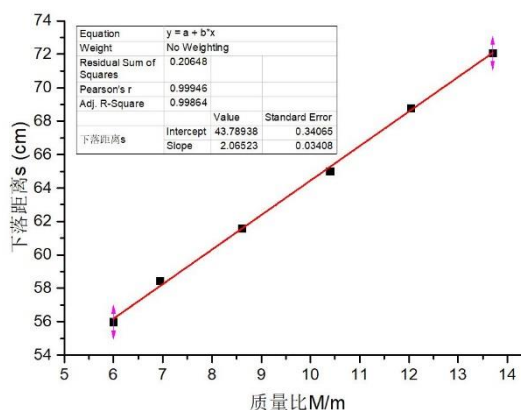


图 8 下落距离-质量比线性拟合图

从图 7 的散点分布中可以发现，当轻重负载质量比大于某个值时， $S_{max}$  与质量比呈线性关系；而在质量比较小时，一方面绳子与杆的摩擦对重负载下落的阻止作用占比较大，另一方面在运动过程中，轻重负载之间容易产生碰撞，对最终的实验结果造成影响，在这两个因素的综合作用下，质量比较小时  $S_{max}$  与  $M/m$  的规律会与  $M/m$  较大时有所不同。

对图 7 中的后 6 个点作线性拟合，得到的结果如图 8 所示，相关系数为 0.998，线性良好，参数的相对不确定度约 1%，于是可以得到：其他参量不变的情况下，质量比较大时， $S_{max}$  与负载质量比  $M/m$  呈线性关系。

#### 3.2 $S_{max}$ 与释放摆角 $\theta$ 的关系

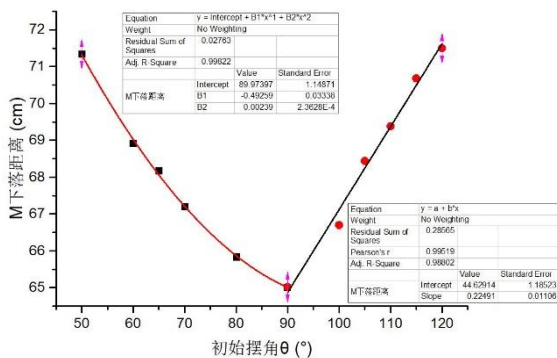


图 9 下落距离-释放摆角关系图

控制绳长、负载质量比不变，改变释放时的初始摆角  $\theta$ ，研究  $S_{max}$  的变化，得到的结果如图 9 所示。

可以看到， $S_{max}$  随释放的初始摆角  $\theta$  的增大，呈现出减小后增大的变化趋势，在初始释放摆角为  $90^\circ$  时， $S_{max}$  达到最小值，然而在  $90^\circ$  两侧，其变化呈现出不同的规律。其中原因可以由“在  $90^\circ$ （即水平位置）两侧释放，系统运动所经历的过程是不同的”来解释。

在小于  $90^\circ$ （即水平位置以下释放时），系统的竖直方向加速度随角度的减小而减小，这一点的贡献会使最终的下落距离减小；同样的，轻负载需要更多的时间才能缠绕上水平杆使重负载停止，这一点的贡献会使最终的下落距离增加。在两者的共同作用下，在水平位置以下释放时， $S_{max}$  随  $\theta$  的减小而增加，其关系可以用二次多项式来描述，拟合结果，相关系数 0.998，各参数的相对不确定度约 1.5%，拟合结果良好。

在大于  $90^\circ$ （即水平位置以上释放时），观察到在释放最初的一段时间内，绳子处于松弛的状态，即轻重负载之间的约束消失，两者以近似自由落体的状态运动了一段时间直至绳子突然被拉紧，而释放角度越大，绳子松弛的时间越长。因此，在水平位置以上释放时， $S_{max}$  随  $\theta$  的增加而增加，其关系可以用线性关系来描述，拟合结果，相关系数 0.98，各参数的相对不确定度约 4%。相比于小于  $90^\circ$  的拟合结果，大于  $90^\circ$  时的拟合相关程度较低，原因在于大角度释放时，由于存在绳子从松弛到突然紧绷的过程，这一过程是不可控的（对初始释放的条件十分敏感），因此实验的可重复性降低。如前文所说，一组数据我们进行 5 次实验测量取平均值来减小误差，在小于  $90^\circ$  时，数据的组内相对不确定度约为 4%；大于  $90^\circ$  时，组内不确定度达到了 10%，由此造成了拟合相关程度的降低。

综上，我们可以得到：**其他参量不变的情况下， $S_{max}$  随初始释放摆角  $\theta$  的增大先减小后增大，在  $\theta$  为  $90^\circ$ ，即水平位置释放时存在最小值。在低于水平位置释放时， $S_{max}$  与  $\theta$  呈二次函数关系；在高于水平位置释放时， $S_{max}$  与  $\theta$  呈线性关系。**

### 3.3 $S_{max}$ 与绳长 L 的关系

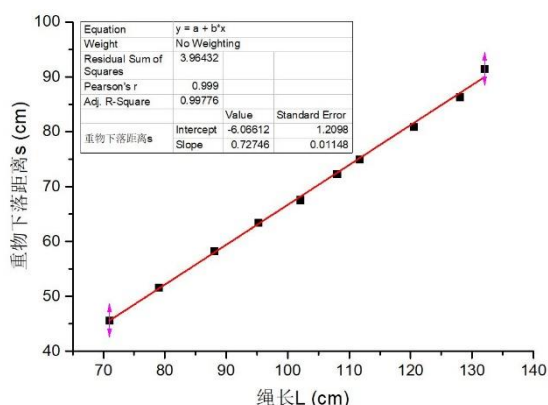


图 10 下落距离-绳长关系图

控制初始释放摆角、负载质量比不变，改变绳长 L，研究  $S_{max}$  的变化，得到的结果如图 10 所示。

可以看到，在其他条件不变的情况下，随着绳长的增加，下落距离  $S_{max}$  也随之增加，两者之间呈现线性关系，拟合结果相关系数 0.997，线性程度良好。斜率的不确定度较小约 2%，截距的不确定度较大约 15%，但依旧保持在一个合理的范围内。

于是可以得到：**其他参量不变的情况下， $S_{max}$  与绳长 L 之间呈线性正相关。**

### 3.4 $S_{max}$ 经验公式的导出

综合以上分析，利用分离变量的方法，我们可以将重负载下落最大距离  $S_{max}$  的经验公式写成如下形式：

$$S_{max} = C(r, \mu)F(l)Q(\theta)P(M/m)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(l) = a_1 l + a_2 \\ Q(\theta) = \begin{cases} b_1 \theta^2 + b_2 \theta + b_3 - \text{for } -\theta_0 < \theta < 90^\circ \\ c_1 \theta + c_2 - \text{for } -90^\circ < \theta < \theta_1 \end{cases} \\ P(M/m) = d_1 \frac{M}{m} + d_2 - \text{for } -M/m > (M/m)_0 \end{array} \right. \quad (5)$$

其中， $F(l)$  是变量为绳长的线性函数， $Q(\theta)$  是变量为初始释放摆角的分段函数， $P(M/m)$  是变量为质量比的线性函数， $C(r, \mu)$  是由水平杆决定的常数，与水平杆的半径与摩擦系数决定，受限于时间与实验条件，我们未对其进行研究，在公式中以常数形式给出。根据公式 (5)，最

少只要通过 7 次不同参数的实验测量即可确定各个系数的值,得到 $S_{max}$ 经验公式的具体形式。

#### 4 重负载下落距离 S 随时间变化关系的研究

我们利用 Tracker 视频分析软件对实验视频进行分析,读取重负载运动各个时刻的下落距离,利用 Origin 对数据点进行作图分析,研究不同实验条件下,重负载运动 S-t 图像的差异,并尝试寻找合适的经验公式对其进行拟合。

##### 4.1 绳长对 S-t 图像的影响

控制负载质量比、初始释放摆角不变,改变绳长,在质量比为 208/20、初始释放摆角  $90^\circ$  ;质量比 208/20、初始释放摆角  $60^\circ$  ;质量比 143/20、初始释放摆角  $90^\circ$  得到三组图像如图 11、12、13 所示。

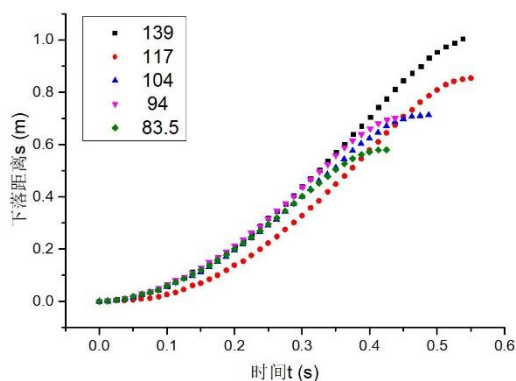


图 11 质量比 208/20、 $90^\circ$  改变绳长

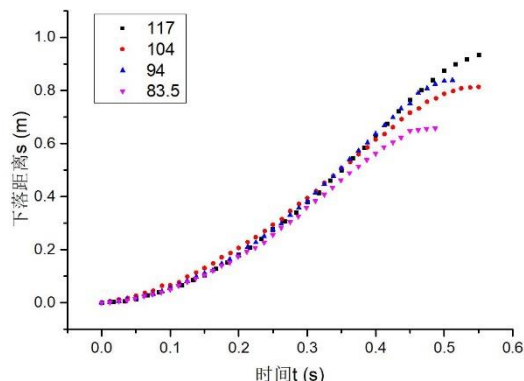


图 12 质量比 208/20、 $60^\circ$  改变绳长

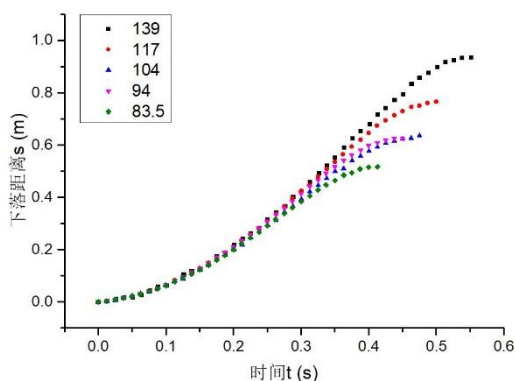


图 13 质量比 143/20、 $90^\circ$  改变绳长

首先,对图像的整体形状进行分析,S-t 图像的斜率存在一个先增大后减小的变化,说明重负载在运动过程中经历了先加速后减速的过程;可以看到,在收尾阶段的斜率变化速度大于最初阶段的变化速度,图像在整体上呈现出“非对称 S 型曲线”的形状,原因在于摩擦力与绕上杆的绳长之间呈现 e 指数的关系,造成了在收尾阶段加速度的大小与变化速度要比最初阶段大。

可以看到,绳长对 S-t 曲线的影响主要体现在运动的收尾阶段,随着绳长的减小,运动持续的时间也随之减小,重负载停止时对应的下落距离也随之减小,这与之前的实验结果是相吻合的。但是仔细观察图像后发现,绳长为 104cm 和 94cm 的图像十分接近,甚至在图 12 中,94cm 的图像在 104cm 图像的上方,这与之前的结论存在偏差。对于这一反常现象的解释,由于实验中绳子的断裂,在绳长为 94cm 和 83.5cm 的实验中我们换了一根新绳,而新绳与旧绳与水平杆的摩擦系数存在较大的差距(旧绳约 0.45;新绳约 0.30),从而导致了 $S_{max}$ 的反常变化,从这里也可以看出绳子与水平杆的摩擦系数会对运动过程产生较大的影响。

## 4.2 初始释放摆角对 S-t 图像的影响

控制负载质量比、绳长不变，改变初始释放摆角，在质量比为 208/20、绳长 117cm；质量比 208/20、绳长 104cm 得到两组图像如图 14、15 所示。

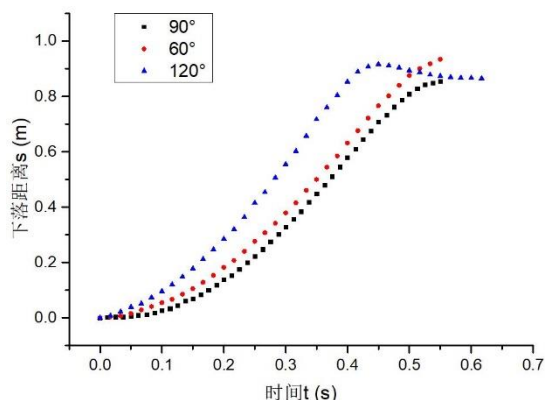


图 14 质量比 208/20 绳长 117cm，改变摆角

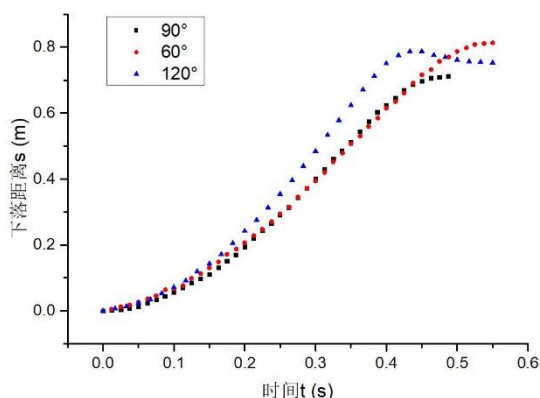


图 15 质量比 208/20 绳长 104cm，改变摆角

从图像中可以看到，60° 释放和 90° 释放时的曲线差异不大；而 120° 释放时的曲线与另外两条有明显的不同。正如前文所述，在 90° 位置两侧释放轻负载，其运动存在两种不同的物理过程，这一结论在这里再次得到了印证。然而，在图中我们发现，120° 释放时，重负载在运动的结束阶段存在一个回弹的现象，这是之前并没有预想和观察到的，为了进一步研究这一现象，我们固定初始摆角 120° 进行多组实验，得到曲线如图 16 所示。

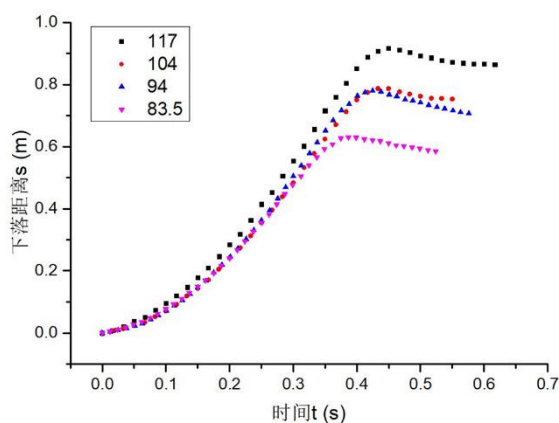


图 16 120° 释放重负载回弹现象研究

可以看到，重负载的回弹现象并非偶然存在，在更多的研究观察中我们发现，初始释放摆角大于 100° 时，重负载均会出现不同程度的回弹现象，目前对此没有很好的解释，只能提供两种可能的猜测。

猜测一：实验所用的绳子并非刚性，而是具有一定的弹性，水平位置以上释放时，由于绳子存在松弛到突然绷紧的过程，绳子被拉长，之后慢慢回收，从而导致了曲线上的回弹现象。

猜测二：从图像中可以看到，下落距离达到最大时用时较短，绳子缠绕水平杆的圈数不多，轻负载加速缠绕的过程中，绳子拉力增大，将重物向上拉回了一段距离。

## 4.3 质量比对 S-t 图像的影响

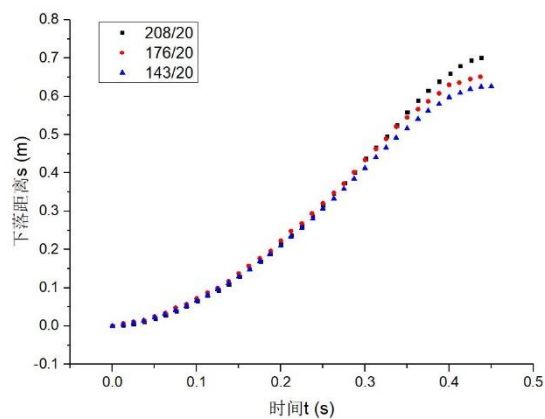


图 17 质量比对 S-t 图像的影响

其他参量不变的情况下，改变轻重负载质量比，得到的图像如图 17 所示。

可以看到，不同质量比情况下，负载运动规律相同，曲线差异不大，第一阶段的总时间也没有显著区别。随着质量比的降低，重负载停止时对应的最大下落距离也随之降低，这与之前的实验是相吻合的。

在研究了 S-t 图像的总体特征后，我们尝试寻求经验公式对其进行拟合。

#### 4.4 S-t 曲线拟合分析

从曲线的特点上可以得到，曲线形状是非对称的 S 型曲线；速度先增大后减小—S-t 曲线的一阶导数先增大后减小；加速度先减小、至 0 后反向增大—S-t 曲线的二阶导数单调递减，基于以上特点寻求合适的经验公式。进一步，可以通过拟合得到的公式求解体系的速度、加速度等的变化，进而完全通过实验解释循环摆的物理过程。

经过多种尝试与分析，我们最终选用了两种拟合方式。其一为 Origin 中自带的对“S 型曲线”的拟合公式，称为玻尔兹曼函数：

$$y = \frac{A_1 - A_2}{1 + e^{(x-x_0)/dx}} + A_2 \quad (6)$$

其二为我们根据实验数据与限制条件猜测的公式：

$$y = Ax^2 \exp(Bx^2 + Cx) \quad (7)$$

使用玻尔兹曼函数拟合的结果和残差如图 18、19 所示；使用自定义函数拟合的结果与残差如图 20、21 所示。

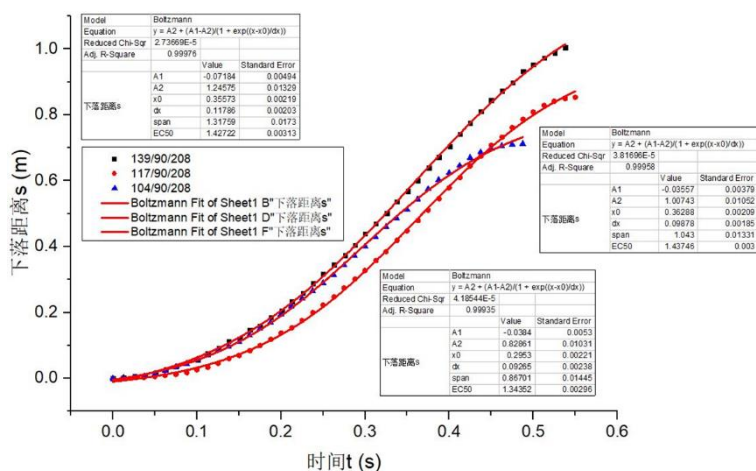


图 18 玻尔兹曼函数拟合图像

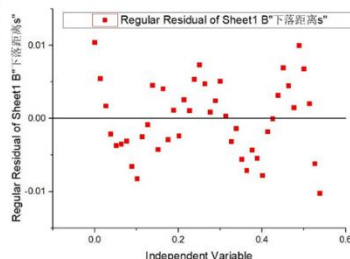


图 19 玻尔兹曼函数拟合残差

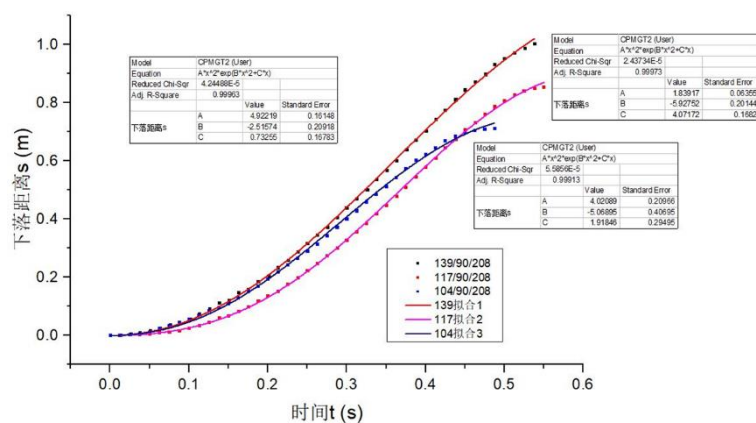


图 20 自定义函数拟合图像

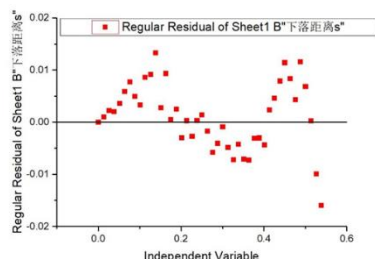


图 21 自定义函数拟合残差

评析拟合的结果，可以看到两种拟合方式的相关系数均在 0.999 以上，从残差上来看也均在 2cm 以下，接近取点时存在的系统误差，拟合结果良好。从公式中的参数的不确定度来看，使用玻尔兹曼函数拟合，各参数不确定度在 1% 左右；而用自定义函数拟合，参数的不确定度在 5% 左右，但是玻尔兹曼函数本身是关于一个“对称 S 型曲线”，从物理原理似乎与实验本身有点偏差。从残差的分布中，可以看到残差具有一定的规律性，呈现出“W 型”和“M 型”，说明经验公式本身存在一定的缺陷。在拟合的过程中，我们尝试了多种常用的“S 型曲线”的拟



合公式，在残差的分布上都存在上述特点，在本文中展示的两个公式是多种尝试中的最有结果。因此，关于 S-t 图像的拟合与分析还需要后续更多的讨论和研究。

## 5 其他参量的一些定性研究

### 5.1 弹性绳定性研究

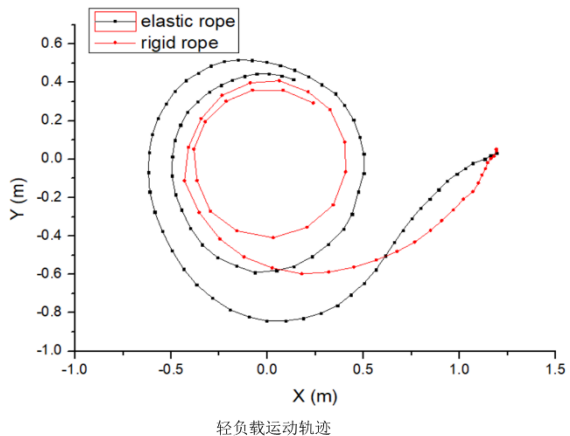


图 22 不同绳子下轻负载运动轨迹

将原本使用的尼龙绳换成弹性较大的橡皮绳进行实验，得到以下结果，图 22 所示的是两种绳子下轻负载运动轨迹的对比。

图 22 中，黑线代表使用弹性橡皮绳的轨迹，红线则为使用尼龙绳的轨迹。可以看到，由于在释放之处，绳子处于紧绷状态，因此橡皮绳在最初阶段有一个明显的回缩过程；并且，在绕杆时，由于加速度的变化，绳子会有拉伸收缩的过程，因此接近杆的轨迹与理想的圆的渐开线存在差异。除此之外，绳子弹性的加入，降低了实验的可重复性，因此无法进行深入的数量研究，只能做一些定性的描述。

除此之外，做运动第二阶段时轻负载到杆的距离  $r$  关于时间  $t$  的图像，尼龙绳如图 23 所示，弹性绳如图 24 所示。

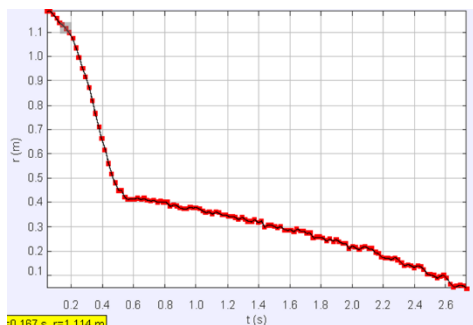


图 23 尼龙绳 r-t 图像



图 24 弹性橡皮绳 r-t 图像

两者之间比较可以发现，尼龙绳的 r-t 图像较为光滑，而弹性橡皮绳的 r-t 图像存在具有一定周期性的起伏，这是由于轻负载每绕水平杆一圈，其加速度存在一个周期性变化，绳长也随之改变所致。

### 5.2 水平杆直径定性研究

实验中发现，若未对水平杆的两端采取固定措施，那么在负载运动过程过，由于支架和杆本身具有一定的弹性，会产生上下起伏的振动。分别在杆直径为 1.1cm 和 6.6cm 的情况下做了对照实验，得到结果如图 25、26 所示。

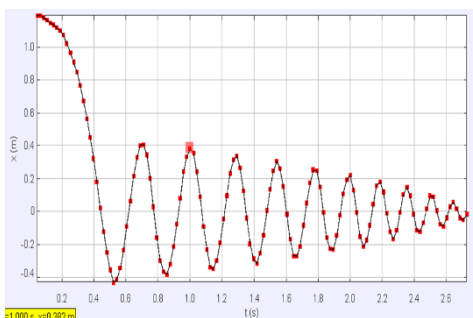


图 25 D=1.1cm 杆振动起伏图像

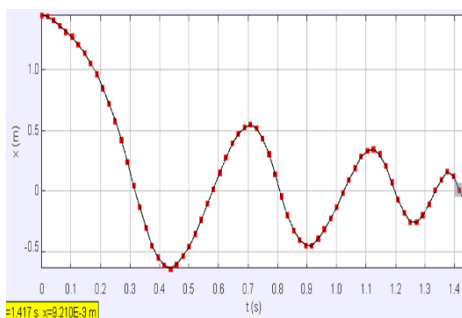


图 26 D=6.6cm 杆振动起伏图像

水平杆越粗，振动起伏的幅度越大，振动一个周期的时间越长，这是由于轻负载绕杆一周的时间变长所导致的。由于时间与条件所限，我们未对水平杆变量进行进一步研究。

## 6 进一步的工作

1. 理论与实验如何更好的结合与比对。
2. 对重负载出现的反常回弹现象的原理进一步探索确认，探索重负载是否具有更多的运动模式。
3. 有初速度情况下的轻负载释放对运动的影响，不同类型运动的临界条件的研究。
4. 对水平杆、绳子弹性变量对运动影响的进一步深入研究。

## 7 结语

本文对所谓“循环摆”现象进行了理论建模与实验分析，分析了循环摆运动过程各阶段的形成原因；对整个过程中的重要参量进行了半定量研究，得到重负载最大下落距离 $S_{max}$ 与总绳长 $l$ 、轻重负载质量比 $M/m$ 、初始释放摆角 $\theta$ 间的经验公式；利用 Tracker 对重负载下落距离  $S$  随时间  $t$  的变化进行了研究，得到的  $S-t$  图像为非对称S型曲线，并利用经验公式进行拟合分析；定性研究了绳子弹性、杆的粗细、摩擦系数等参量对运动过程的影响。

通过课题研究，对“循环摆”这一现象有了较为深入的了解，同时学习了如何对日常常见的宏观现象进行理论分析、实验研究的方法与思路，对后续进一步学习与研究产生了很大的帮助与启发。

## 参考资料与文献：

- 1、理论力学 梁昆淼著 高等教育出版社
- 2、知乎上“循环摆”、“IYPT”、“CUPT”界面下的讨论与帮助