

乒乓球三维运动仿真分析

何家梅

(郑州经济管理干部学院 电子信息工程系, 河南 郑州 451191)

摘要: 乒乓球的运动轨迹由它受到的阻力、升力和重力决定, 利用牛顿第二定律列出它的运动微分方程, 用 Matlab 软件所提供的 ode45() 函数求解此方程, 可得到乒乓球三维空间运动轨迹。

关键词: 乒乓球; 三维运动; 空气阻力; 马格努斯力 (magnus force); Matlab

中图分类号: G 846 文献标识码: A 文章编号: 1671-4989(2006)03-0090-02

乒乓球、网球、高尔夫球等球类运动, 其运动的轨迹往往偏离其方向, 这是由于球体不仅受到空气的阻力, 而且还受到因旋转而产生的马格努斯力 (magnus force) 的作用。通过分析这些力对球产生的影响, 可得到其比较真实的运动轨迹。Matlab 是一个非常优秀的数学软件, 它提供的四阶龙格-库塔函数可方便求解非线性微分方程, 仿真球体的三维空间曲线。

一、力学分析

乒乓球质量 $m = 0.0027 \text{ kg}$ 直径 $d = 0.040 \text{ m}$, 它受到球拍打击产生速度和角速度, 速度给出运动的大小和方向, 角速度指示了旋转轴的方向, 用右手定则确定。优秀运动员可使乒乓球运动最大速度达 20 m/s 上旋转球可达 3000 r/min 。[1] 球运动时受到以下三个力的作用:

1 重力 $G = mg$ g 是重力加速度, 方向向下, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

2 空气阻力 F_D 。它与速度 v 方向相反, 由流体动力学

计算: $F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$ [2]。

其中: ρ —空气密度, $A = \frac{\pi d^2}{4}$ —迎风面积, v —速度,

C_D —阻力系数, 是一个无量纲的量。

当球体运动通过空气时将留下湍流尾迹, 阻力系数 C_D 与尾迹密切相关。流动尾迹的状态可用雷诺数 $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$ 描述 (d —球的直径, η —空气粘度系数)。雷诺数 $Re < 1$ 时, 流动不发生分离, 阻力正比于速度; 随着雷诺数增大, 至 $10^3 < Re < 3 \times 10^5$, 包围球体的边界层发生分离, 阻力系数基本为常数; 在大于某个雷诺数时 (光滑球为 $Re > 3 \times 10^5$), 边界层完全变成湍流, 分离点后移, 阻力系数突然下降。由于包围粗糙球的边界层更易分离, 粗糙球的临界雷诺数比光滑球的小, 如图 1 所示。阻力系数要用风洞实验来测得。有论文 [3] 提出, 网球在 $13.6 < v < 28 \text{ m/s}$ $800 \text{ r/min} < n < 3250 \text{ r/min}$ 阻力系数的表达式为:

$$C_D = 0.508 + \left[\frac{1}{22.053 + 4.196 \left(\frac{v}{\omega} \right)^{5/2}} \right]^{2.5}$$

C_D 只依赖于 v/ω , v 是球运动的线速度, ω 是球旋转的角速度。这个数据经常被引用。下文采用它来分析乒乓球的轨迹。

$$Re = \frac{1.29 \times 10 \times 0.040}{0.189 \times 10^{-4}} = 2.7 \times 10^4 \quad (v = 10 \text{ m/s})$$

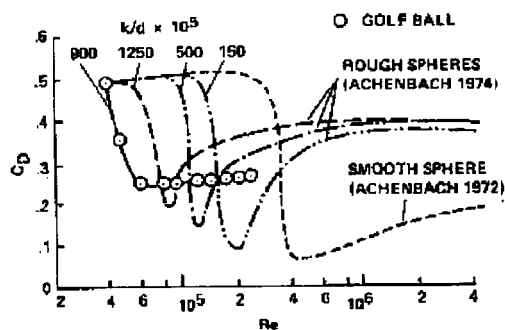


图 1 阻力系数 C_D 与 Re 的关系 [4]

3 马格努斯力 F_L 。这个力垂直于 \vec{v} 和 $\vec{\omega}$ 。例如运动员打出下旋球, 由右手定则显示球的角速度方向离你而去, 马格努斯力方向向上, 而上旋球受的力则向下。由于旋转球表面与环绕它的空气薄层相互作用, 球上方的流线比下方的流线密, 相应地, 流速上方比下方要快, 因而产生的净压力向上, 如图 2 所示。马格努斯力的计算公式为:

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A v^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}}{v} \quad [2]$$

C_L 为马格努斯力升力系数, 和阻力系数相似, 须由实验测得。 C_L 与 C_D 相比要小得多。引用文献 [3] 的数据:

$$C_L = \left[\frac{1}{2.022 + 0.981 \left(\frac{v}{\omega} \right)} \right]$$

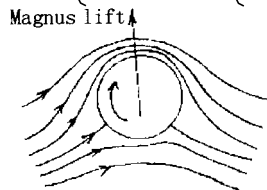


图 2 magnus force 的形成

收稿日期: 2006-04-07

作者简介: 何家梅 (1963-), 女, 四川江津人, 郑州经济管理干部学院电子信息工程系讲师。

二、数学方程

建立三维直角坐标系 x, y, z $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$, 设球初速度为 v_0 它与 xy 平面的夹角为 θ 它在 xy 平面投影与 x 轴夹角为 β . $\vec{\omega}=\omega (Q \sin\Phi, \cos\Phi)$, Φ 为球的旋转轴 ω 与 z 轴夹角, 如图 3 由牛顿定理列出非线性微分方程, 并设出初始条件:

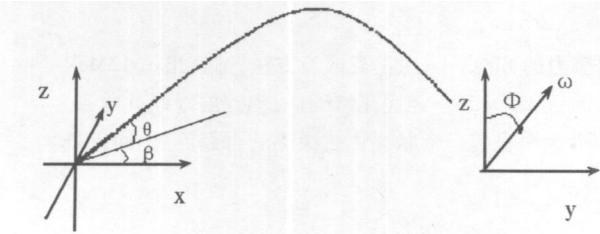


图 3 建立空间直角坐标系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=v_x \\ \frac{dy}{dt}=v_y \\ \frac{dz}{dt}=v_z \\ m\frac{dv_x}{dt}=-\frac{1}{2}C_D\rho Avv_x+\frac{1}{2}C_L\rho A v(v_z\sin\Phi-v_y\cos\Phi) \\ m\frac{dv_y}{dt}=-\frac{1}{2}C_D\rho Avv_y+\frac{1}{2}C_L\rho Avv_x\cos\Phi \\ m\frac{dv_z}{dt}=-\frac{1}{2}C_D\rho Avv_z-\frac{1}{2}C_L\rho Avv_z\sin\Phi-mg \\ x_0=0 \\ y_0=0 \\ z_0=0 \\ \frac{dx}{dt}=v_0\cos\theta\cos\beta \\ \frac{dy}{dt}=v_0\cos\theta\sin\beta \\ \frac{dz}{dt}=v_0\sin\theta \end{cases}$$

三、求解

非线性微分方程采用数值求解方法。Matlab给出 ode45 ()函数, 它能实现变步长龙格-库塔算法, 可根据精度要求变步长, 精度高, 运算速度快。在 Matlab 中打开 M - file 窗口, 创建 ball1.m 函数, 然后在主程序 hjn.m 中调用。

运行 hjn.m 程序, 并在 Matlab 命令窗口输入 velocity (m/s); 10 theta 30 beta 0 time(s); 0.8 就可得到方程的解; 对应 t 的每一时刻, 有相应 x, y, z, v_x, v_y, v_z 并画出轨迹 (见表 1)。

表 1

t =	x	y	z	v_x	v_y	v_z
0	0	0	0	8.6603	0	5.0000
0.7903	3.7549	1.0495	0.0067	2.5866	1.6476	-3.3831
0.7952	3.7673	1.0574	-0.0097	2.5681	1.6465	-3.4125
0.8000	3.7797	1.0654	-0.0263	2.5496	1.6454	-3.4417

$x_{max}=3.7673, y_{max}=1.0574$

由此可知球运动的最大水平位移、最大高度和最大横向偏折, 可进一步求出任一时刻球的速度。图 4 为速度 $v_0=10\text{m/s}$ $\theta=30^\circ$ $\beta=0^\circ$ 转速大小 $n=200\text{r/min}$ 不同旋转方向下乒乓球的运动轨迹。从此图中可看到, 下旋球比上旋球飞行时间长, 高度高, 水平距离远, 而侧旋球在 x 方向位移 3.7673 米时, y 方向偏折 1.0574 米。产生此现象是球受到不同方向的马格努斯力作用的结果, 而马格努斯力依赖球的旋转。修改画图指令, 可得到对应于 $z-x, y-x$ 二维曲线, 如图 5 在此图上容易看出乒乓球运动轨迹中 x 位移所对应的 y 和 z 的位移。由以上分析可知, 无论哪种球类运动, 只要测得球体实际的 C_L 和 C_D 就能画出其轨迹。

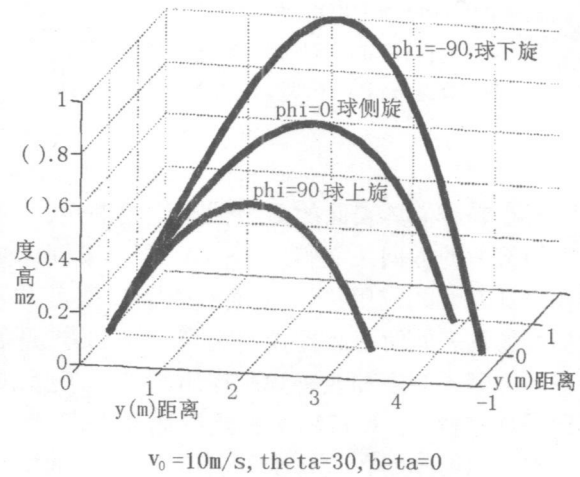


图 4 乒乓球在不同旋转方向时的三维运动曲线

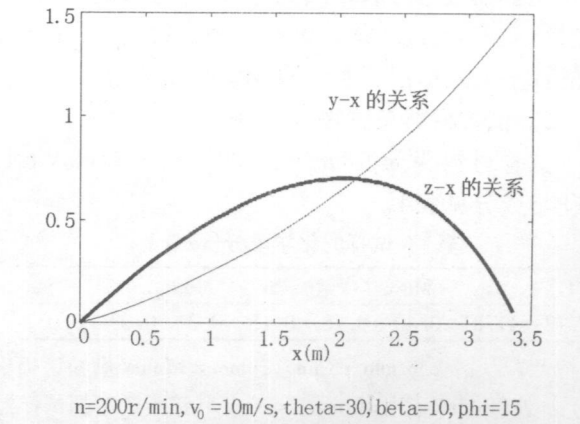


图 5 乒乓球运动 $y-x, z-x$ 关系曲线

[参考文献]

[1] 柳天扬. 银球世界——乒乓球运动 [M]. 海口: 海南出版社, 1997.

[2] [美] W·F·休斯. 流体力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2002

[3] A. Sepanek. The Aerodynamics of Tennis Balls - The topspin [J]. American Journal of Physics February 1988 Vol ume 56 Issue 2 pp 138 - 142

[4] Gary Dykacz The Physics of Paintball [DB/OL]. <http://kennon.csufresno.edu/~nas31/hsa/pball/introl.html> 2006-03-02