

马格努斯效应的力学模型

潘慧炬 (浙江师范大学321004)

摘要 从伯努里方程出发,运用数学、力学推导,建立了马格努斯效应的力学模型。导出了马格努斯力的数学表达式,并进一步探讨了在此力作用下,旋转球体在空中飞行时的横向位移。

关键词 马格努斯效应;力学模型;马格努斯力;横向位移

高速旋转的球在空中飞行时其轨道会弯曲的现象称为马格努斯效应。这种现象在体育运动中是很常见的。如足球的“香蕉球”、排球的侧旋球、篮球投篮时的后旋球以及乒乓球、高尔夫球、棒球的旋转球等。在比赛中,由于球的旋转,使球体在空中飞行的轨迹产生变化,从而对运动员的判断能力提出更高的要求。因此对马格努斯效应的研究被广大运动生物力学工作者所关注,并作为运动器械流体力学中一项重要内容被编入运

动生物力学教科书(1)(2)(3)(4)(5)。然而,纵观上述文献,对马格努斯效应的解释基本上处于定性阶段,没有进行更深的定量研究。本文从伯努里方程出发,采用数学、力学推导,建立了马格努斯力的数学表达式,并进一步探讨了在此力作用下,旋转球在空中飞行的横向位移。

1 马格努斯力的数学力学推导

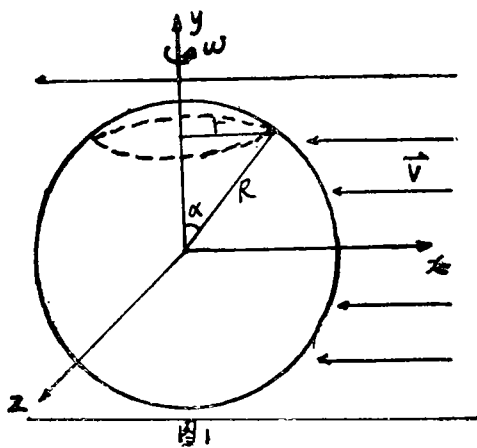


图1

1.1 马格努斯力的数学力学推导

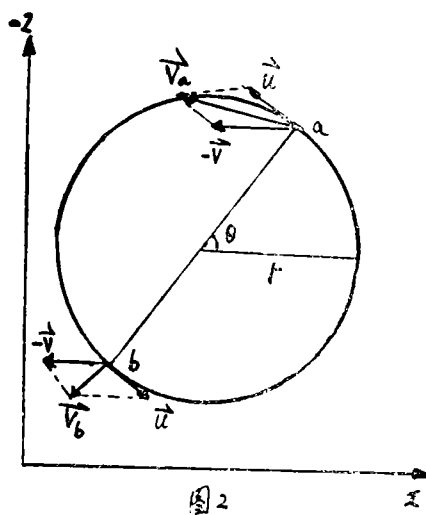


图2

如图1所示,半径为R的某球以速度为

\vec{v} (沿 X 轴正方向)、旋转角速度 ω 在空中飞行。根据运动相对性原理, 可以认为球只有旋转, 而气流则以速度为 $-\vec{v}$ (沿 X 轴的负方向) 相对球运动。

在球体上平行于 XOZ 平面取任一截面 S, 如图 2 所示, 则此截面的半径 r 可表示为:

$$r = R \sin \alpha \quad (1)$$

在面 S 的圆周上任取一点 a, 通过圆心对应圆周另一侧 b 点。球旋转时, 由于粘性效应将带动球边缘的气流运动, 其运动速度的大小可表示为:

$$u = Ar \omega \quad (2)$$

(2) 式中 A 为某一常数, 它与球表面特性及气流的内摩擦、粘滞性有关, 其值 $A \leq 1$ 。a 点气流的合速度大小 v_a 可用平行四边形法则求得:

$$\begin{aligned} v_a^2 &= v^2 + u^2 + 2u v \cos(90 - \theta) \\ &= v^2 + u^2 + 2u v \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

同理 b 点气流合速度的大小 v_b 为

$$\begin{aligned} v_b^2 &= v^2 + u^2 + 2u v \cos(90 + \theta) \\ &= v^2 + u^2 - 2u v \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

设 a、b 两点的压强分别为 P_a 、 P_b , 根据伯努里方程得:

$$P_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = P_b + \frac{1}{2} \rho v_b^2 \quad (5)$$

设 a、b 两点的压强差为 ΔP , 则

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_b - P_a = \frac{1}{2} \rho v_a^2 - \frac{1}{2} \rho v_b^2 \\ &= 2 \rho v u \sin \theta = 2 \rho A r \omega v \sin \theta \end{aligned} \quad (6)$$

压强差 ΔP 将在 b、a 两点圆弧上产生线压力 df

则 $df = \Delta p ds$

$$\therefore f = \frac{1}{2} \int \Delta p ds \quad (7)$$

采用正交分解法, 设为 f 在 x、-z 方向上的力分别为 f_x 、 f_{-z} ,

$$\text{则 } f_x = \frac{1}{2} \int \Delta p \cos \theta ds$$

$$\because ds = r d\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore f_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \rho A r^2 \omega v \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho A r^2 \omega v \sin^2 \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{同理 } f_{-z} = \frac{1}{2} \int \Delta p \sin \theta ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2 \rho A r^2 \omega v \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho A r^2 \omega v (\theta + \sin \theta \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi \rho A r^2 v \omega \end{aligned} \quad (9)$$

$$\therefore \vec{f} = \vec{f}_x + \vec{f}_{-z} = \vec{f}_{-z} \quad (10)$$

上述结果表明, 由于球的旋转带动球边缘气流运动, 使球两侧气流的速度不同而产生压强差。由此压强差引起的压力其总效果将对球产生一个垂直于气流方向的横向力 f_{-z} , 而沿气流方向上的作用效果为零。

下面讨论整个球体所受到的横向力 F, 只要对力在 y 方向沿球面积分便可得 F。

$$F = \int_0^\pi f R d\alpha = \int_0^\pi \rho A r^2 \omega v \pi R d\alpha \quad (11)$$

将 (1) 式代入 (11) 式得:

$$F = \int_0^\pi \rho A r^2 \omega v \pi R^3 \sin^2 \alpha d\alpha$$

$$= \rho A \omega v \pi R^3 \frac{a + \sin \alpha \cos \alpha}{2} \Big|_{r_0}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \rho A R^3 \omega v \quad (12)$$

(12)式所得横向力亦即通常所称马格努斯力。计算结果表明,马格努斯力的大小与球在流体中飞行的瞬时速度 v 、球旋转的角速度 ω 、球半径以及流体的密度 ρ 、流体与球面间的粘性有关。

综上所述,高速旋转的球体在流体中飞行将受到垂直于气流方向的横向力的作用,球体产生横向位移,改变了原来的运动轨迹。这就是马格努斯效应。

1.2 横向位移的计算

球体在横向力 F 的作用下产生横向位移,而力 F 又与球同流体的瞬间相对速度有关,因此,必须首先解决球在 t 时刻的瞬时速度问题。

设球以初速度 V_0 在流体中运动,在流体阻力的作用下,其球速将逐渐减小。根据动力学方程:

$$-\frac{1}{2}c \rho s v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (13)$$

(13)式中, m 为球体的质量, ρ 为流体密度, s 为球的最大截面积 ($s = \pi R^2$), c 为阻力系数。

令:

$$k_1 = \frac{c \rho s}{2m} = \frac{c \rho \pi R^2}{2m}$$

则(13)式变为:

$$-k_1 v^2 = \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

(对14)积分得:

$$-k_1 t = -\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}$$

$$\therefore v = \frac{1}{k_1 t + 1/v_0} \quad (15)$$

(15)代入(12)式:

$$F = k_2 \frac{1}{k_1 t + 1/v_0}$$

$$(\text{令 } k_2 = \frac{1}{2} \pi^2 \rho A \omega R^3) \quad (16)$$

设球在力 F 的作用下产生的横向位移为 Z , 横向位移速度为 v_z , 由动力学方程得:

$$F = mZ = m \frac{dv_z}{dt} \quad (17)$$

(16)式代入(17)式得:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{k_2}{m(k_1 t + 1/v_0)} \quad (18)$$

(18)式进行积分:

$$v_z = \frac{k_2}{mk_1} \ln(k_1 t + \frac{1}{v_0}) + C$$

当 $t = 0$ 时, $v_z = 0$ 。则:

$$C = -\frac{k_2}{mk_1} \ln \frac{1}{v_0}$$

$$v_z = \frac{k_2}{mk_1} \ln(k_1 t + \frac{1}{v_0})$$

$$-\frac{k_2}{mk_1} \ln \frac{1}{v_0} = \frac{k_2}{mk_1} \ln(k_1 v_0 t + 1)$$

$$(19)$$

$$\therefore v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = \frac{k_2}{mk_1} \ln(k_1 v_0 t + 1)$$

$$(20)$$

对(20)式积分:

$$z = \int \frac{k_2}{mk_1} \ln(k_1 v_0 t + 1) dt$$

$$= \frac{k_2}{mk_1^2 v_0} \{ (k_1 v_0 t + 1) \ln(k_1 v_0 t + 1) - (k_1 v_0 t + 1) \}$$

$$-(k_1 v_0 t + 1)\} + c \text{ 当 } t = 0 \text{ 时,}$$

$$z = 0$$

$$\therefore c = \frac{k_2}{mk_1^2 v_0}$$

$$\text{则 } z = \frac{k_2}{mk_1^2 v_0} [(k_1 v_0 t + 1)$$

$$\ln(k_1 v_0 t + 1) - k_1 v_0 t]$$

$$= \frac{2m\omega A}{c^2 R \rho v_0} [(k_1 v_0 t + 1)$$

$$\ln(k_1 v_0 t + 1) - k_1 v_0 t] \quad (21)$$

(21)式表明, 旋转球体在流体中飞行, 在马格努斯力的作用下, 将产生横向位移, 使球在流体中运动的轨迹呈曲线。横向位移的大小与球的初速度 v_0 , 球在空中飞行的时间 t 、球的质量 m 、半径 R 以及流体的密度、粘性、阻力系数等有关。

2 结果讨论

用实例验证(21)式的推导结果。北京体院硕士生吴天伦对我国优秀女排运动员崔咏梅跳发侧旋球技术进行研究, 用高速摄影机拍摄, 经过影片解析后得如下的数据: 崔咏梅发球的初速度 $v = 21.53 \text{ m/s}$, 球在空中飞行的时间 $t = 0.86 \text{ s}$, 测得球的横向位移为 1.84 m 。若取阻力系数 $c = 0.3$, 空气的密度 $\rho = 0.129 \text{ kg/m}^3$, 系数 $A = 1$, 球的旋转速度 $\omega = 12 \text{ 周/秒} = 79.4 \text{ rad/s}$ 。根据排球规则, 排球的质量 $m = 260 - 270 \text{ g}$, 取中间值 $m = 265 \text{ g}$, 球的半径 $R = 0.11 \text{ m}$ 。

将上述数据代入(21)式, 可得球的横向位移为 $z = 1.88 \text{ m}$, 计算结果与实际相吻合

利用(12)、(21)式所得结果在电子

计算机上处理后, 可模拟旋转球体在空中飞行的轨迹。这种方法具有较大的应用价值, 能为教学、运动训练提供一种直观的教学手段。

3 结论

3.1 本文建立了马格努斯效应的力学模型。

3.2 马格努斯力与球在流体中运动的瞬时速度、球旋转的角速度、球的半径及流体的密度、粘性有关。

3.3 旋转球体在空中运动受马格努斯力作用所产生的横向位移与球的初速度, 旋转角速度、球在空中飞行的时间、球的质量、半径以及流体的密度、流体对球的阻力系数、粘性有关。

3.4 利用本文结果, 可在计算机上模拟旋转球体在空中飞行轨迹, 具有较大的应用价值。

参考文献

1. 詹姆斯·海, 运动技术生物力学, 北京体院编译室, 1931
2. 高师教材编写组, 运动生物力学, 高等教育出版社, 1938
3. 李良标, 运动生物力学, 北京体院出版社, 1991
4. 马和中, 生物力学导论, 北京航空学院出版社, 1986
5. 浅见俊雄等, 身体运动学概论, 成都科技大学出版社, 1990
6. 程时矗等, 运动数学, 江苏体育科学编辑部, 1988
7. 吴天伦, 排球跳发侧旋球特点分析, 中国体育科学, 92, 3

责任编辑 过东升

Mechanical Model of Magnus Effect

Pan Huiju

ABSTRACT Using mechanical theories, this article established the mechanical model of Magnus effect. Starting from the Bernoulli equation, we got the math model of the Magnus force through derivation and calculation. Besides, the quantitative formula of calculation of lateral displacement when the rotating globe body flies in the sky with Magnus force was also discussed.

KEYWORDS Magnus Effect, Mechanical Model, Lateral Displacement

Study of the Effect of External Counterpulsation on Hemodynamics in Athletes

Zheng Yanlan

ABSTRACT 12 athletes were randomly divided into two groups (experimental and control group), 6 in experimental groups were performed external counterpulsation (ECP) for two weeks (10 times, each time for 40') and hemodynamic index were determined pre and after ECP. At the same time, 6 in control group were also determined. The results showed some good hemodynamic responses; Cardiac output was higher, VPE was increased, total peripheral resistance was decreased and micro cycle function was improved.

KEYWORDS External Counterpulsation, Hemodynamics, Sports Fatigue

The Effect of Exercises to Women's Reaction time

Mao Yiping et al.

ABSTRACT This paper studied Reaction Time and Heart Rate (HR) of some girl students in Dept. of Physical Education. The relationship between them and its biological significance were also discussed. The results showed that suitable sports load can make the neuromuscular system in a good condition and keep a high agility and coordination increase the ability of adjusting.

KEYWORDS Reaction Time, Sports Load, HR