

# 高斯光束单丝衍射光强分布理论分析和实验

吴选红 杨之昌

(复旦大学物理系, 上海)

**摘要:** 本文用基尔霍夫衍射理论推导出高斯光束单丝衍射的光强分布公式, 通过计算机处理得到其数值解和它的远场条件, 这些结论与实验结果一致。

## The theoretical analysis and experiment of diffraction intensity distribution of Gauss laser beam

Wu Xuanhong, Yang Zhichan

(Department of Physics, Fudan University)

**Abstract:** A formula of the diffraction intensity distribution of Gauss laser beam based on the Gilhoff diffraction theory is given. The numerical solution is obtained with the computer, and its far-field condition is found. These results are in agreement with the experiments.

### 一、引 言

He-Ne激光器输出的TEM<sub>00</sub>模是严格的高斯光束, 若在光束的腰部附近的横截面上放一根细丝, 则在远处的观察屏上即可观察到它的衍射条纹, 用实验方法记录单缝和单丝的高斯光束衍射花样并进行比较<sup>[1,2]</sup>, 发现两者主要区别在于: 单丝衍射条纹的中央出现了两个次极大, 一个主极大, 共有三个峰值, 并且极小值不为零, 而单缝衍射条纹则只有一个中央极大值。本文通过建立高斯光束单丝衍射的远场条件, 求得在此条件下的衍射光强分布表达式, 并且用计算机数值分析此表达式, 得到与实验一致的结果, 为动态衍射法测量细丝直径和测量微小物体的形状、大小等应用提供了可靠的依据。

### 二、理 论 推 导

#### 1. 高斯光束的描述

对于He-Ne激光器输出的高斯光束, 在离腰部 $z$ 处截面的电矢量分布(见图1)是:

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{W(0)}{W(z)} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{W^2(z)} - i\pi(x^2 + y^2)/\lambda R(z)} \quad (1)$$

式中,  $W(z)$  是离束腰截面 $z$ 处的光束半径,  $R(z)$  是 $z$ 处的曲率半径,  $\lambda$  是激光波长,  $W(z)$  与  $R(z)$  可由激光本身及距离 $z$  确定<sup>[3]</sup>。为了书写方便, 令:

$$a = 1/W^2(z), \quad c = \pi/\lambda R(z),$$

则有:

$$E(x, y) = E(x) E(y) = E_0 e^{-(a+ic)x^2} e^{-(a+ic)y^2} \quad (2)$$

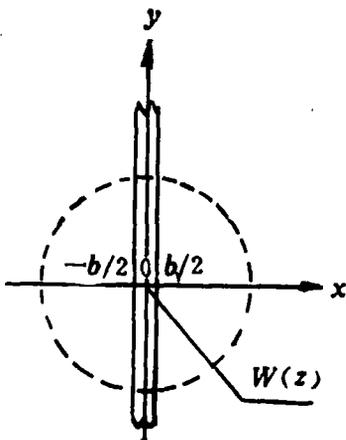


图1 高斯光束的描述

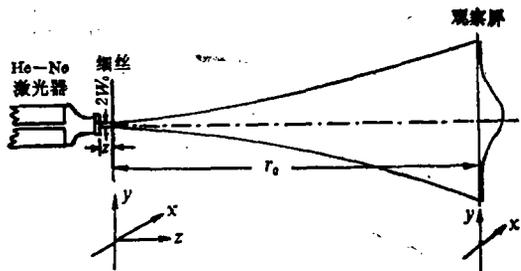


图2 衍射屏上的光扰动

### 2. 衍射屏上的光扰动

若在离束腰截面 $z$ 处的截面上放一直径为 $b$ 的细丝(见图2), 在离细丝 $r_0$ 处的屏上的电矢量是<sup>[4,5]</sup>:

$$E(x_0) = E_0 \left[ \int_{-\infty}^{-b/2} \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{b/2}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \right] e^{ikr} E(x, y) / r \, dx \, dy \quad (3)$$

式中,  $r = [r_0^2 + (x-x_0)^2 + y^2]^{1/2}$ 。

当 $x, y \gg W(z)$ 时,  $E(x, y) \rightarrow 0$ , 积分 $\rightarrow 0$ ; 对(3)式有贡献的范围是 $x, x_0, y \ll r_0$ , 则可近似地认为:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \approx \frac{1}{r_0} e^{ikr_0} [1 + (x-x_0)^2/2r_0^2 + y^2/2r_0^2] \quad (4)$$

从(2)式与(4)式可知, (3)式可对 $x, y$ 分离积分, 并将 $dy$ 的积分值并入常数 $E_0$ 中得到:

$$E' = \frac{E_0}{r} e^{ikr_0} e^{ikx_0^2/2r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iky^2/2r_0} e^{-(a+ic)/y^2} dy$$

$$E(x_0) = E' \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \right] e^{-(a+ic-ik/2r_0)x^2 + ikxx_0/r_0} dx \quad (5)$$

(5) 式中第一项积分 $E_1(x_0)$ 为:

$$E_1(x_0) = E' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+ic-ik/2r_0)x^2 + ikxx_0/r_0} dx$$

$$= E' \left\{ \pi [a^2 + (c - R/2r_0)^2]^{-\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} [(c - k/2r_0)/a]} \cdot e^{-k^2 x_0^2 (a - ic + ik/2r_0) / 4r_0^2 [a^2 + (c - k/2r_0)^2]} \quad (6)$$

$E_1(x_0)$  的物理意义是：在没有衍射物体时直接传播到屏上的光扰动，它是一个高斯函数，这一项的存在将使单丝衍射条纹的中央产生二个次极大。

选择适当的丝径  $b$  和  $r_0$  的值，可使下面不等式满足：

$$|a + ic - ik/2r_0| (b/2)^2 \ll 1 \quad (7)$$

则可将第二项积分的被积函数作泰勒展开，令  $d = c - k/2r_0$ ， $\beta = kb/2r_0$ ，可得：

$$E_2(x_0) = E' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-(a+id)x^2 + ikx_0 x/r_0} dx$$

$$= E' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ 1 - (a-id)x^2 + (a-id)^2 x^4 / 2 \right] \cdot e^{ikx_0 x/r_0} dx \quad (8)$$

已知下面两个函数的积分表达式为：

$$A(x_0) = \int_0^{\frac{b}{2}} x^2 \cos(kx_0 x/r_0) dx$$

$$B(x_0) = \int_0^{\frac{b}{2}} x^4 \cos(kx_0 x/r_0) dx \quad (9)$$

其它正弦函数的积分为零，(8) 式可表示为：

$$E_2(x_0) = E' [b \operatorname{sinc}(\beta x_0) - 2(a-id)A(x_0) + (a-id)^2 B(x_0)] \quad (10)$$

(10) 式就是高斯光束单缝衍射的光扰动，第一项是平行光的单缝衍射的电矢量，第二项是用高斯光束代替平行光后所引进的一级修正项，第三项是二级修正项，一般可忽略。将(6)式、(10)式代入(5)式，可求得屏上的光强分布是：

$$I(x_0) = |E_1(x_0) - E_2(x_0)|^2 \quad (11)$$

从以上分析可得出以下结论：

1. 高斯光束的单丝衍射的光扰动是光束直接传播到观察屏上的光扰动与高斯光束单缝衍射的光扰动之差；

2. 平行光单丝衍射不存在远场条件，而高斯光束的光斑大小有限，以(7)式为远场条件，在远场条件下，高斯光束的单丝衍射的光扰动可以用夫琅和费衍射积分加某些修正项求得，如(10)式所示；

3. 图3与图4分别是单丝和单缝衍射的光强分布 ( $b = 0.246 \text{ mm}$ )。两者最主要的差别在于：单丝衍射中央有三个峰，而单缝衍射的中央只有一个极大峰。另外，从图上可以发现：单丝衍射的极大峰是不对称的，峰值向中心偏移，峰的上升宽度大约是下降宽度的一

半,表现出明条纹宽度是暗条纹宽度的一半,这与实验结果相吻合。

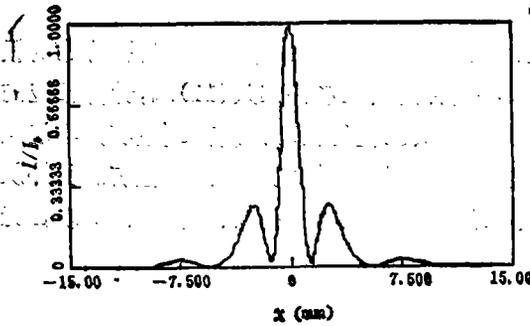


图3 单丝高斯光束衍射光强分布

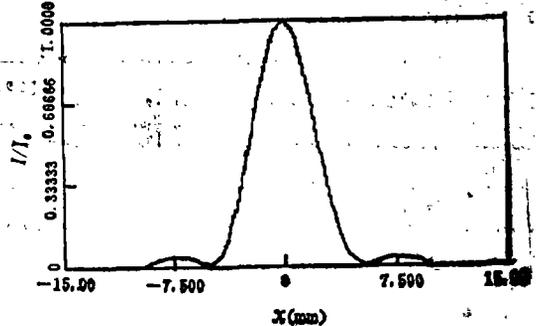


图4 单缝高斯光束衍射光强分布

### 三、实验方法和结果

#### 1. 实验装置

记录高斯光束单丝衍射光强分布的实验装置如图5所示。接收器是硅光电池,它将光信号转化为电信号,经A/D接口送入计算机处理,接收器由扫描器做一维扫描,计算机就可以计算出结果,并打印光强分布图,也可由自动记录仪将光强分布记录下来进行处理。

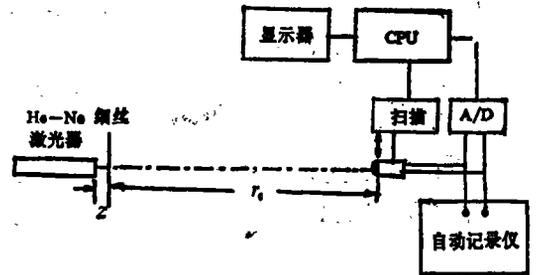


图5 记录高斯光束单丝衍射光强分布的实验装置图

#### 2. 实验条件

实验使用的He-Ne激光器是复旦大学研制的,输出激光模式是TEM<sub>00</sub>,束腰半径W<sub>0</sub>=

0.278mm,用六根不同材料的细丝做实验,放在离激光器平面输出端z=20mm处,λ=0.633μm,则可计算出<sup>[3]</sup>: W<sup>2</sup>(z)=0.077mm<sup>2</sup>, a=12.9mm<sup>-2</sup>, R(z)=7.28mm, c=0.682

附表 理论与实验值的比较

丝 径 (mm)		0.198 漆包线	0.246 漆包线	0.450 漆包线	0.625 漆包线	0.405 钨 丝	0.229 钨 丝
中央极大值I <sub>0</sub>	(理论值)	0.1285	0.0978	0.0437	0.0149	0.0408	0.1073
中央次极大相 对强度I/I <sub>0</sub>	理论值	0.161	0.240	0.619	0.890	0.530	0.210
	实验值	0.189	0.283	0.636	0.840	0.620	0.400
中央次极大位 置 (mm)	理论值	2.45	2.23	1.69	1.12	1.81	2.35
	实验值	2.51	2.37	1.86	1.60	2.28	3.00
中央次极小位 置 (mm)	理论值	1.45	1.30	0.94	0.65	0.99	1.34
	实验值	1.45	1.28	0.97	0.85	0.99	1.54
±1级 x <sub>m1</sub>	理论值	6.53	5.32	3.14	2.43	3.40	5.68
	实验值	6.19	4.99	3.04	2.50	3.25	6.01

$\text{mm}^{-2}$ 。当 $b=0.4\text{mm}$ 时代入远场条件(7)式,得到 $r_0 \gg 225\text{mm}$ ,因此取 $r_0=2000\text{mm}$ 是满足远场条件(7)式的。

对于六根不同直径不同材料的细丝,在上述条件下做实验,得到单丝衍射光强分布的极大值,极小值位置及峰值强度比,见附表<sup>[1,2]</sup>。将同样的实验条件代入(11)式,计算相应的物理量并同实验结果比较,得到极小值位置的理论与实验值的相对偏差在5%左右,峰值强度比例基本相同,峰值不对称,向中心偏移,暗条纹宽度是亮条纹宽度的两倍左右。另外从附表中可以发现:高斯光束单丝衍射光强分布只与细丝直径有关,与材料的性质例如表面光洁度等无关。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 杨之昌,王潜智.单缝和单丝衍射光强分布的自动记录.物理通报,1982;复刊号:35~38
- [ 2 ] 马秀芳,杨之昌.高斯光束单丝衍射的光强分布.湖北大学学报,1988;增刊:36~39
- [ 3 ] 伍长征,王兆永,陈凌冰 *et al.*激光原理.上海:复旦大学出版社,1989;98~124
- [ 4 ] 玻恩M,沃尔夫E.光学原理.北京:科学出版社,1978;489~498
- [ 5 ] 亚里夫A.量子电子学.上海:上海科学技术出版社,1983;103~123

\*

\*

\*

作者简介:吴选红,男,1966年11月出生。硕士研究生。现从事光学计量量究工作。  
杨之昌,请见本刊1990年,第14卷,第2期,第16页。

收稿日期:1990年9月10日。收到修改稿日期:1991年3月19日。

### · 产品简讯 ·

## 1.01 $\mu\text{m}$ 应变层InGaAs/AlGaAs激光器

由加拿大国家研究理事会和固态光电子联合会合作生产的InGaAs/AlGaAs应变层激光器工作电流小,可与类似激光器匹敌。R L Williams和合作者在CLEO会议编号CTuA,的文章中报告了这种阶梯折射率、分离密封异质结构激光器是由分子束外延生长的,其阈值电流密度为 $56\text{A}/\text{cm}^2$ ,内量子效率为80%。

据Williams说:这种高效率低阈值电流激光器将可望很成功地使用在实用化的远距离通信中。现在进行用这类激光器泵浦的光放大器的研究工作。

译自 L F World, 1991; 27 (6): 11 祖兰 译 马理 校