

# 非线性马格努斯力矩 对弹丸运动的影响

董 亮

摘 要

本文详细地讨论了非线性马格努斯力矩对弹丸运动的影响,给出了在非线性的马格努斯力矩作用下五种稳定运动条件,这些条件不仅与各气动力、力矩有关,而且也与运动初始条件有关。本文给出的稳定条件可以用来分析某些榴弹飞行不稳定现象,给出的非线性马格努斯力矩作用下的弹丸运动的攻角解析解,可以为室内靶道测试气动力系数提供理论模型。

## 符 号 表

$\rho$	空气密度
$d$	弹 径
$l$	弹 长
$m$	弹的质量
$J_x$	极转动惯量
$J_y$	赤道转动惯量
$n = J_y/J_x$	
$s$	特征面积,弹道弧长
$c'_y$	升力系数对攻角的偏导数
$m'_x$	俯仰力矩系数对攻角的偏导数
$m'_{xch}$	赤道阻尼力矩系数对攻角及其角速度的偏导数
$m''_{ym0}$	马格努斯力矩系数对攻角 $\alpha$ 和 $\left(\frac{l\dot{\tau}}{v}\right)$ 的偏导数在 $\alpha=0$ 的值
$b_2$	马格努斯力矩非线性系数
$a_n = \rho s c'_y / 2m$	
$a_m = \rho s l m'_x / 2J_y$	
$a_d = \rho s l^2 m'_{xch} / 2J_y$	
$a_u = \rho s l^2 m''_{ym0} / 2J_y$	
$\alpha =  \Delta $ 攻角	
$\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2$ 复攻角	
$\Delta_1$	稳定平衡状态时攻角
$\tau$	转角

$\dot{\tau}$  转速

$v$  弹速

$\kappa = \dot{\tau}/v$  转速比

$S = \kappa^2/4n^2 a_m$  对涡轮式弹丸为陀螺稳定因子

$\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{S}}$  对涡轮式弹丸  $\tau < 1$ , 对尾翼式弹丸  $\tau > 1$ 。

$P = \kappa/n$

$H = a_s + a_d$

$M = a_m$

$T_0 = a_s + na_s$

$T_2 = nb_2 a_s = T_0 b_2$

$S_d = \frac{2T_0}{H} - 1$  动稳定因子

$\lambda_{10}$  线性快进动阻尼指数

$\lambda_{20}$  线性慢进动阻尼指数

$\lambda_1$  快进动阻尼指数

$\lambda_2$  慢进动阻尼指数

$\omega_1$  快进动圆频率

$\omega_2$  慢进动圆频率

$\lambda$  攻角变化周期 (或波长)

$\lambda^* = T_2/\tau$

$K_{1d} = \lambda_{10}/\lambda^*$

$K_{2d} = \lambda_{20}/\lambda^*$

$i = \sqrt{-1}$

## 一、前言

我们知道, 马格努斯力矩对弹丸运动有着重要的影响, 在[1]中我们讨论了线性马格努斯力矩对弹丸运动稳定性影响, 并给出了稳定性判据, 但是非线性马格努斯力矩对弹丸运动又有什么影响呢? [7]中指出5英寸弹丸按线性稳定性理论判定是不稳定的, 但是实际飞行确是稳定的。通过自由飞行遥测试验, 发现该弹存在严重的非线性马格努斯力矩, 文章中虽然提到这可能与非线性马格努斯力矩有关, 但没有从理论上阐明弹丸运动稳定的原因。本文理论可以解决这个问题。

本文应用克雷洛夫—包戈留包夫渐近方法(参见[10], [9]), 求出弹丸复攻角微分方程的近似解析解, 然后建立振幅微分方程, 利用微分方程定性理论研究该系统的全局结构, 给出了五种稳定运动条件 (这是[6]中所没有的), 这些条件不仅与各气动力、力矩大小有关,

也与运动的初始条件有着密切关系。

本文指出在非线性马格努斯力矩作用下弹丸可以存在三种稳定平衡运动状态：一是攻角逐渐衰减，以零为极限；二是以圆形式运动；三是攻角以旋轮线形式运动。用数值积分法证实了上述结论。

本文分别给出涡轮式弹丸、尾翼式弹丸三种稳定平衡状态的典型攻角曲线，根据这些曲线可以判定室内靶道测试的弹丸运动（攻角）是属于何类型运动，然后根据相应的攻角解析式，就可以确定非线性马格努斯力矩系数及其它气动力系数。

## 二、运动方程及其解

当攻角大于 $5^\circ \sim 10^\circ$ （不同弹丸该值是不同的），各气动力、力矩与攻角呈现为非线性关系，但是阻力、升力和阻尼力矩的非线性程度较弱，对弹丸运动稳定性影响较小，所以这些力、力矩可取为线性形式。[2]中指出非线性恢复力矩仅影响弹丸运动的周期，所以，为了着重研究非线性马格努斯力矩对弹丸运动的影响，也把恢复力矩取为线性形式。

非线性马格努斯力矩可取作如下形式：

$$M_y = \frac{1}{2} \rho v^2 s l \left( -\frac{\dot{l}_r}{v} \right) m''_{y m_0} (1 + b_2 \alpha^2) \Delta$$

式中 $\alpha^2 = |\Delta|^2$ 。根据[1]、[3]可以得到如下攻角微分方程：

$$\Delta'' + (H - iP)\Delta' - (M + iP(T_0 + T_2 \alpha^2))\Delta = 0 \quad (2-1)$$

应用克雷洛夫—包戈留包夫渐近方法，参见[10]，[9]、[5]，可以得到（2—1）方程的解：

$$\Delta = K_1 e^{i\varphi_1} + K_2 e^{i\varphi_2} \quad (2-2)$$

$$\text{式中 } K_{1,2} = K_{1,20} e^{\lambda_{1,2} t} \quad (2-3)$$

$$\phi_{1,2} = \omega_{1,2} t + \varphi_{1,20}$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda^* (K_1^2 + 2K_2^2) \quad (2-4)$$

$$\lambda_2 = \lambda_{20} - \lambda^* (2K_1^2 + K_2^2) \quad (2-5)$$

$$\lambda_{10} = -\frac{H}{2} \left( 1 + \frac{S_d}{\tau} \right) \quad (2-6)$$

$$\lambda_{20} = -\frac{H}{2} \left( 1 - \frac{S_d}{\tau} \right) \quad (2-7)$$

$$\lambda^* = T_2 / \tau \quad (2-8)$$

$$\omega_1 = P(1 + \tau) / 2 \quad (2-9)$$

$$\omega_2 = P(1 - \tau) / 2 \quad (2-10)$$

### 三、稳定运动条件

若保证弹丸运动是稳定的, 则要求 $\lambda_{1,2} \leq 0$ , 当 $T_2 = 0$ 时, 从(2—4)和(2—5)二式, 可得线性稳定条件:

$$|S_d| \leq \tau \quad (3-1)$$

当 $T_2 \neq 0$ 时, 直接从(2—4)和(2—5)二式很难得出什么具体结果。为此, 我们采用[6]振幅平面分析方法, 讨论其稳定性。

从(2—3)式可得:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1^2}{ds} &= 2\lambda_1 K_1^2 \\ &= 2K_1^2 (\lambda_{10} + \lambda^* (K_1^2 + 2K_2^2)) \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_2^2}{ds} &= 2\lambda_2 K_2^2 \\ &= 2K_2^2 (\lambda_{20} - \lambda^* (2K_1^2 + K_2^2)) \end{aligned} \quad (3-3)$$

这两个式子表示攻角二个分运动幅值 $K_1, K_2$ 变化情况, 因而把这两个式子称为振幅方程。若以 $OK_1^2, OK_2^2$ 分别为笛卡尔坐标系的两个坐标轴, 则 $OK_1^2 K_2^2$ 平面为振幅平面。研究弹丸运动稳定性转化为研究(3—2)、(3—3)微分方程组解的稳定性。该方程组的稳定性取决于它的积分曲线全局结构, 这包括极限环分布, 奇点性质和过奇点的分界线。

由[5]第五篇第二章§1的定理, 可知(3—2)、(3—3)系统无极限环, 现在讨论后两点。

为讨论问题方便, 引入下列记号,

$$K_{1g} = \lambda_{10} / \lambda^* \quad (3-4)$$

$$K_{2g} = \lambda_{20} / \lambda^* \quad (3-5)$$

$$f_1(K_1^2, K_2^2) = 2\lambda^* K_1^2 (K_{1g} + K_1^2 + 2K_2^2) \quad (3-6)$$

$$f_2(K_1^2, K_2^2) = 2\lambda^* K_2^2 (K_{2g} - 2K_1^2 - K_2^2) \quad (3-7)$$

则(3—2), (3—3)二式变成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_1^2}{ds} &= f_1(K_1^2, K_2^2) \\ \frac{dK_2^2}{ds} &= f_2(K_1^2, K_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

(3—8)系统有四个初等奇点:

$$R_1(0, 0), R_2(0, K_{2g}), R_3(-K_{1g}, 0) \text{ 和 } R_4\left(\frac{K_{1g} + 2K_{2g}}{3}, -\frac{2K_{1g} + K_{2g}}{3}\right)。$$

在奇点处特征方程定义为(参见[5]);

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial K_1^2} - h & \frac{\partial f_1}{\partial K_2^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial K_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial K_2^2} - h \end{vmatrix}_{(K_1^2, K_2^2)} \equiv h^2 + ph + q = 0 \quad (3-9)$$

式中  $p = - \left( \frac{\partial f_1}{\partial K_1^2} + \frac{\partial f_2}{\partial K_2^2} \right)_{(K_1^2, K_2^2)}$

$$q = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial K_1^2} & \frac{\partial f_1}{\partial K_2^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial K_1^2} & \frac{\partial f_2}{\partial K_2^2} \end{vmatrix}_{(K_1^2, K_2^2)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial K_1^2} = 2\lambda^*(K_{1q} + 2K_1^2 + K_2^2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial K_2^2} = 4\lambda^*K_1^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial K_1^2} = -4\lambda^*K_2^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial K_2^2} = 2\lambda^*(K_{2q} - 2K_1^2 - K_2^2)$$

角标  $(K_1^2, K_2^2)$  表示各奇点的坐标值, 以  $p_i, q_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 表示  $p, q$  在各奇点之值。经计算有

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p = -2\lambda^*(K_{1q} + K_{2q})$$

$$q_1 = 4(\lambda^*)^2 K_{1q} \cdot K_{2q}$$

$$q_2 = -4K_{2q}(K_{1q} + 2K_{2q}) \cdot (\lambda^*)^2$$

$$q_3 = -4K_{1q}(2K_{1q} + K_{2q}) \cdot (\lambda^*)^2$$

$$q_4 = -\frac{4}{3}(\lambda^*)^2 (K_{1q} + 2K_{2q})(2K_{1q} + K_{2q})$$

各奇点性质可用下列法则判别:

1.  $q_i < 0$ , 该奇点为鞍点;
2.  $q_i \geq 0, p_i > 0, p_i^2 - 4q_i \geq 0$ , 该奇点为稳定结点;
3.  $q_i > 0, p_i > 0, p_i - 4q_i < 0$ , 该奇点为稳定焦点;
4.  $q_i > 0, p_i < 0, p_i - 4q_i < 0$ , 该奇点为不稳定焦点;
5.  $q_i \geq 0, p_i < 0, p_i - 4q_i \geq 0$ , 该奇点为不稳定结点;
6.  $q_i > 0, p_i = 0$ , 是该奇点为中心的必要条件。

由于我们目的是寻求弹丸运动的稳定条件, 所以下面只给出稳定奇点的条件。

$R_1$  是稳定结点的充要条件为:

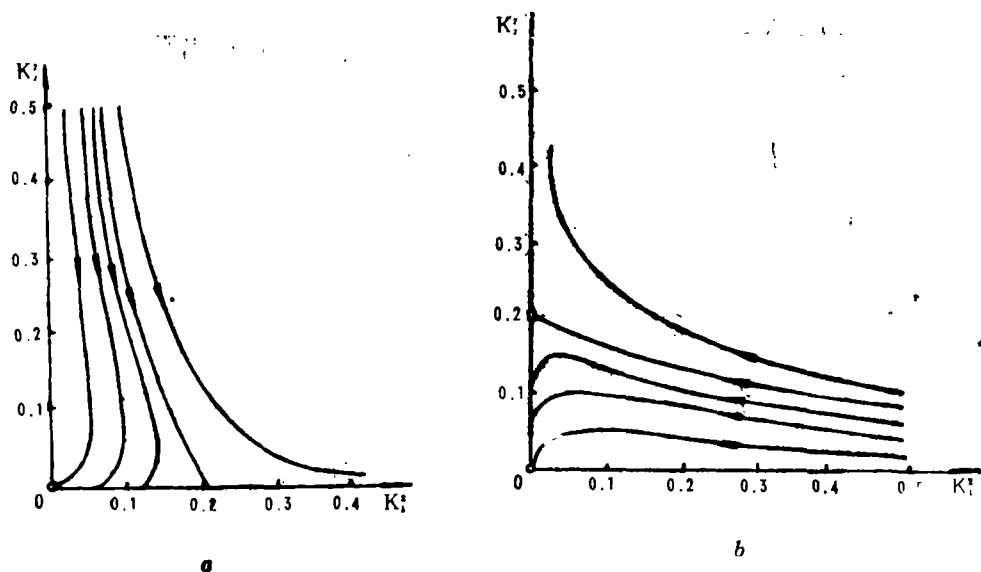
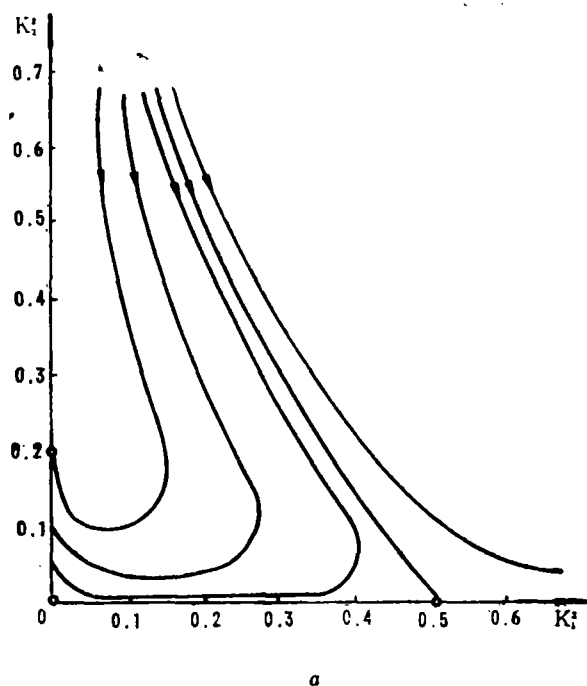


图 1 座标原点为稳定结点时振幅曲线 (注)



$$\left. \begin{array}{l} \lambda^* > 0 \\ K_{1g} < 0 \\ K_{2g} < 0 \end{array} \right\} \quad (3-10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{或 } \lambda^* < 0 \\ K_{1g} > 0 \\ K_{2g} > 0 \end{array} \right\} \quad (3-11)$$

它们的振幅曲线分别如图1-a, b所示。

$R_2$ 为稳定结点的充要条件为:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^* > 0 \\ K_{2g} > 0 \\ K_{1g} \leq 2K_{2g} \end{array} \right\} \quad (3-12)$$

振幅曲线如图2-a所示。

$R_3$ 为稳定结点的充要条件为:

注: 图中空心点表示奇点, 箭头指向为积分曲线方向。

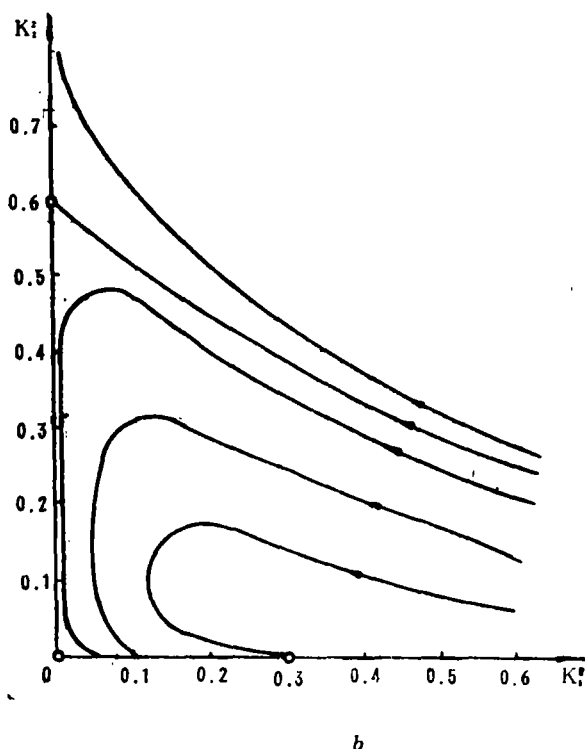


图 2. 坐标轴上奇点为稳定结点时振幅曲线

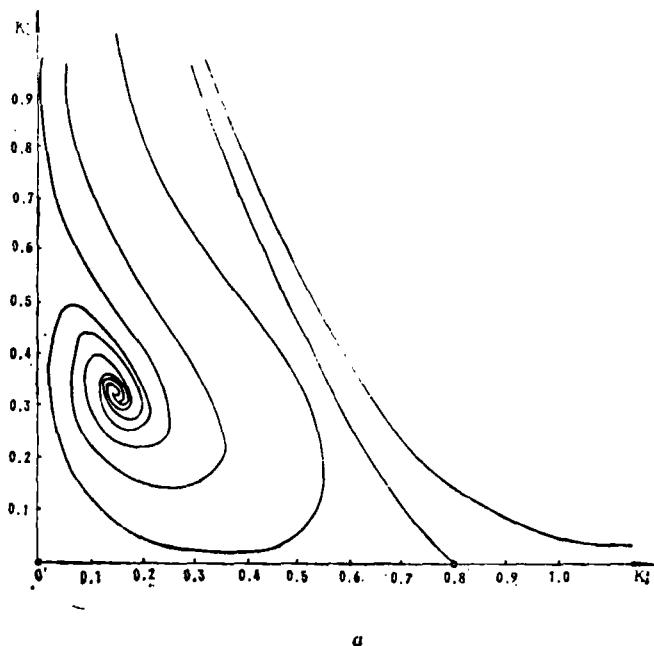


图 3 第 I 象限内奇点为稳定奇点时振幅曲线

$$\left. \begin{aligned} \lambda^* &< 0 \\ K_{1q} &< 0 \\ K_{2q} &\geq -2K_{1q} \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

振幅曲线如图2-b所示。

$R_4$ 为稳定焦点的充要条件为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^* &> 0 \\ K_{1q} &< 0 \\ K_{2q} &> 0 \\ K_{1q} + K_{2q} &< 0 \\ 11K_{1q} + 20K_{2q} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{或 } \lambda^* &< 0 \\ K_{1q} &< 0 \\ K_{2q} &> 0 \\ K_{1q} + K_{2q} &> 0 \\ 11K_{1q} + 6K_{2q} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

振幅曲线如图3-a, b<sub>1</sub>所示。

$R_4$ 为稳定结点的充要条件为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^* &< 0 \\ K_{1q} &< 0 \\ 11K_{1q} + 6K_{2q} &\geq 0 \\ 2K_{1q} + K_{2q} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

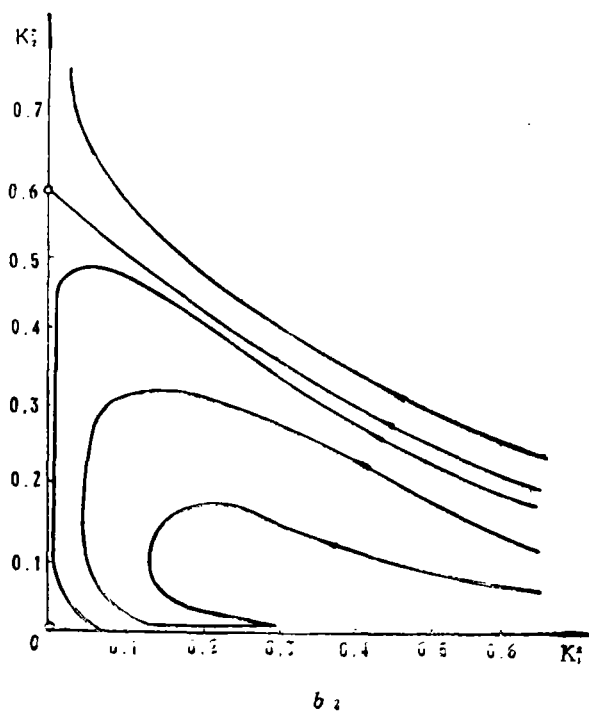
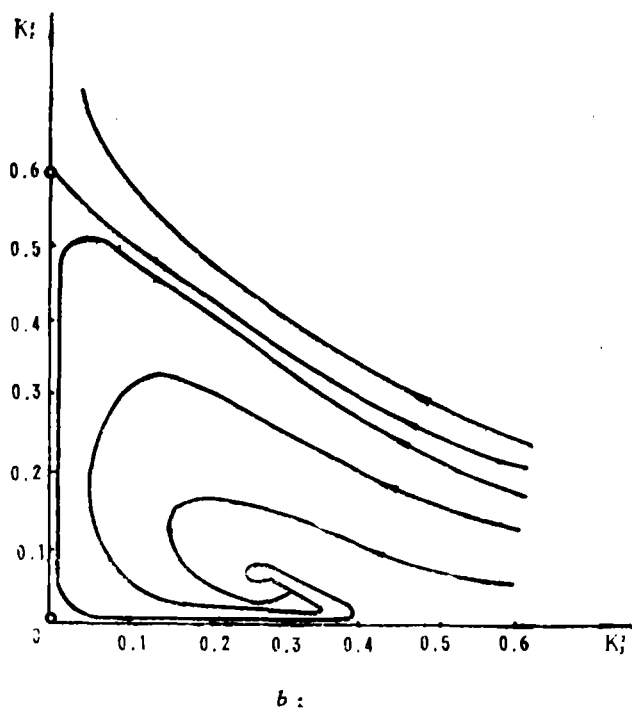
振幅曲线如图3-b<sub>2</sub>所示。

$R_4$ 为中心的必要条件为:

$$\left. \begin{aligned} K_{1q} + K_{2q} &= 0 \\ K_{1q} &< 0 \\ K_{2q} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

振幅曲线如图 4 所示。

当(3—8)系统具有中心型奇点时,该系统将是结构不稳定系统(见[5]第五篇一章§2),即(3—8)系统中参数 $K_{1q}$ 、 $K_{2q}$ 略有改变,就会破坏(3—17)式中第一个条件,





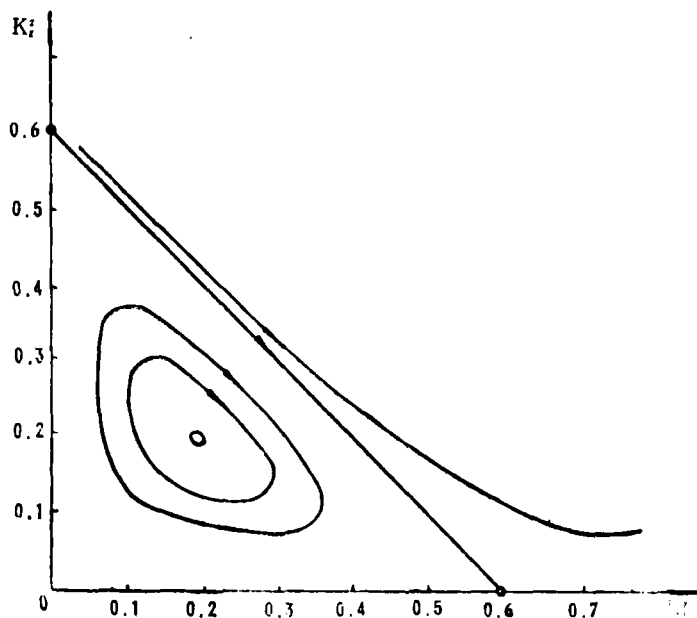


图4 中心型奇点的振幅曲线

意味着运动是不稳定的。所以, 没有必要研究中心型奇点情况。

根据 $K_{1s}$ ,  $K_{2s}$ 可改写和 $\lambda^*$ 的定义式, 前述各奇点稳定条件可改写成:

$R_1$ 为稳定结点条件:

$$|S_d| < \tau \quad (3-18)$$

$R_2$ 为稳定结点条件:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &> 0 \\ -3\tau < S_d < -\tau \end{aligned} \right\} (3-19)$$

$R_3$ 为稳定结点条件:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &< 0 \\ \tau < S_d < 3\tau \end{aligned} \right\} (3-20)$$

$R_4$ 为稳定焦点条件:

$$\left. \begin{aligned} T_2 &> 0 \\ S_d &< -3\frac{4}{9}\tau \end{aligned} \right\} (3-21)$$

与

$$\left. \begin{aligned} T_2 &< 0 \\ 3\frac{2}{5}\tau < S_d \end{aligned} \right\} (3-22)$$

$R_4$ 为稳定结点条件

$$\left. \begin{aligned} T_2 < 0 \\ 3\tau < S_d < 3\frac{2}{5}\tau \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

(3-22) 式与 (3-23) 式可合并写成:

$$\left. \begin{aligned} T_2 < 0 \\ 3\tau < S_d \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

从 (3-19) 和 (3-21) 二式可以看出  $S_d$  在一个很小范围

$$\left. \begin{aligned} T_2 > 0 \\ -3\tau < S_d < -3\frac{4}{9}\tau \end{aligned} \right\}$$

稳定性是不清楚的, 在上式条件下, 用数值积分 (2-1) 式, 结果是稳定的。这是由于克雷洛夫—包哥留博夫渐近方法带来的误差, 所以可把 (3-21) 条件改为

$$\left. \begin{aligned} T_2 > 0 \\ S_d < -3\tau \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

根据 (3-18), (3-19), (3-20), (3-24) 和 (3-25) 五种稳定条件在  $0-S_d\tau$  平面绘出弹丸运动的稳定区域 (见图5)。

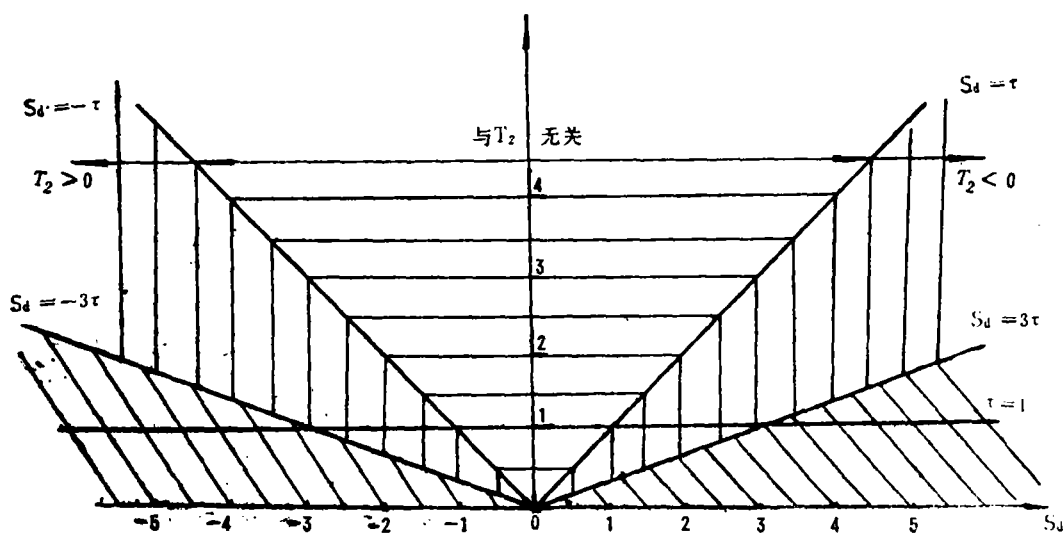


图 5 非线性马格努斯力矩作用下弹丸运动稳定区域

在直线  $\tau=1$  之上区域为尾翼弹稳定区域, 在  $\tau=1$  之下为涡轮弹稳定区域, 左半平面为慢进动稳定区域, 右半平面为快进动稳定区域。在  $S_d = \pm\tau$  两条直线之间区域是与  $T_2$  无关的稳定区域, 和线性动稳定区域相同。

由[1]知, 尾翼弹易发生慢进动不稳定 ( $S_d < -\tau$ ), 涡轮弹易发生快进动不稳定 ( $S_d > \tau$ ),

所以在  $S_d = -\tau$  直线之下区域为尾翼弹在非线性马格努斯力矩作用下稳定区域, 在  $S_d = \tau$  直线之下区域为涡轮弹在非线性马格努斯力矩作用下稳定区域。

我们从 (3—8) 式或图 1, 2, 3 可以看出, 这些振幅曲线不仅与气动参数  $K_{1q}$ ,  $K_{2q}$ ,  $\lambda^*$  有关, 也与 (3—8) 式初始条件  $K_{10}$ ,  $K_{20}$  有关。各图中过奇点的积分曲线表示稳定与不稳定的分界线。具有过大的初始条件的弹丸即使满足前述某个稳定条件, 也将发生不稳定运动。因此, 运动的初始条件大小对非线性系统的稳定性是有决定性影响。这样, 很有必要确定这条分界线的位置, 但是目前还不能准确找出如同 (3—8) 系统的分界线。下面根据计算结果, 近似地给出确定分界线的方法。

在图 1 到图 3 中三个  $a$  图中,  $T_2$  均大于零, 其分界线形状很类似, 分界线上奇点坐标均与  $K_{1q}$  有关,  $K_{2q}$  大小只影响分界线的弯曲程度。

根据各  $a$  图中  $K_{2q}$  可能取值范围, 我们计算了  $K_{2q}$  对分界线的影响 (结果见图 6-a)。结果表明, 当  $K_{2q} = -K_{1q}$  时, 分界线位置最低, 该分界线为一条直线

$$K_2^2 + K_1^2 + K_{1q} = 0$$

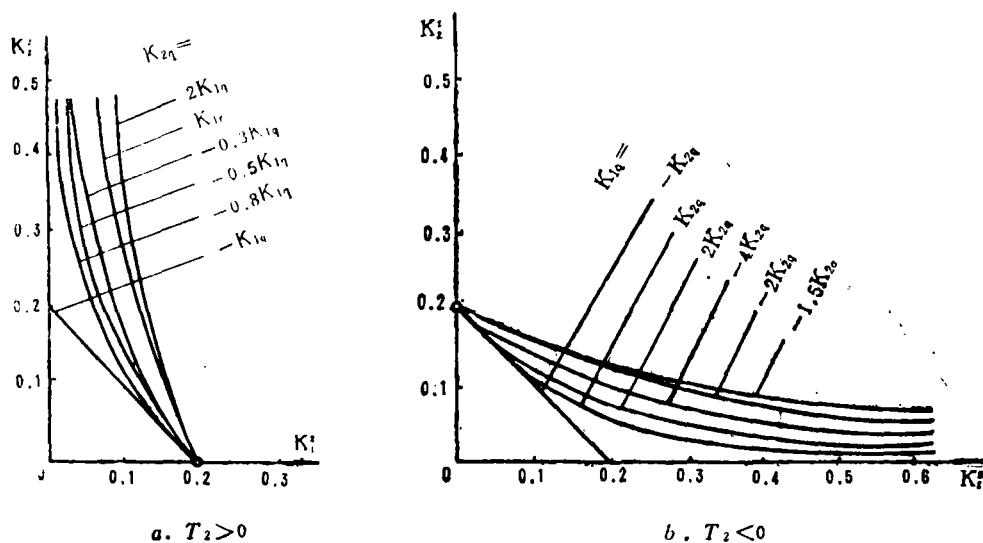


图 6 气动参数对分界线影响

如果初始条件  $s = s_0$ ,  $K_1^2 = K_{10}^2$ ,  $K_2^2 = K_{20}^2$  满足

$$K_{20}^2 + K_{10}^2 + K_{1q} \leq 0 \quad (3-26)$$

不等式, 则可认为在 (3—18) 或 (3—19) 或 (3—25) 条件下, 弹丸运动才是稳定的。

与此相类似, 在三个  $b$  图中,  $T_2$  均小于零,  $K_{1q}$  对分界线影响见图 6-6。在 (3—18) 或 (3—20) 或 (3—24) 条件下, 若初始条件满足

$$K_{20}^2 + K_{10}^2 - K_{2q} \leq 0 \quad (3-27)$$

不等式, 则可判定弹丸运动是稳定的。

弹丸运动的初始条件一般以 $\Delta_0, \Delta'_0$ 形式给出, 当忽略较小的气动力 $H, T_0$ , 则由(2-2)式可近似确定 $K_{10}$

$$K_{10} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}} \sqrt{|\Delta_0|^2 + \left| \frac{\Delta'_0}{\omega_2} \right|^2 + \frac{2}{\omega_2} (\Delta_{02} \Delta'_{01} - \Delta_{01} \Delta'_{02})} \quad (3-28)$$

$$K_{20} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}} \sqrt{|\Delta_0|^2 + \left| \frac{\Delta'_0}{\omega_1} \right|^2 + \frac{2}{\omega_1} (\Delta_{02} \Delta'_{01} - \Delta_{01} \Delta'_{02})} \quad (3-29)$$

式中  $\Delta_0 = \Delta_{01} + i\Delta_{02}$

$$\Delta'_0 = \Delta'_{01} + i\Delta'_{02}$$

把 $K_{10}, K_{20}, K_{1q}, K_{2q}$ 分别代入(3-26), (3-27)二式, 可得:

$$\begin{aligned} & \left[ 2\Delta_0^2 + |\Delta'_0|^2 \left( \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) + (2\Delta_{02}\Delta'_{01} - \Delta_{01}\Delta'_{02}) \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \right] \\ & \leq \frac{H(\tau - S_d)}{2T_2} \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3-30)$$

$$\begin{aligned} & \left[ 2\Delta_0^2 + |\Delta'_0|^2 \left( \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \right) + 2(\Delta_{02}\Delta'_{01} - \Delta_{01}\Delta'_{02}) \left( \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) \right] \\ & \leq \frac{-H(\tau + S_d)}{2T_2} \left( 1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3-31)$$

(3-30)式对应着 $T_2 > 0$ 情况, (3-31)式对应着 $T_2 < 0$ 情况, 显然这两个不等式——对运动初始条件的限制是弹丸稳定运动的必要条件。

例如图7情况(计算参数见附录),  $S_d = -2$ ,  $\tau = 3.6$ 是满足稳定条件(3-18)式的。

当 $\alpha_0 = 0.8$ 时, (3-30)式左端为:

$$2\Delta_0^2 = 1.28$$

右端为:

$$\frac{0.0038(3.6 + 2)}{2 \times 0.03} \left( 1 + \frac{0.033}{0.059} \right)^2 = 0.87$$

所以 $\alpha_0 = 0.8$ 已超过稳定分界线了, 运动将是不稳定, 如图7所示。

图9-a的计算参数除把初始条件改为 $\Delta'_0 = 4 \times 10^{-4}$ 外, 其余同图7, 此时, (3-30)式左端值为 $1.9 \times 10^{-4}$ , 小于其右端值, 运动是稳定的。因此, 在非线性马格努斯力矩作用下, 弹丸受到较大的扰动, 易发生运动不稳定现象。

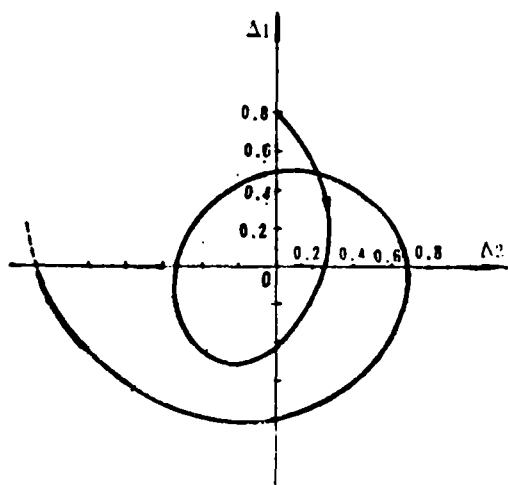


图7 初始条件超过稳定界线的攻角曲线

## 四、运动稳定性分析

上述的五种稳定运动条件,都与马格努斯力矩的非线性系数 $T_2$ 的符号有关,如果改变 $T_2$ 的符号,就意味着运动是不稳定的。因为它的符号,决定了非线性马格努斯力矩是增强或减弱线性马格努斯力矩,显然只有马格努斯力矩中,非线性系数符号 $T_2$ 与线性系数符号 $T_0$ 取反号,才能减弱马格努斯力矩,有利于增强运动稳定性。由于尾翼弹的线性马格努斯力矩系数数值一般为负值,所以非线性系数只有大于零( $T_2 > 0$ ),才可能产生稳定的运动。类似地,对于涡轮弹一般要求 $T_2 < 0$ 。

马格努斯力矩非线性系数 $T_2$ 的大小,将影响攻角幅值衰减的快慢(参见(2—4)、(2—5)二式)和稳定平衡状态攻角幅值的大小[参见(3—4)、(3—5)二式和图8]。

稳定条件中,还包括两个参数 $S_d$ 和 $\tau$ ,这两个参量是由线性气动力、力矩确定的,这样就把线性稳定条件和非线性稳定条件统一起来,图5就很清楚地反映了这一点。

稳定性理论告诉我们,稳定的奇点对应着系统的稳定平衡状态(即弹道弧长增大时,攻角将趋于某个常值或零)。不同类型的稳定奇点存在不同的稳定平衡状态,下面分别讨论之。

坐标原点是稳定结点的条件为:

$$|S_d| < \tau$$

动稳定区域为图5上划横线部份。在该条件下,攻角幅值将随弹道弧长的增加而衰减,逐渐趋于零。图9-a和图10-a分别表示尾翼弹、涡轮弹的攻角曲线,与 $T_2$ 无关,类似于线性稳定情况。

坐标轴上奇点 $R_2$ 或 $R_3$ 为稳定结点条件

$$\left. \begin{aligned} T_2 > 0 \\ -3\tau < S_d < -\tau \end{aligned} \right\} (3-19)$$

或

$$\left. \begin{aligned} T_2 < 0 \\ \tau < S_d \leq 3\tau \end{aligned} \right\} (3-21)$$

动稳定区域为图5上划竖线部份。在该条件下,当弹道弧长增大时,攻角的极限轨迹是圆,圆半径分别为 $\sqrt{K_{2q}}$ 或 $\sqrt{-K_{1q}}$ 。(3—19)中第二个不等式表示尾翼弹慢进动线性不稳定。

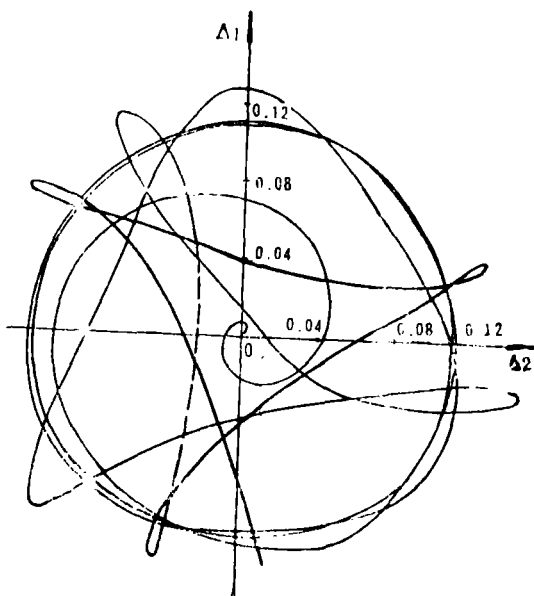
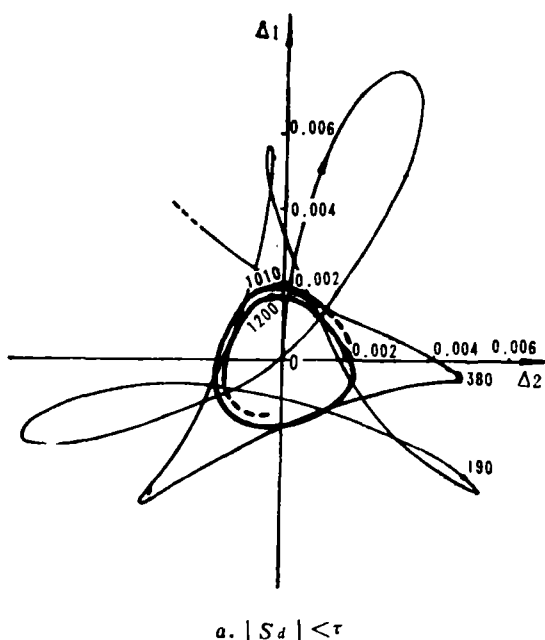


图 8 大的马格努斯力矩非线性系数对应的攻角曲线



当存在非线性马格努斯力矩时, 只要 $T_2 > 0$ , 弹丸仍可产生稳定的运动。前面已指出马格努斯力矩是由两部份组成的。

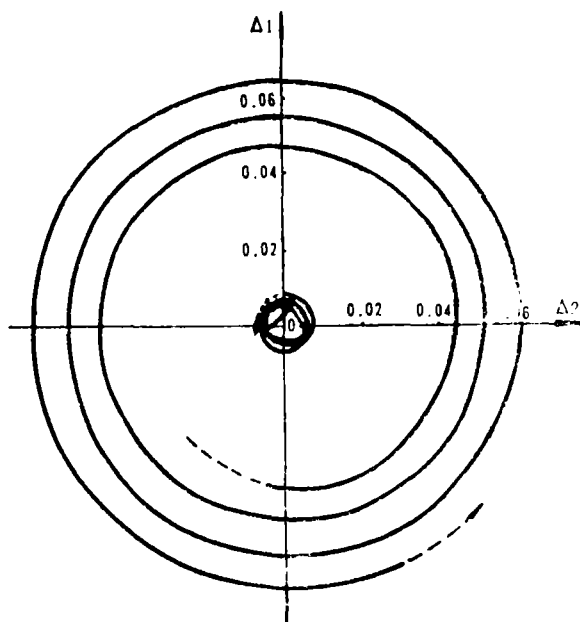
$$M_y = J_y a_u \dot{\nu} r (1 + b_2 \alpha^2) \Delta \doteq \frac{1}{n}$$

$$J_y \nu \dot{r} (T_0 + T_2 \alpha^2) \Delta \quad (4-1)$$

当攻角较小时, 非线性部份很小。慢进动阻尼指数  $\lambda_2 \doteq \lambda_{20} = -\frac{H}{2} \left( 1 + \frac{S_d}{\tau} \right) > 0$ , 将使

攻角幅值增大, 当攻角增大到适当角度时, 由于 $T_2$ 与 $T_0$ 反号, 可使 $\lambda_2 = \lambda_{20} - \lambda^* (2K_1^2 + K_2^2)$ 小于或等于零。另外, 由于快进动的阻尼指数 $\lambda_1$ 一直小于零, 随弹道弧长增大, 快进动很快衰减掉了, 最终只有慢进动进入平衡状态, 因而攻角的极限运动可表示成:

$$\Delta_j = \sqrt{K_{2q}} e^{i\omega_2 s} \quad (4-2)$$



b.  $-3\tau < S_d < -\tau, T_2 > 0$

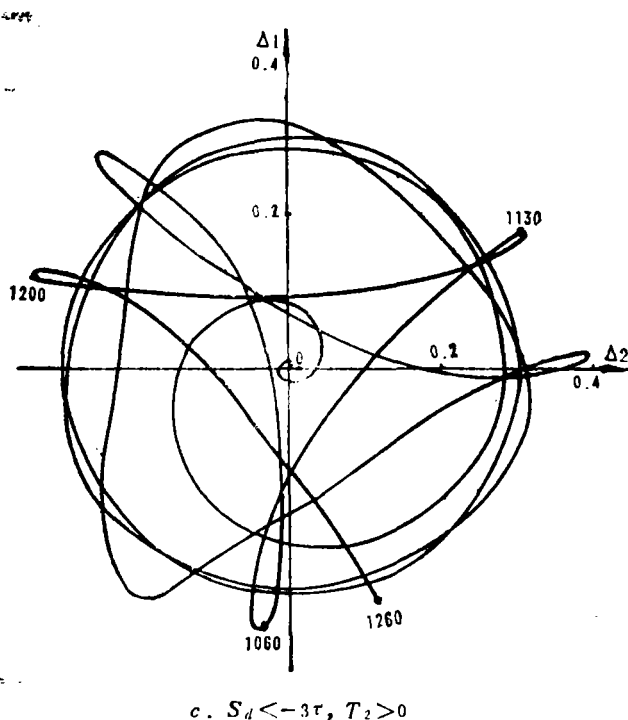


图9 尾翼式弹丸在非线性的马格努斯力矩作用下的攻角曲线(注)

图9-b给出满足(3-19)条件的数值积分结果,由图上可以看出快进动经过2-3个周期之后就衰减掉了,攻角幅值逐渐增大,趋于平衡攻角,该例的 $\sqrt{K_2} \doteq 0.15$ 。运动周期(或波长)等于:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\omega_2|} \doteq \frac{2\pi}{0.033} \doteq 190.4$$

从图6-b上,也可看出周期约为190。

类似地,涡轮弹可以存在满足(3-20)条件的圆运动,

$$\Delta_1 = \sqrt{-K_{1q}} e^{i\omega_1 t} \quad (4-3)$$

运动周期等于

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

图10-b给出某涡轮弹满足(3-20)条件的攻角曲线。用(3-20)稳定条件,可以解释[7]5英寸榴弹为什么只考虑线性马格努斯力矩是不稳定的,而实际飞行是稳定的。

注:在图9和图10上箭头方向表示攻角变化方向;图上数字表示自变量(弹道弧长s的长度)。

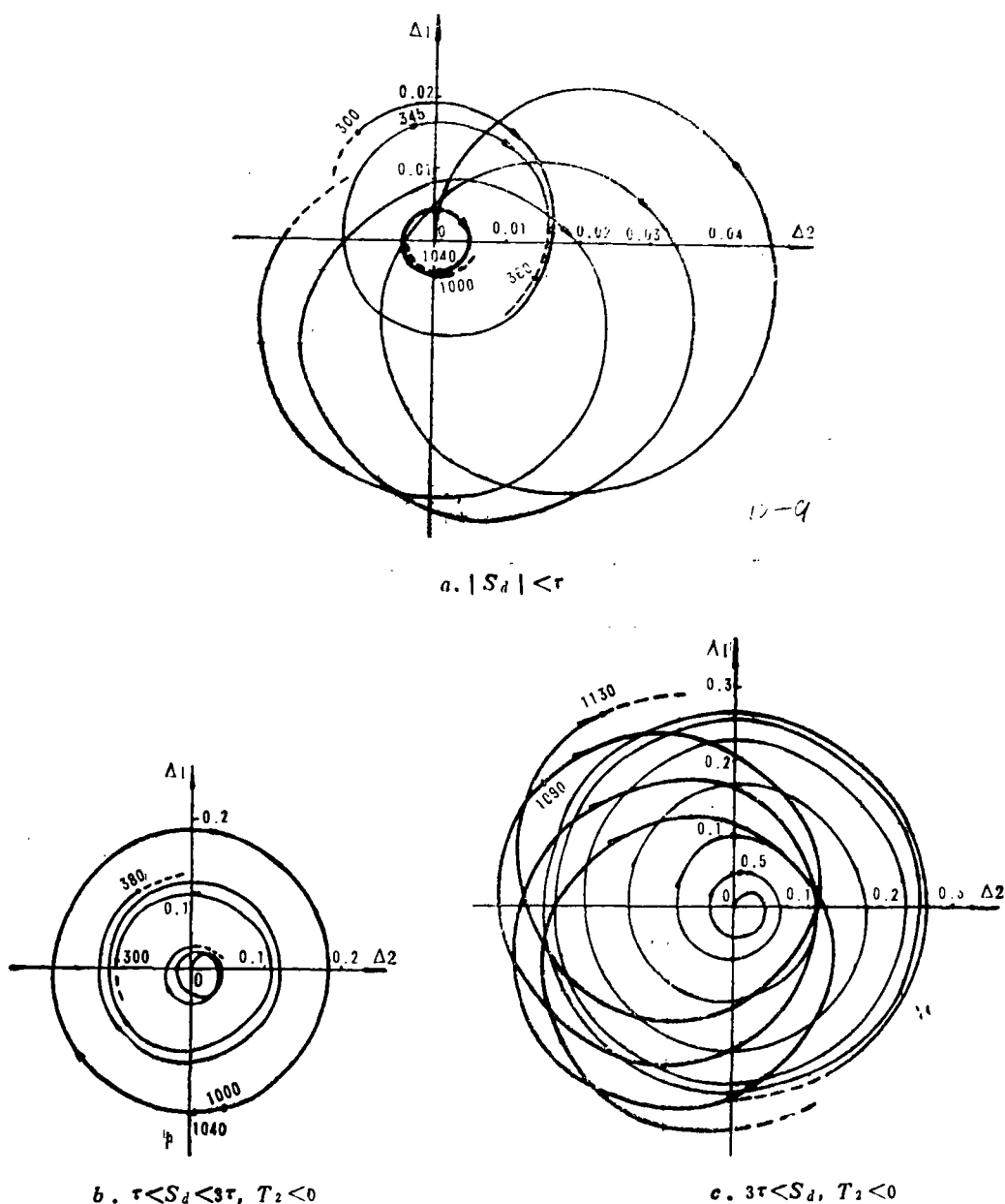


图 10 涡轮式弹丸在非线性马格努斯力矩作用下的攻角曲线

在第 I 象限内奇点  $R_4$  为稳定奇点时, 动稳定区域为图 5 划斜线部份, 攻角极限运动是旋

轮线。

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{K_{1q} + 2K_{2q}}{3}} e^{i\omega_1 t} + \sqrt{-\frac{2K_{1q} + K_{2q}}{3}} e^{i\omega_2 t} \quad (4-4)$$



如把上式改写成旋轮线的标准形式, 则为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= (A+a)\sin\omega_2 s - \lambda a \sin\omega_1 s \\ \Delta_2 &= (A+a)\cos\omega_2 s - \lambda a \cos\omega_1 s \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

式中为  $A$  定圆半径,  $a$  为动圆半径,  $\lambda$  为动点到动圆圆心距离与动圆半径之比值,

$$A = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \sqrt{-\frac{K_{2q} + 2K_{1q}}{3}}$$

$$a = \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{-\frac{K_{2q} + 2K_{1q}}{3}}$$

$$\lambda = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \sqrt{-\frac{K_{1q} + 2K_{2q}}{K_{2q} + 2K_{1q}}}$$

对于尾翼弹, 有  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 < 0$ , 故  $a < 0$ , 所以尾翼弹在满足

$$\left. \begin{aligned} S_d &< -3\tau \\ T_2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

时, 它的极限运动为伸长 ( $|\lambda| > 1$ ) 或缩短 ( $|\lambda| < 1$ ) 时圆内旋轮线。在图 9-c 上给出满足 (4-6) 条件尾翼弹的攻角曲线, 其中粗线为极限运动状态。攻角的最大幅值和最小幅值为:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_M &= \sqrt{\frac{K_{1q} + 2K_{2q}}{3}} + \sqrt{-\frac{2K_{2q} + K_{1q}}{3}} \\ \alpha_{min} &= \sqrt{\frac{K_{1q} + 2K_{2q}}{3}} - \sqrt{-\frac{2K_{1q} + K_{2q}}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

本例的  $K_{1q} = +0.16$ ,  $K_{2q} = 0.088$ , 用 (4-7) 式可计算出  $\alpha_M = 0.362$ ,  $\alpha_{min} = 0.08$ , 与图 9-c 的数值积分结果很相近。

对于涡轮弹, 一般有  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ , 故  $a > 0$ , 所以, 当满足

$$\left. \begin{aligned} T_2 &< 0 \\ 3\tau &< S_d \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

时, 它的极限运动为伸长 ( $|\lambda| > 1$ ) 或缩短 ( $|\lambda| < 1$ ) 的圆外旋轮线。图 10-c 上给出某涡轮弹满足 (4-8) 条件的攻角曲线, 该例的  $K_{1q} = -0.0888$ ,  $K_{2q} = 0.1000$  由 (4-7) 式得:

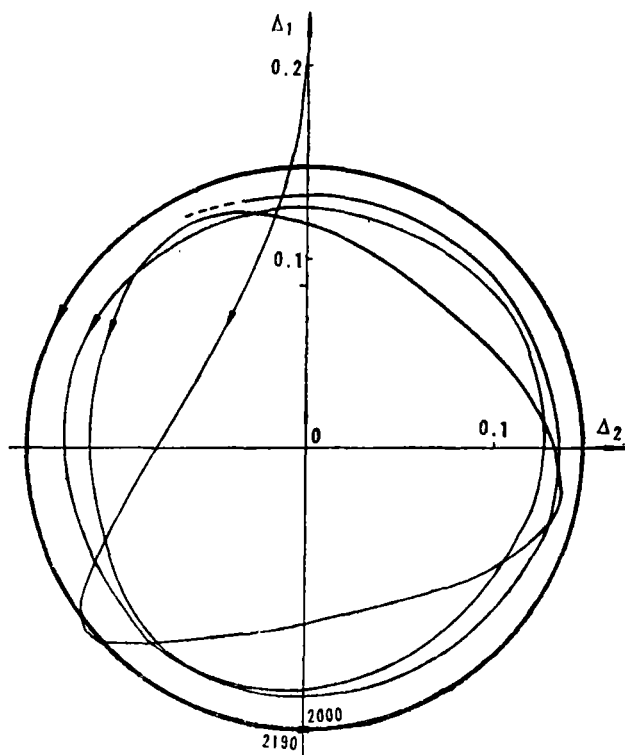
$$\alpha_M = 0.332$$

$$\alpha_{min} = 0.098$$

与图上数据符合很好。

图 11 表示把图 9-b 的初始条件  $\alpha'_{01} = 0.0004$  改为  $\alpha_{01} = 0.2$  时攻角曲线, 由图可见, 两图的极限运动是一致的, 但是本例的初始条件较大, 很快地就进入了稳定圆运动。

总之, 在满足稳定条件下, 初始扰动值越接近平衡状态的攻角幅值, 马格努斯力矩非线性系数越大, 赤道阻尼力矩越大 (当  $\alpha_0 > |\Delta_i|$  时) 或越小 (当  $\alpha_0 < |\Delta_i|$  时), 弹丸达到稳

图 11 尾翼式弹丸由  $\alpha_0 \neq 0$  引起的圆运动

定平衡状态就越快。尾翼式弹丸一般经过几个快进动周期  $\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)$ ，就可进入稳定平衡状态；涡轮式弹丸一般要经过十几个快进动周期，才能进入稳定平衡状态。

## 五、结 束 语

通过前面分析可知，在非线性马格努斯力矩作用下弹丸存在三种稳定平衡状态：

1. 当  $|S_d| < \tau$  时，攻角幅值将逐渐减小，极限状态是零攻角；
2. 当  $-3\tau < S_d < -\tau$ ， $T_2 > 0$  时，攻角中快进动能完全衰减掉，只剩下慢进动，攻角幅值为常数，等于  $\sqrt{K_{2q}}$ ；

当  $\tau < S_d < 3\tau$ ， $T_2 < 0$  时，攻角中慢进动能完全衰减掉，只剩下快进动，攻角幅值为  $\sqrt{-K_{1q}}$ ；

3. 当  $S_d < -3\tau$ ， $T_2 > 0$  或  $3\tau < S_d$ ， $T_2 < 0$  时，攻角的极限运动是圆内或圆外旋轮线。

不过须注意到，后两种稳定运动的攻角幅值可能是较大的，所以应尽量减少稳定平衡状态的攻角幅值。从  $K_{1q}$ ， $K_{2q}$  定义式，可知

$$K_{1q} = \frac{\lambda_{10}}{\lambda^*} = \frac{-H(\tau - S_d)}{2T_2}$$

$$K_{2q} = \frac{\lambda_{20}}{\lambda^*} = \frac{-H(\tau + S_d)}{2T_2}$$

当 $|S_d|$ 略大于 $\tau$ 时,对于涡轮式弹丸可以设法(参见[8],船尾部采用三斜面结构)减小翻转力矩(使 $\tau$ 增大),减小马格努斯力矩,增大阻尼力矩(使 $|S_d|$ 减小)。对于尾翼式弹丸可设法增大恢复力矩、减小转速(使 $\tau$ 增大);增大阻尼力矩、减小马格努斯力矩(使 $|S_d|$ 减小)。以便保证 $|S_d| < \tau$ ,从而达到零攻角运动目的。

当 $|S_d|$ 大于 $\tau$ 较大时,除采取上述措施外,还应设法增大马格努斯力矩中非线性部分,才能使 $K_{1q}$ (或 $K_{2q}$ )有较大的减小。

从本文的讨论中,更加清楚地看到,为了获得外弹道性能良好弹丸,必须加强新弹形气动动力研究。

本文编写过程中,曾得到应用数学所副所长秦元勋同志的指导,借此予以致谢。

### 参 考 文 献

- [1]. “火箭和弹丸运动稳定性” 董 亮 《箭弹技术研究》 11期1978年5月、五机部二〇三所
- [2]. “非线性恢复力矩对尾翼弹影响” 董 亮 1978年5月、五机部二〇三所
- [3]. 《火箭弹散布和稳定性理论》 杨绍卿等 1980年 国防工业出版社
- [4]. “一类二次系统的全局定性分析” 蔡耀林 《浙江大学学报》 1978年9月
- [5]. 《微分方程所定义的积分曲线》 秦元勋 科学出版社 1959年
- [6]. “The Prediction of Nonlinear Pitching and Yawing Motion of Symmetric Missiles” C.H.Murph  
《Journal of the Aeronautical Sciences》Vol.24 July, 1957
- [7]. “Dynamic Stability of a 5-in Projectile with Non-linear Magnus Moment” W.R.Chadwick  
《J.S.R.》Vol.4 No9 1967
- [8]. “An Improved Projectile Boat Tail” Part I. AD/A 024073 1976
- [9]. 《Nonlinear Systems Analysis》by M.Vidyasaagar, 1978.
- [10]. 《非线性振动理论中渐近方法》[苏]H.H.包戈留包夫等著,金福监等译,1963年,上海科学技术出版社
- [11]. 《力学及电学系统中的非线性振动》J.J.斯托克著,谢寿鑫等译,1963年,上海科学技术出版社
- [12]. 《The Exterior Ballistics of Rockets》by Leverett Davis etc. 1958. New York
- [13]. 《大气飞行动力学》B.埃特青著,何植岱等译,1979年,科学出版社

### 附录 计算参数注

#### A、各攻角曲线图中计算参数

图7至图11是根据(1—1)式数值积分结果绘制的。

#### B、振幅曲线计算参数

图1至图4是根据(3—8)式数值积分结果绘制的。

注:本文采用工程单位制。

弹种 结构参数	尾翼弹	涡轮弹
$d$	0.125	0.13
$R_{1,}$	0.362	0.086
$n$	130	29
$l$	2.2	1.0
$m$	4.0	2.5
$c_v'$	7	2.4
$m_s'$	-1.7	0.7

图号 参数	图7	图8	图9			图10			图11
			$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	$c$	
$\kappa$	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	5	5	5	1.5
$m_j' c_k$	1	3	1	3	3	2	2	2	3
$m_y'' m_o$	-0.01	-0.2	-0.01	-0.01	-0.2	0.05	0.1	0.2	-0.05
$b_2$	-10	-70	-10	-10	-10	10	-10	-10	-10
$\tau$	3.6	3.6	3.6	3.6	3.6	0.83	0.83	0.83	3.6
$S_d$	-2.8	-26	-2.8	-4.4	-26	0.5	1.8	3.2	-4.4
$K_{1e}$	-0.326	-0.017	-0.326	-0.216	-0.116	-0.025	-0.038	-0.069	-0.216
$K_{2e}$	-0.091	0.013	-0.091	0.022	0.088	-0.100	0.100	0.100	0.022
$\lambda_{10}$	-0.003	-0.021	-0.003	-0.01	-0.021	-0.002	0.005	0.019	-0.01
$\lambda_{20}$	-0.001	0.016	-0.001	0.001	0.016	-0.007	-0.014	-0.027	0.001
$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$	107	107	107	107	107	37.5	37.5	37.5	107
$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$	190	190	109	190	190	400	400	400	190
$\Delta_{01}'$	0	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-4}$	0
$\Delta_{01}$	0.8	0	0	0	0	0	0	0	0.2

(下转第57页)

## 五、讨论与说明

1. 本次计算结果基本上符合规律, 计算得出之应力分布与常规分析之受力规律相一致, 从实弹射击后找回来的弹托看出, 弹托上最后3~5个齿有塑性变形, 理论计算有四个齿部分应力超过屈服限, 可以认为基本上符合实际。这也说明本次计算模型选取, 载荷分析是合理的, 对齿上边界的处理基本上也是正确的。

2. 本次计算仅计算了膛内最大膛压时期弹托的应力状态, 没有计算弹丸入膛时期的状态, (这个时期初次反力最大), 这是因为我们考虑到弹带与弹体之间是相对滑动的, 这个初次反力只作用在弹带外部, 对弹丸强度不会产生很大影响。另外在最大膛压时期, 火药气体还将泄入弹带槽内, 所以在载荷分析中仍认为弹带槽内是膛压的作用。

3. 本次计算是以弹性程序计算的, 这样的计算结果对于分析判断何处材料发生了屈服有一定的认识, 其他弹性区域内的应力分布基本上是准确的 (因为塑性变形区很小), 但对于塑性变形区域内的应力分布就不对了, 因为材料发生屈服后, 应力分布不再符合线性规律, 进一步应当再作弹塑性分析, 用弹塑性程序计算, 一般说来, 弹塑性区内的实际应力将比本计算值为小。这次由于缺乏材料屈服后的应力应变曲线, 此项工作没有进行。

## 参 考 文 献

- [1] 华恭、欧林尔编, 《弹丸作用和设计理论》 国防工业出版社 1975
- [2] 复旦大学数学系, 《有限元素法选讲》 科学出版社 1976
- [3] 华东水利学院, 《弹性力学问题的有限单元法》 水利电力出版社 1974
- [4] AD/A-007805 Finite Element Analysis of a Multi-Component Kintic Energy Projectile

(上接第50页)

图 号 参 数	图 1		图 2		图 3			图 4
	a	b	a	b	a	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	
K <sub>1c</sub>	-0.4	0.4	-0.5	-0.3	-0.8	-0.4	-0.32	-0.6
K <sub>2c</sub>	-0.2	0.2	0.2	0.6	0.64	0.6	0.6	0.6
λ*	0.02	-0.02	0.04	-0.04	0.04	-0.04	-0.04	0.04