

单摆系统通向混沌的道路

符五久, 饶黄云

(东华理工学院 物理系, 江西 抚州 344000)

摘要:对受迫非线性单摆系统进入混沌的道路进行了研究,发现单摆系统的运动是极其复杂的.目前在其他系统发现的进入混沌的通道,在该系统中几乎均可找到.这是一个介绍混沌运动的典型系统.

关键词:单摆;混沌道路;异宿缠绕

中图分类号:O 313 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-0712(2008)01-0005-06

随着非线性科学研究的不断深入,特别是 20 世纪 60 年代混沌现象的发现,极大地激发了人们探索自然界和社会中存在的各种复杂性问题的热情,同时也改变了人们观察周围世界的思维方法.目前,人们已经发现,在自然科学的各个不同的领域内,各种系统有着共同的概念.非线性系统具有超越不同学科领域局限性的共同性质,非线性研究正从范例的研究走向一个以探索复杂性为目标的学科——非线性科学.以混沌现象作为中心课题的非线性科学的基本概念将会持久地影响自然科学的进程,成为继量子力学、相对论之后的一次新的科学革命,并且在哲学与方法论方面引起深刻的变革.作为 21 世纪的大学生,接受非线性思想的熏陶已势在必行,这已成为人们的普遍共识.

但是,如何在大学物理的水平引入混沌现象,是一直在探讨的问题.我们认为从单摆引进混沌现象是一种较合适的方式.为此,本文对单摆系统中的混沌现象作了较细致的分析,在此基础上做些修改就可向学生介绍混沌现象.

1 单摆系统的动力学方程

为了能让单摆做大幅度的运动,我们把悬挂小球的细线换成刚性细棒,细棒的质量忽略不计.设摆长为 l , 小球的质量为 m , 阻尼系数为 γ , 在摆运动方向上受到一个简谐外力的作用,则其运动方程为

$$ml\ddot{\theta} + \gamma l\dot{\theta} + mgs\sin\theta = F\cos\omega_{ex}t \quad (1)$$

$$\text{令 } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, f = \frac{F}{mg}, \tau = \omega_0 t, \Omega = \frac{\omega_0}{\omega_{ex}}, \beta = \frac{\gamma}{2m\omega_0},$$

将方程(1)无量纲化,得

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \sin\theta = f\cos\Omega\tau \quad (2)$$

其中 $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}$. 在小摆幅情况下,方程(2)可化为线性方程,其解包含了有关阻尼振动、受迫振动和共振等问题的结果.如果不限制摆动的幅度,则单摆的运动变得非常复杂.

在动力学理论中,通常将一个高阶微分方程改写成一阶微分方程组的形式.令 $\dot{\theta} = \omega$, 则方程(2)可改写为

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2\beta\omega - \sin\theta + f\cos\Omega\tau \end{cases} \quad (3)$$

再令 $\varphi = \Omega\tau$, 则方程(3)可写成一阶的自治方程组形式:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2\beta\omega - \sin\theta + f\cos\varphi \\ \dot{\varphi} = \Omega \end{cases} \quad (4)$$

称自治方程组(4)为动力学方程(2)的标准形式,也称为动力学方程,运动方程或状态方程.

当方程(4)中 $\beta = 0, f = 0$ 时,系统是无阻尼无驱动的,其相轨线如图 1(a) 所示.在能量较小时,单摆的相轨迹是封闭的曲线,代表摆做周期振荡;在能量较大时,单摆的相轨线是朝着一个方向逃逸的非封闭曲线,代表摆做旋转运动.图 1(a) 中两相交的轨线是周期轨线和逃逸轨线的分界线,称为异宿线,两交点 A、B 称为异宿点(或双曲点、鞍点),封闭轨线包围的中心点 O 称为中心或椭圆点.对于高维保守系统,由于相轨线受守恒定律的约束,相轨迹在相

收稿日期:2006-05-22;修回日期:2007-05-15

作者简介:符五久(1956—),男,安徽无为,东华理工学院物理系教授,主要从事物理学教学和研究工作.

空间中限制成一定的形式,是个维数低于相空间维数的曲面,通常称为 KAM 环面.图 1(a)中的封闭轨线和非封闭轨线是一维的 KAM 环面.当有驱动时,单摆系统可以出现混沌运动,典型相轨迹如图 1(b)、(c)所示,它是由周期(或准周期)轨线和旋转轨线组成的.所以,无阻尼单摆系统的混沌运动就是一

忽儿做振动(周期或准周期的),一忽儿又做转动.而这些振动(周期或准周期的)和转动是完全随机的,即何时做振动何时做转动,在什么位置上做振动在什么位置上做转动,运动方向如何,做振动、转动的次数等都是不确定的,无法预测的.

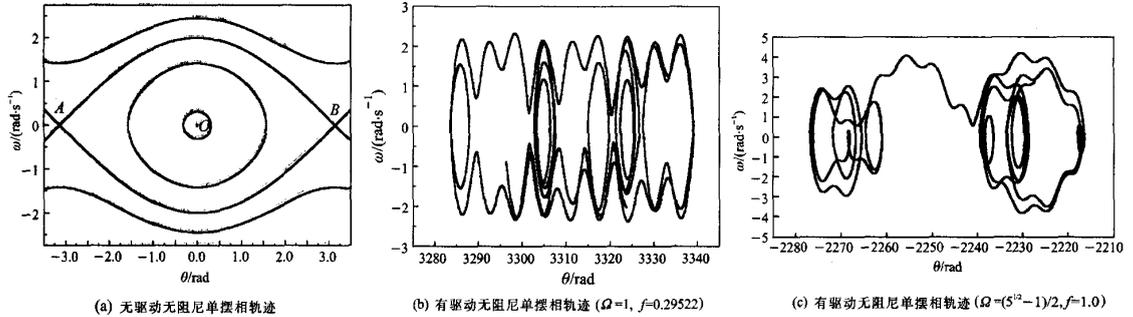


图 1

2 保守单摆系统进入混沌的道路

当方程(4)中 $\beta=0$ 时,我们用龙格-库塔方法对方程(4)进行数值求解,作出的庞加莱截面如图 2、4、5 所示.可见,受迫保守单摆系统进入混沌的过程有两种方式:第一种方式是随着驱动幅度 f 增大,首先 KAM 环变形,然后破裂,最后破碎(混沌),如图 2 所示.应该注意,图 2 中的(c)图是有结构的,如图 3 所示.图 3(b)是图 3(a)(它就是图 2(c))的一个小环的放大,图 3(c)是图 3(b)的一个小环的放大

图.可见,他们的结构都是由环构成的,是无穷层次的自相似结构,即一层一层地环中套环.仔细观察图 2(d),可以看出,它是由许多破碎的 KAM 环组成, KAM 环的破碎情况如图 3(d)所示.第二种方式是随着驱动幅度 f 增大, KAM 环发生扭曲,然后直接破碎(混沌),这种情况参数变化范围很窄,如图 4、图 5 所示.图 4(c)是图 4(a)的一个扭曲部分的放大图.可见,图 4(a)也是由环构成自相似结构.图 4(b)也是由许多破碎环组成,其破碎情况与图 3(d)完全一样.对扭曲情况,还存在一种无自相似结构的情

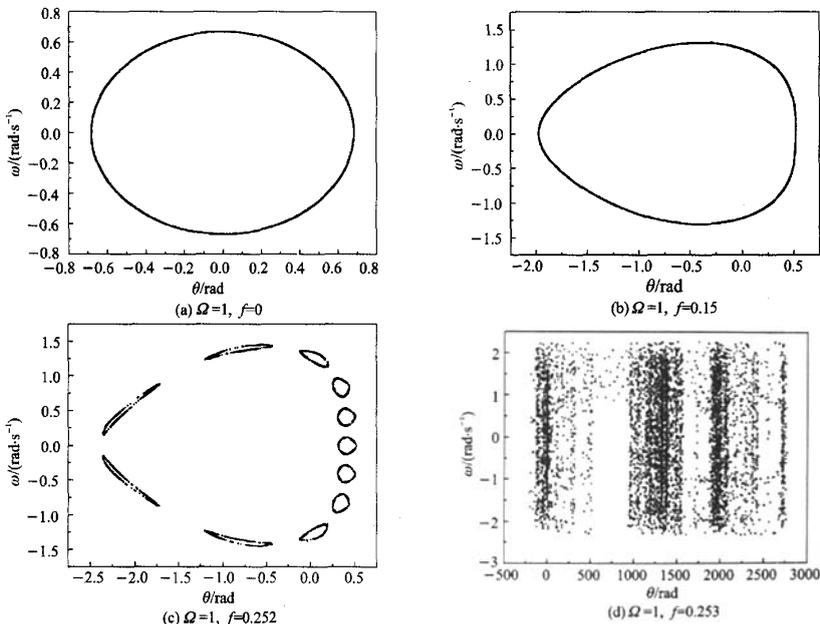


图 2 KAM 环变形→破裂→破碎(混沌)

况,如图 5(c)(是图 5(a)的一个扭曲部分的放大图)所示.图 5(b)仍然由许多破碎环组成,其破碎情况与图 3(d)类似.于是,保守单摆系统进入混沌的机制是环面破碎.

因为非线性系统的振动频率与振幅有关,当驱动幅度 f 变化时,系统频率也随之变化.当接近或满足共振条件时,KAM 环破裂或严重扭曲,甚至破碎导致混沌.应当注意的是,破碎的状态所对应的能

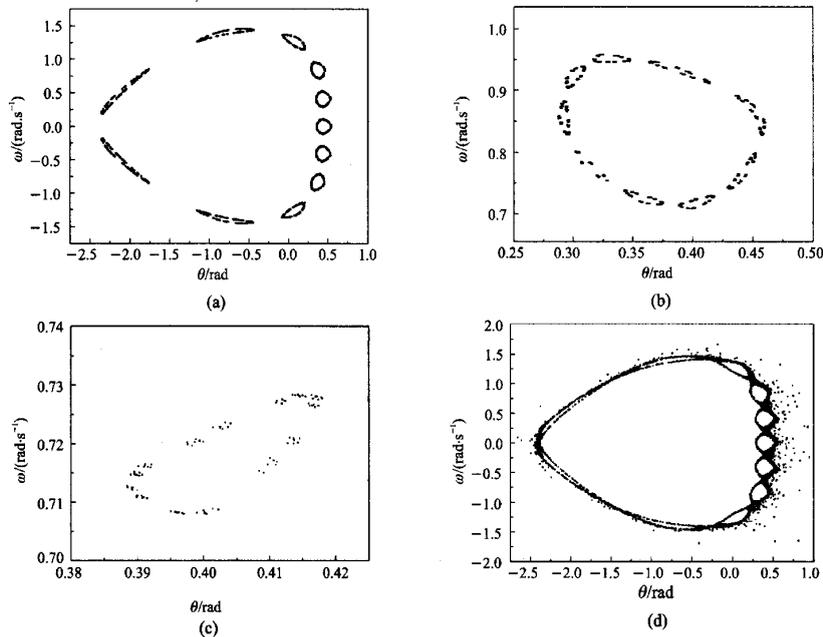


图 3 椭圆点的 KAM 环的自相似结构

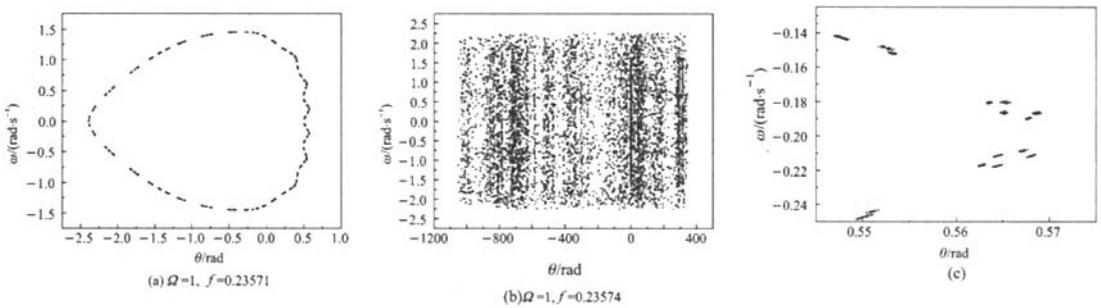


图 4 KAM 环扭曲→破碎(混沌)

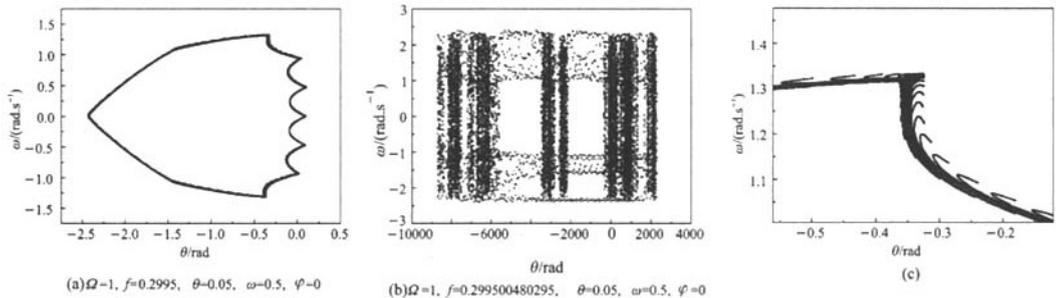


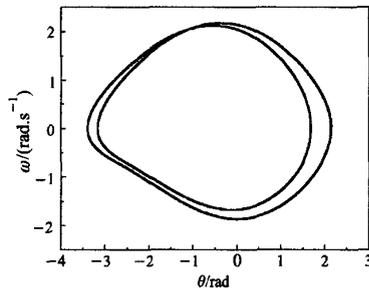
图 5 KAM 环扭曲→破碎(混沌)

量大于环面上状态的能量. 这样, 系统就可以从原来振动状态(对应图 1(a)中的封闭轨线)跃迁到转动状态(对应图 1(a)的逃逸轨线). 由于驱动是周期性的, 当驱动使系统偏离共振条件时, 系统又可以从转动状态回到振动状态. 这样, 系统的状态就在图 1(a)中的封闭轨线和逃逸轨线之间不断穿越. 在穿越过程中, 轨迹一定与异宿轨线相交, 根据异宿、同宿缠绕理论, 不管是稳定轨道还是不稳定的, 一旦与同宿或异宿线(稳定或不稳定的)有一个交点, 就会有无穷多交点. 这种同宿缠绕(homoclinic tangle)或异宿缠绕(heteroclinic tangle)只有在满足共振条件的不可积系统中才会出现, 而同宿缠绕或异宿缠绕即蕴涵着混沌. 所以, 单摆系统出现的混沌还存在异宿缠绕机制.

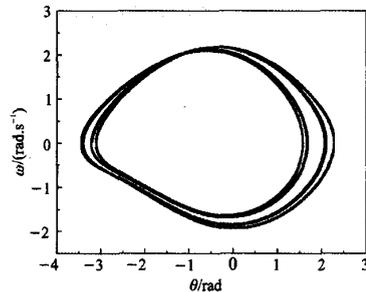
总之, 无耗散的受迫单摆系统, 从规则运动进入混沌运动的机制是: 当驱动幅度变化使系统发生共振时, KAM 环破碎, 同时伴随异宿缠绕使系统进入混沌运动. 摆的混沌运动就是一会儿做振动(周期或准周期的), 一会儿又做转动, 做振动、转动的时间、位置、运动方向、次数等都是不确定的, 无法预测的. 典型的混沌相轨迹如图 1(b)、(c)所示.

3 阻尼单摆系统进入混沌的道路

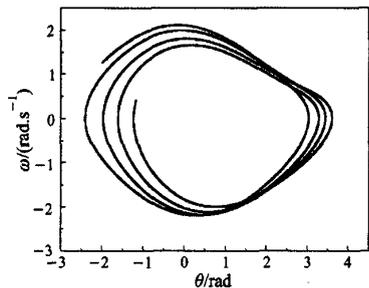
3.1 倍周期序列分岔到准周期, 再经准周期进入



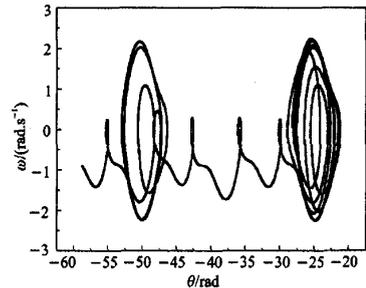
(a) $\Omega=(5^{1/2}-1)/2$, $\beta=0.35$, $f=1.32$



(b) $\Omega=(5^{1/2}-1)/2$, $\beta=0.35$, $f=1.327$



(c) $\Omega=(5^{1/2}-1)/2$, $\beta=0.35$, $f=1.35$



(d) $\Omega=(5^{1/2}-1)/2$, $\beta=0.35$, $f=1.4$

图 6 相轨迹

混沌

在方程(4)中考虑阻尼, 对不同的驱动幅度 f 求解方程(4). 随着 f 增大, 环面从 1 环分岔到 2 环, 2 环分岔到 4 环, 4 环分岔到 8 环, 这是倍周期分岔, 如图 6(a)、(b)所示. 但不是一直由倍周期序列到混沌的, 中间要经过图 6(c)的准周期过程才进入混沌(我们已验证图 6(d)是混沌轨迹). 由图 6(d)可以看出, 相轨线在某一位置缠绕多圈后又转到另一处缠绕多圈, 但轨线不封闭. 它对应着摆在某处作准周期振动多次后, 通过旋转数圈后又转移到另一个地方再作准周期振动, 这与 2.1 节中的混沌运动是一样的. 所以, 倍周期分岔到准周期后, 最后混沌状态还是在振动和转动之间变化, 在穿越异宿轨线时也发生异宿缠绕现象.

3.2 倍准周期序列进入混沌

在方程(4)中取参数 $\beta=0.35$, $\Omega=0.3$, 对不同 f 的相轨迹作庞加莱截面得图 7(a)~(e). 图中的点, 实际上是由短线组成的, 表示是准周期运动. 准周期轨道局限在一个小邻域上缠绕, 随着驱动幅度增大, 缠绕邻域稍有扩大, 进入混沌之前, 准周期环面破碎. 这样, 图 7 进入混沌的过程可以看作是通过倍准周期序列进入混沌的. 图 7(e)的混沌相轨道由振动和转动轨线组成, 如图 7(f)所示, 必然伴随着异宿缠绕现象.

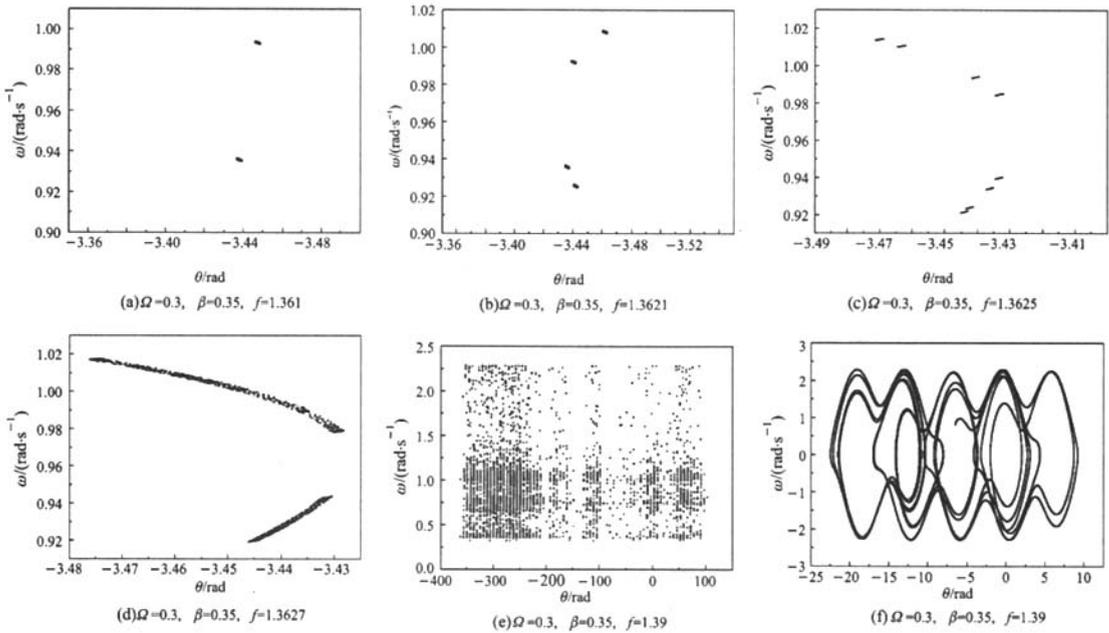


图 7 倍准周期序列→混沌

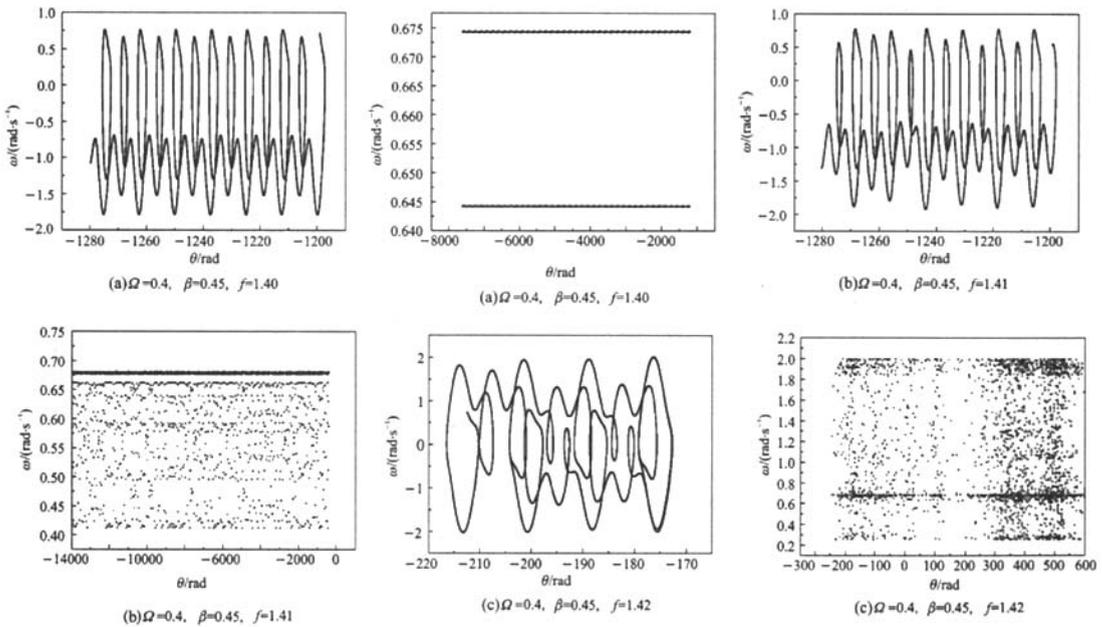


图 8 旋转→混沌(左列为相轨道,右列为庞加莱截面)

3.3 倍周期序列分岔到准周期,再由准周期到周期 3,然后进入混沌

在方程(4)中取 $\beta = 0.45, \Omega = 2/5, f$ 在 1.23 至 1.27 之间,我们发现由倍周期序列到准周期,再由准周期到周期 3,然后由周期 3 进入混沌的道路.按李天岩-约克定理,出现周期 3,必存在沙尔可夫斯基

基序列,也意味着混沌的存在.混沌轨道也是由封闭曲线和逃逸曲线组成,伴随着异宿缠绕现象.

3.4 由旋转进入混沌

如果仍取 $\beta = 0.45, \Omega = 2/5$,将参数 f 调到 1.41 至 1.42 之间,我们发现由旋转进入混沌的道路,如图 8 所示.图 8(a)表示的是由两种旋转速度

组成的规则旋转运动,图 8(b)表示的是由无数不同旋转速度组成的无规则旋转运动;由庞加莱截面可以看出,KAM 环已破碎,我们对它进行了研究,它对初值不敏感,是一种非混沌的随机运动.图 8(c)表示的是混沌运动,对初值非常敏感.由混沌轨道可以看出,它是由旋转轨线来回缠绕组成的.它从上旋转轨线折回下旋转轨线的过程中必穿过界轨,与异宿线相交,出现异宿缠绕现象.

3.5 环破碎进入混沌

在有阻尼的单摆系统中也存在保守系统的情况,由环面破碎进入混沌的道路.我们取 $\beta = 0.25$, $\Omega = 2/5$,研究了 f 在 0.9 至 0.99 之间的情况,没有发现倍周期分岔等其他情形,而是由环面破碎直接进入混沌的.

4 单摆系统中的一些结论

由以上讨论,我们可以得出以下结论:

1) 单摆系统模型虽然简单,但其中有各种通向混沌的道路.它的运动行为是极其复杂的,属于复杂系统.

2) 单摆系统虽然通向混沌的道路很多,但最终的混沌状态,都是一忽儿做振动,一忽儿又做转动(作振动、转动的次数、位置、运动方向等都是不确定的,无法预测的).所以,由其相轨迹很容易判断混沌运动:如果相轨迹是由振动轨线和转动轨线无规组

成的或由转动轨线无规则来回缠绕组成的,则一定是混沌运动.

3) 因为单摆在作混沌运动时,状态在振动态和转动态之间来回穿梭,必与界轨相交.所以,同宿和异宿轨道理论适应单摆系统的混沌分析.

参考文献:

- [1] 刘秉正,彭建华.非线性动力学[M].北京:高等教育出版社,2004.
- [2] 王瑞丽,吴光敏,段良和.非线性物理理论及应用[M].北京:科学出版社,2000:1-11;85-171.
- [3] 赵凯华.从单摆到混沌[J].现代物理知识,1993,5(4,5).
- [4] Celso Grebogi, Edward Ott, James A Yorke. Attractors an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos, Physica 15D (1985):354-373.
- [5] Kunihiko Kaneko. Oscillation and doubling of torus [J]. Progress of Theoretical Physics,1984,72(2).
- [6] 张伟,霍拳忠,李骊.非线性振动系统的异宿轨道分叉、次谱分叉和混沌[J].应用数学和力学,1992,13:199.
- [7] 谢柏松.单摆运动的同宿轨道分叉、次谱分叉和混沌[J].北京师范大学学报,2000,36(5):631.
- [8] 郎和.保守单摆系统中的混沌运动[J].西北师范大学学报,2002,38(4):108.
- [9] 李元杰.单摆的规则运动及混沌运动的研究[J].大学物理,1998,17(9):6.

The roads to lead chaos in the pendulum system

FU Wu-jiu, RAO Huang-yun

(Department of Physics, East China Institute of Technology, Fuzhou, Jiangxi 344000, China)

Abstract: The roads that the pendulum system enter chaotic state is studied. Usual roads to lead chaos can be found in the pendulum system. It is a typical system to introduce chaotic phenomenon.

Key words: single pendulum; chaotic road; heteroclinic tangle

单摆系统通向混沌的道路

作者: 符五久, 饶黄云, FU Wu-jiu, RAO Huang-yun
作者单位: 东华理工学院物理系, 江西, 抚州, 344000
刊名: 大学物理 
英文刊名: COLLEGE PHYSICS
年, 卷(期): 2008, 27(1)
被引用次数: 3次

参考文献(9条)

1. 刘秉正;彭建华 非线性动力学 2004
2. 王瑞丽;吴光敏;段良和 非线性物理理论及应用 2000
3. 赵凯华 从单摆到混沌 1993(4-5)
4. Celso Grebogi;Edward Ott;James A Yorke Attractors an N-torus:Quasiperiodicity versus chaos 1985
5. Kunihiro Kaneko Oscillation and doubling of torus 1984(02)
6. 张伟;霍拳忠;李骊 非线性振动系统的异宿轨道分叉、次谐分叉和混沌 1992
7. 谢柏松 单摆运动的同宿轨道分叉、次谐分叉和混沌[期刊论文]-北京师范大学学报 2000(05)
8. 郎和 保守单摆系统中的混沌运动[期刊论文]-西北师范大学学报 2002(04)
9. 李元杰 单摆的规则运动及混沌运动的研究[期刊论文]-大学物理 1998(09)

本文读者也读过(10条)

1. 刘雯彦. 陈忠汉. 朱位秋 有界噪声激励下单摆-谐振子系统的混沌运动[期刊论文]-力学学报2003, 35(5)
2. 熊化高. 陈浩. XIONG Hua-gao. CHEN Hao 有阻尼单摆的冲击波解[期刊论文]-大学物理2007, 26(12)
3. 陈立宏. 贾玉江. 夏彬. 韦丽 倒摆运动的混沌行为[会议论文]-2004
4. 林文刚. 陈伟中. 朱逸斐. Lin Wen-Gang. Chen Wei-Zhong. Zhu Yi-Fei 振动激励下一维单摆链的起始不稳定性分析[期刊论文]-南京大学学报(自然科学版) 2005, 41(2)
5. 霍明山 对单摆平衡位置的一点看法[期刊论文]-物理教学探讨2002, 20(3)
6. 柳盛典. 王玉良. 李丽仿. 慕海峰. LIU Sheng-dian. WANG Yu-liang. LI Li-fang. MU Hai-feng 量子变换的李代数方法[期刊论文]-大学物理2008, 27(1)
7. 金玉涛. 来清民. JIN YUTAO. LAI QINGMIN 基于PIC单片机的单摆智能测量控制系统[期刊论文]-微机计算机信息 2007, 23(5)
8. 梅甫良. MEI Fu-liang 单摆非线性动力响应的增维精细积分法[期刊论文]-嘉兴学院学报2008, 20(3)
9. 俞丽萍. Yu Liping 构建与解读“单摆模型”[期刊论文]-物理教学探讨2010, 28(25)
10. 李建国. 王奇文. Li Jianguo. Wang Qiwen 单摆周期的近似公式比较[期刊论文]-河南科学2010, 28(11)

引证文献(3条)

1. 曲光伟. 王艳辉. 邹德滨. 张天洋 复摆运动状态的研究[期刊论文]-物理与工程 2009(5)
2. 孙红章. 汤正新. 刘哲. 苏向英. 刘磊. 刘钢 复摆强迫振动中的混沌研究[期刊论文]-商丘师范学院学报 2010(3)
3. 李硕. 赵彤帆. 李根全. 宋海珍 Matlab软件在单摆自由振动中的应用[期刊论文]-实验室研究与探索 2013(11)