

教学讨论

马格努斯效应与空竹的下落运动

于凤军

(安阳师范学院 物理与电气工程学院 河南 安阳 455000)

摘要: 简单介绍马格努斯效应, 研究绕水平轴旋转的空竹的下落运动轨迹, 并与赤道附近的自由落体、水平磁场中带电球的下落运动对比.

关键词: 马格努斯效应; 空竹; 轨迹; 旋轮线

中图分类号: O 313.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2012) 09-0019-03

抖空竹是中老年人喜爱的运动之一. 当一个绕水平轴旋转的空竹由静止开始下落后, 它会沿铅直线运动吗? 如果不会, 其运动轨迹是什么? 本文研究这一问题. 讨论问题之前, 先简单介绍马格努斯效应.

1 马格努斯效应^[1 2]

当一个圆柱体绕自身轴线旋转并且有流体在垂直于该轴线方向流过时, 它会受到一个垂直于流动方向的横向力, 力的方向总是从来流方向与圆柱面上线速度是相反的那一边指向是相同的另一边^[2], 如图1(取自文献[1]). 这种现象于1852年由马格努斯(Magnus)发现, 称马格努斯效应. 这种效应曾由弗勒特纳(Flötner)^[2]大规模地用来制造风力驱动船舶(1924年), 即用几个快速转动的、两端封闭的铅直圆筒代替船帆(风筒船). 在实验室也可以观察这种效应. 把一个小直流电机驱动的旋转纸圆筒铅直地安装在轨道上的小车(或气垫导轨的滑块)

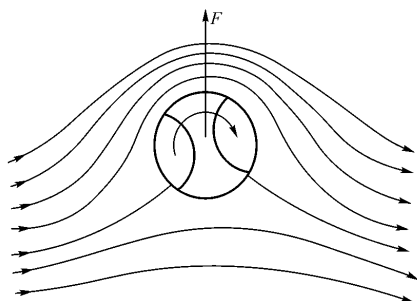


图1

上, 用台扇在轨道的垂直方向对着圆筒水平地吹风, 车子就会沿轨道运动. 若风的方向与轨道呈某一个适当的角度, 还可实现与帆船类似的逆风行走. 这种效应的根本原因是由于空气的黏滞作用在旋转的圆柱周围流体中产生环量 $\Gamma = \oint_C v_{\text{流}} \cdot d\mathbf{l}$, 与机翼的升力的产生机制类似. 对于细长的圆柱, 若其质心静止, 空气速度是 $v_{\text{气}}$, 密度 ρ , 圆柱周围流体的环量 Γ , 则单位长度上的升力是^[2]

$$F_{\text{升}} = \rho v_{\text{气}} \Gamma \quad (1)$$

当空气静止, 旋转的圆柱体在空气中作垂直于其轴线的运动时, 根据运动的相对性知道, 圆柱体同样会受到横向力, 上述升力公式中的 $v_{\text{气}}$ 应该是圆柱体质心的速度 v , 力方向的判断方法不变. 建立坐标系如图2. 图2中 x 轴沿水平方向, y 轴铅直向上, z 轴垂直纸面向外. 用 i, j, k 分别表示3个轴的单位向量. 设圆柱体的转动角速度 Ω 沿 k 方向, 质心速度

v 、半径 r 、长 h . 当 $h \gg r$ 时可以略去圆柱的端点效应. 这时由式(1)知圆柱体受的横向力大小 $F = \rho h v \Gamma$, F 的方向既垂直于 v , 又垂直于 Ω . 根据上述关于力方向的判断方法(注意: 圆柱体感受的来流方向与 v 相反) 可知, F 指向 $k \times v$ (或 $\Omega \times v$) 的方向, 故 F 可表示为如下形式:

$$F = \rho h \Gamma k \times v = \rho h \Gamma \left(\frac{\Omega}{\Omega} \right) \times v \quad (2)$$

对于旋转的空竹 $h \gg r$ 条件不满足, 我们假定

收稿日期: 2012-02-02; 修回日期: 2012-03-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11005003)

作者简介: 于凤军(1959—), 男, 河南安阳人, 安阳师范学院物理与电气工程学院教授, 主要从事理论物理、天体力学研究和教学工作.

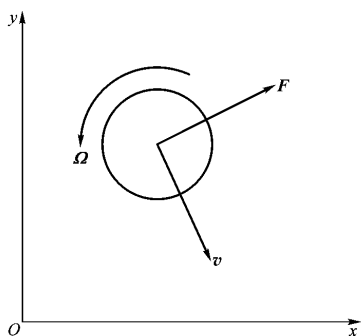


图2

横向力等于上式右边乘以一个无量纲的比例系数 η (当 $h \gg r$ 时, $\eta \rightarrow 1$). 由式(2)和图2可知, 当空竹由静止开始下落后将受到横向力的作用, 因而它不能沿铅直线下落.

2 空竹的下落轨迹

可以说在环流的建立过程中, 空气的黏滞作用是不可缺少的, 这种作用同时使空竹的转动变慢和在运动中产生阻力. 但是由于空竹从静止到落地这段时间较短且下落速度不大, 故我们在下面的讨论中把 Ω 近似看作常数(即设环量 Γ 不变), 并忽略空气阻力(因其相对于重力很小), 即仅考虑重力作用和马格努斯效应. 设空竹质量是 m , 由质心运动定理得

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \eta\phi h\Gamma \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (3)$$

将加速度 $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$, 重力加速度 $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$, 速度 $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ 代入式(3)得运动微分方程:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\eta\phi h\Gamma \dot{y} \\ m\ddot{y} = -mg + \eta\phi h\Gamma \dot{x} \end{cases} \quad (4)$$

令 $\omega = \eta\phi h\Gamma/m$, 引入辅助变量 $u = x + iy$, 其中 i 是虚数单位, $i^2 = -1$. 让式(4)两边除以 m 后, 其第二式两边乘以 i 并与第一式相加, 得

$$\ddot{u} = i\omega \dot{u} - ig \quad (5)$$

易知式(5)中 \dot{u} 的解为 $\dot{u} = Ae^{i\omega t} + g/\omega$. 积分得 u 的解: $u = Ae^{i\omega t}/(i\omega) + (g/\omega)t + B$. 其中 A, B 由初始条件决定. 设 $t=0$ 时 $x=0, y=0, \dot{x}=0, \dot{y}=0$, 故 $t=0$ 时 $u=0, \dot{u}=0$, 由此确定 $A = -g/\omega, B = -ig/\omega^2$, 于是

$$u = ig e^{i\omega t}/\omega^2 + (g/\omega)t - ig/\omega^2 \quad (6)$$

将 $u = x + iy$ 代入式(6)左边并比较两边的实部与虚部, 得

$$\begin{cases} x = (g/\omega^2)(\omega t - \sin \omega t) \\ y = -(g/\omega^2)(1 - \cos \omega t) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)既是空竹下落的运动方程又是其轨迹的参数方程. 如图3所示, 设想 Oxy 平面上 x 轴下方有一半径 $R = g/\omega^2$ 并与 x 轴相切的圆, $t=0$ 时切点 P 在原

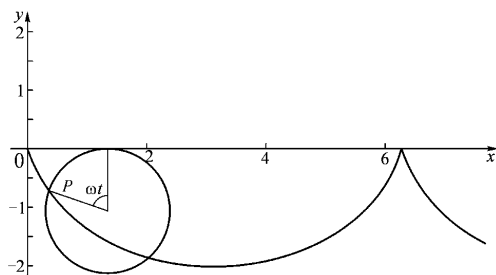


图3

点, 该圆以角速度 ω 沿 x 轴正向作无滑动滚动. 由几何关系知 P 点的轨迹方程恰好是方程(7). 这说明空竹下落的轨迹为一普通旋轮线或摆线^[3]. 当然由于下落高度的限制, 其轨迹只能是其中开始的一小段. 即使下落高度不受限制, 上述方程也仅对开始的一小段时间成立(原因是阻力).

下边找出空竹下落高度为 H 时, 偏离铅直线的距离. 当 $\omega t \ll 1$ 时 $\sin \omega t \approx \omega t - (\omega t)^3/3!$, $\cos \omega t \approx 1 - (\omega t)^2/2!$, 式(7)化为

$$\begin{cases} x = g\omega t^3/6 \\ y = -gt^2/2 \end{cases} \quad (8)$$

可见, 下落时间很短时, 空竹质心轨迹是半立方抛物线. 在铅直方向的运动仍具有自由落体运动的特点. 令 $y = -H$, 由式(8)得偏离距离

$$x = \frac{1}{6}\omega \sqrt{\frac{8H^3}{g}} \quad (9)$$

现在作数值估计. 由于黏滞作用使得紧贴圆柱面的流体线速度 $v_{\text{流}} = r\Omega$, 故得环量 $\Gamma = \oint_C v_{\text{流}} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r v_{\text{流}} = 2\pi r^2 \Omega$. $\omega = \eta\phi h\Gamma/m = 2\pi\eta r^2 \Omega \phi h/m$. 设 $h = 0.2 \text{ m}$, $r = 0.075 \text{ m}$, $\Omega = 50 \text{ s}^{-1}$, $m = 0.5 \text{ kg}$, $H = 1 \text{ m}$, 取 $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\rho = 1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, η 按 0.15 估计. 计算得 $\omega = 0.14 \text{ s}^{-1}$, $x = 0.02 \text{ m}$. 这里, 估算的主要困难是 η 没有实验数据支持.

3 联想与思考

自然界中有不少看似不同的物理现象具有相似的规律. 这种相似性往往使我们解决问题时能够事半功倍, 抓住事物的本质. 我们发现空竹的下落运动与考虑地球自转时赤道上的自由落体、水平磁场中带电球的下落运动相似. 例如文献[4]给出考虑地球自转(角速度 $\omega_{\text{地}}$)时抛射体的轨迹方程, 其中 y 轴取向东方向, z 轴取向上铅直方向, 令文献[4]的式(7)、式(9)中初速 $v_0 = 0$, 赤道纬度 $\lambda = 0$, 得

$$\begin{cases} y = [g/(2\omega_{\text{地}})^2](2\omega_{\text{地}}t - \sin 2\omega_{\text{地}}t) \\ z = -[g/(2\omega_{\text{地}})^2](1 - \cos 2\omega_{\text{地}}t) \end{cases} \quad (10)$$

从数学上讲, 式(10)与式(7)表示的轨迹相同, 即赤道上的自由落体轨迹也是部分旋轮线。

在图2坐标系中加上磁场, 令磁感强度 B 方向沿 z 轴正向, 让一个小球(带电量 $-q$, 质量 m) 在从原点从静止开始下落, 不考虑空气阻力, 其受力为 $mg - qv \times B = mg + qBk \times v$, 牛顿方程为

$$ma = mg + F = mg + qBk \times v \quad (11)$$

可以看出式(11)与式(3)形式上完全相同, 上式中若令 $\omega_{\text{磁}} = qB/m$, 则方程(11)的解与式(7)相同, 可见水平磁场中带电球的下落运动轨迹还是旋轮线。

上述3种力学系统的运动特征相同, 其根本原因是所受的力具有相同形式。马格努斯效应中的侧向力形式为 $F = \eta \rho h \Gamma k \times v$, 磁场中带电小球受的洛伦兹力形式为 $F_L = qBk \times v$, 赤道附近物体受的科里奥利力形式为 $F_C = 2mV \times \omega_{\text{地}} = -2m\omega_{\text{地}} \times V = 2m\omega_{\text{地}} k \times V$ (其中取 k 的方向(向南)与地球自转角速度 ω 相反)。显然, 上边的3个公式中除了 $k \times v$ 前边的常数符号不同外没有任何差别。

马格努斯效应不仅表现在空竹运动中, 在球类运动中更为明显, 如乒乓球的旋转技巧使运动员大显身手, 克敌制胜。原因是各种旋转使球的轨道变化

无穷。我们可以思考这样一个问题: 为什么多数球类竞技体育器材以及空竹都制作为空心的? 除了体育运动本身对重量的要求以外, 本文认为还有两点原因: 一是质量相同时空心球的转动惯量较大, 可以贮存较大的转动能以致保持较长的旋转时间; 二是可以提高上文中的参数 ω , 进而较大地改变原来的运动轨迹(参见式(8))。这是因为 $\omega = \eta \rho h \Gamma / m$, 质量相同时空心球的半径较大, 而环量 Γ 与半径的平方成正比(从量纲上可以判断这一点), 导致 ω 较大; 当球的半径确定后空心球的质量 m 较小, 也可以增大 ω 。

参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1995: 242.
- [2] L. 普朗特. 流体力学概论 [M]. 北京: 科学出版社, 1981: 76.
- [3] 数学手册编写组. 数学手册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1979: 394.
- [4] 于凤军. 抛射体运动方程的非近似解的一种求法 [J]. 大学物理, 1999, 18(7): 13.

Magnus effect and the motion of falling diabolo

YU Feng-jun

(College of Physics and Electrical Engineering, Anyang Normal University, Anyang, Henan 455000, China)

Abstract: Magnus effect is introduced simply and then the motion of falling diabolo which rotates on an horizontal axes is investigated. It is compared with the motion of falling body near the earth's equator and of falling charged ball in horizontal magnetic field.

Key words: Magnus effect; diabolo; locus; cycloid

(上接18页)

The general proof of completeness of eigenfunction of Hermitian operators

HOU Zhang-lin, HE Lin-li

(College of Physics and Electronic Information Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang 325035, China)

Abstract: Starting from a set of completed eigenfunctions, we build a phenomenological formula under the representation principle, and then the completeness of eigenfunction of the Hermitian operators is proved by reduction to absurdity. This set of completed eigenfunctions of mechanical quantities can be projected onto the eigenfunctions of operator space, which gives the general proof of completeness of eigenfunctions of operators.

Key words: eigenfunction of Hermitian operator; reduction to absurdity; completeness; general proof