

Salt and sugar 盐指现象的研究

小组成员：洪叶瀚，季灵晶，沈弘毅

指导老师：陈唯，杨中芹

摘要

本实验实现并观察了盐指现象的实验现象，提出了盐指现象的一种。下层溶液密度一定时，上层溶液密度越大，finger 达到的最大速率越大。下层溶液密度一定时，产生 finger 的时间与上下层溶液密度差呈指数关系。

引言

当热的咸海水位于冷的淡水上方时，两层海水的交界面会出现手指状的对流现象，称为盐指现象 (salt fingers)。盐指现象属于双扩散现象。双扩散现象在日常生活生产和自然现象中普遍存在：晶体生长、温盐作用下的大洋环流、污染物在大气中的扩散等等，对双扩散系统的研究在理论和实验以及生产中都有重要意义。自 19 世纪 50 年代首先发现盐指现象，几十年来研究者对这一现象的理论机制、实验现象、数值模拟等方面做了大量工作。

从扩散到对流

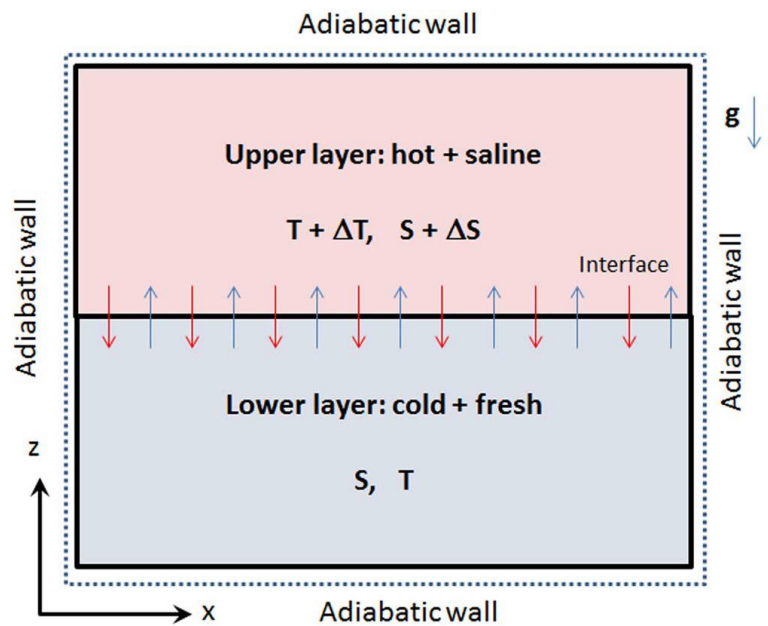
盐指现象是双扩散现象的一种。双扩散现象与系统中的两种成分的分布和扩散速率的差异有关。盐指现象的产生需要如下 3 个初始条件：

1、扩散较快的组分(设为 T)的分布是不稳定的(即只考虑 T 的分布对密度的影响时, >0),

2、扩散较慢的组分(设为 S)的分布是稳定的(即只考虑 T 的分布对密度的影响时, <0),

3、初始时上层液体的密度小于下层液体。

当上下层液体接触后，一开始保持稳定的分层状态，之后由于 T 与 S 的扩散速率不同，使得交界面处上下层液体 T 组分的分布趋于一致，而 S 组分尚来不及扩散，导致交界面处上下液体的密度关系发生变化，上层液体的密度超过下层液体，界面的稳定性遭到破坏。由于界面附近的涨落现象以及外界的微扰，引起对流，形成盐指现象。只要两种组分的扩散速率存在差异，在一定条件下就会产生盐指现象。常见的盐指现象可发生在温度/盐、盐/糖系统中。在研究中常常引入扩散比 (Lewis number) 表征组分扩散系数的差异。对温度/盐系统，对盐/糖系统



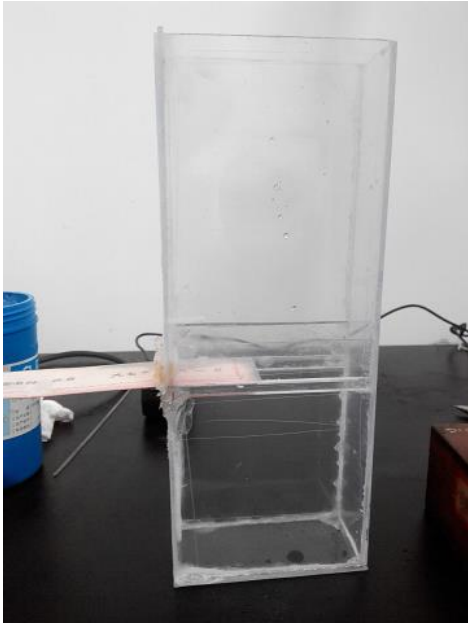
当上下层液体接触后，一开始保持稳定的分层状态，之后由于 T 与 S 的扩散速率不同，使得交界面处上下层液体 T 组分的分布趋于一致，而 S 组分尚来不及扩散，导致交界面处上下液体的密度关系发生变化，上层液体的密度超过下层液体，界面的稳定性遭到破坏。由于界面附近的涨落现象以及外界的微扰，引起对流，形成盐指现象。只要两种组分的扩散速率存在差异，在一定条件下就会产生盐指现象。常见的盐指现象可发生在温度/盐、盐/糖系统中。在研究中常常引入扩散比 (Lewis number) 表征组分扩散系数的差异。对温度/盐系统，对盐/糖系统

实验器材

水槽 (尺寸 25cm*10cm*4cm)，隔板，橡胶管

白砂糖，食盐，电子秤 (精度 0.01g)，纸，红墨水，黑墨水，凡士林

手机、数码相机、CCD 相机



实验步骤与过程

1. 观察墨水在水中扩散的快慢

将室温（约 20 摄氏度）加到容器下层，将 2-3 滴红墨水滴到热清水中搅拌均匀，加入隔板上层。缓慢抽去隔板，观察界面处颜色的变化。

3. 实验仪器的定标：首先向量筒中加入不同量的水，通过量筒与水的总质量变化标定量筒的刻度，然后分别测量不同浓度的糖水、盐水的体积与质量，得到密度与浓度的关系。

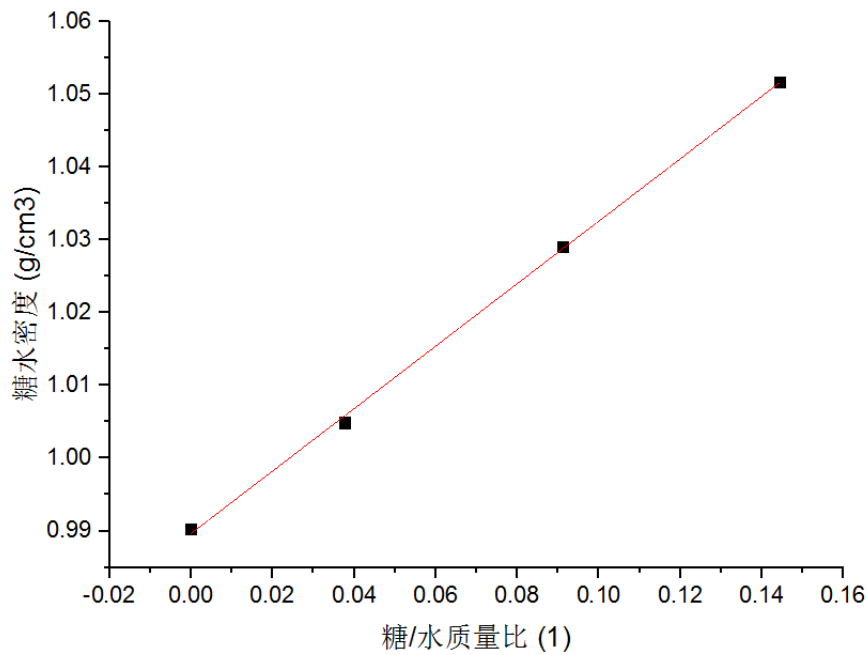
4. 在室温约 20 摄氏度下做实验。容器下层放入盐水（每 8g 盐加入 1000g 水配制），加入隔板后，分别在上层放入不同的质量分数的糖水（用墨水染色），缓慢抽去隔板，观察：

- i. 是否有 finger 出现；如果有，则记录从抽开板起到产生 finger 的时间。
- ii. 观察 finger 的疏密程度和粗细。疏密程度用单位长度的 finger 数表示，粗细用 finger 的直径表示
- iii. 测量 finger 伸长速度。先将划有间隔相等的平行直线的纸贴在水槽的背面，通过连拍、摄影等方法获取 finger 的图像。测量实际纸上平行线间的距离与图像中平行线间的像素点个数得到实际距离和图像中像素点之间的换算关系。再测量并记录不同时刻图像中竖直方向上 finger 顶端对应的像素位置，经过换算得到 finger 伸长的速率。

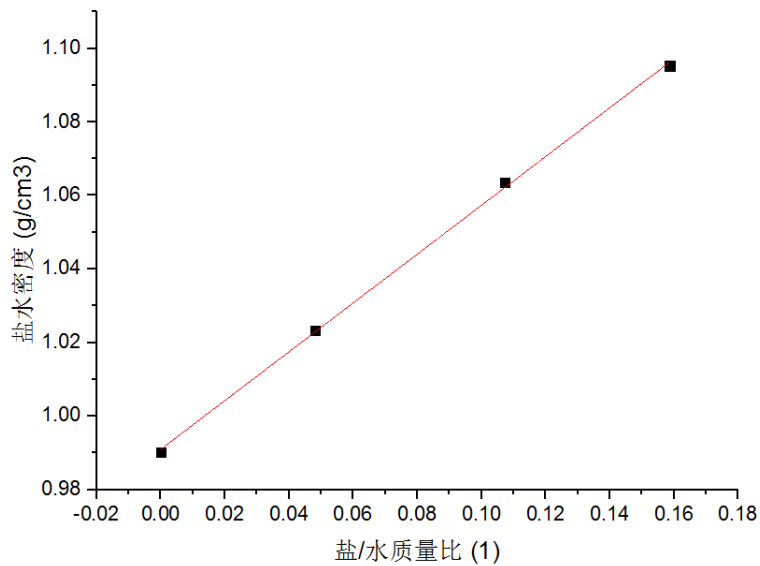
实验结果与分析

1. 查阅资料后我们一开始试图使用类似纹影摄影术的方法研究 finger，但实验中发现不能得到 finger 清晰的图像，所以我们通过在将一层液体染色（加入墨水）的方法。这就需要墨水扩散得很慢，即同样时间内，墨水扩散的距离必须远远小于 finger 伸长的长度。实验中通过上层热水下层冷水，使下层液体重于上层液体，抑制液体的上下对流，这样系统只存在上下的扩散，从而可以反映墨水扩散的速度。实验测得 10min 内墨水扩散的距离不超过 2mm，这在时间上基本大于 finger 形成的时间尺度（min 量级），空间上远小于 finger 伸长的长度（cm 量级）。并且在 40ml 液体中加入 1ml 墨水，水的密度变化在实验器材误差范围内，而实验中都是在 300ml 水中加入 3ml 墨水，因而墨水染色不会影响实验结果。

2. 用糖水（盐水）中糖（盐）与水的质量比代表糖（盐）的浓度 c , ρ 表征糖水（盐水）的密度, ρ 与 c 的关系如下图,图中可以看到 ρ 与 c 近似呈线性关系,拟合得到



糖水密度 $\rho = 0.429c + 0.990$ (g/cm³) 相关系数 $R^2 = 0.999$



盐水密度 $\rho = 0.664c + 0.991$ (g/cm³) $R^2 = 0.999$

*实验中纯水密度不为 1.000 与测量误差和温度有关。

对密度不确定度的估算 ($u(x)$ 为 x 的不确定度) 如下:

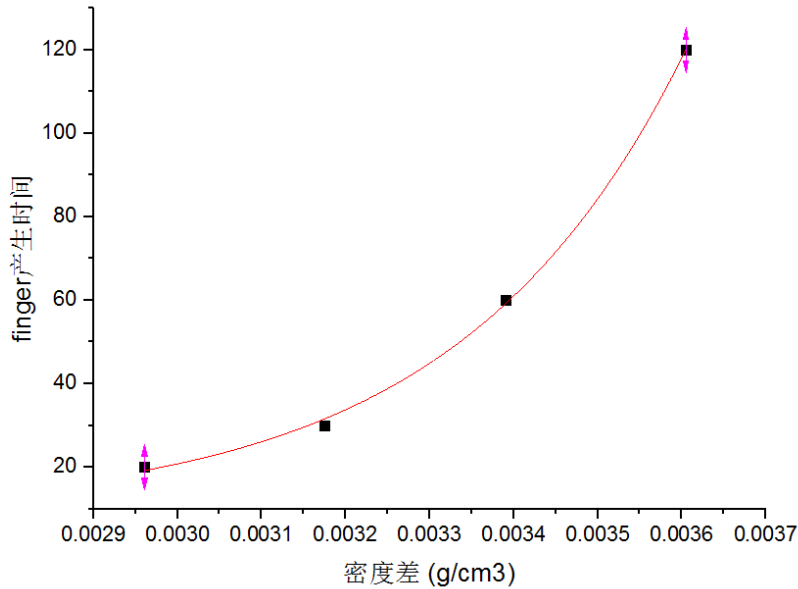
$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \sqrt{\frac{u(m)^2}{m^2} + \frac{u(V)^2}{V^2}}$$

暂时不考虑密度换算带来的影响, 以 8 号视频为例,

$$u(m) = 0.01g, m = 1.88g; u(V) = 0.5ml, V = 197.84ml. \text{得 } \rho = (0.994 \pm 0.005)g/ml$$

3. 实验中发现 finger 的宽度基本为 1mm 左右,下沉的速度先慢后快,经过 1~2cm 后基本达到匀速。

4. 若每隔 10 秒钟测量一次 finger 的长度,将前三组数据线性拟合到长度为 0 的点和抽离挡板的时间差定义为 finger 产生的时间,则下层盐水浓度一定时(糖/水质量比 8g/1000g),上层不同糖水浓度对应的产生 finger 的时间如下图所示。图中横坐标为换算后的糖水与盐水的密度差,纵坐标为产生 finger 的时间。



可以看出, t 与密度差 $\Delta\rho$ 基本呈指数关系。

对于 finger 产生时间与糖盐密度的关系,我们试图用扩散模型解释,理论如下。

简单起见,假设只有两层液体,设糖在上下层的浓度分别为 c_1, c_0 , 盐在上下层的浓度分别为 d_1, d_0 。 $c_1 > c_0, d_1 < d_0$

$$\text{由扩散定律, } \frac{dc_1}{dt} = -K_1(c_1 - c_0) \quad \frac{dc_0}{dt} = K_1(c_1 - c_0)$$

$$\text{得到 } \frac{d(c_1 - c_0)}{dt} = -2K_1(c_1 - c_0)$$

$$\text{设上下层浓度差为 } \Delta c = c_1 - c_0 \quad \frac{d(\Delta c)}{dt} = -2K_1(\Delta c)$$

$$\text{同理对盐各参数定义同上, } \frac{d(\Delta d)}{dt} = -2K_2(\Delta d)$$

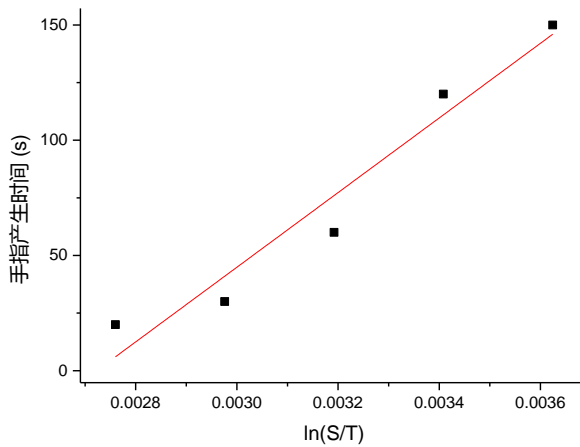
由糖引起的与纯水的密度差设为 $\Delta\rho_1 = H_1\Delta c$, 其中 H_1 前面已经求得

由盐引起的与纯水的密度差设为 $\Delta\rho_2 = H_2\Delta d$, 其中 H_2 前面已经求得

在产生 finger 的临界点上下两层液体密度相近, $\Delta\rho_1 + \Delta\rho_2 \approx 0$ 。代入前面各式,得

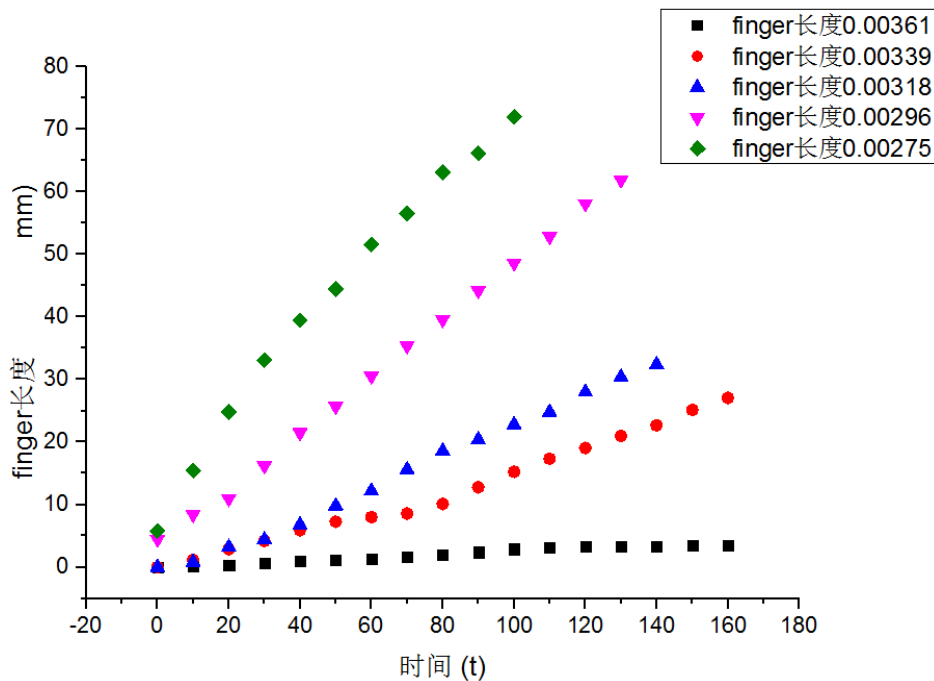
$$\text{到 } \frac{S}{T} = \frac{H_2}{H_1} e^{(K_1 - K_2)t} \quad , \text{ 其中 } S \text{ 代表初始盐浓度、} T \text{ 代表初始糖浓度。故 } t \text{ 与 } \ln\left(\frac{S}{T}\right) \text{ 有}$$

一次关系,按此对数据进行拟合。



相关系数为 0.9。拟合效果不理想的主要原因有二，一是实验者对手指产生时间的判断，测量不确定度有 5s 之多；二是温度、实验仪器的精度对密度测量的影响。

5. 每隔 10 秒钟测一次 finger 的长度，生成图像如下（图例中的数字代表盐糖密度差），根据图像推测为三个阶段：加速，匀速运动，减速到停止（这个阶段只在密度差最大的一组观测到）。上下密度差越大，则加速时间越短，终速越慢。



6. Finger 下沉速率稳定时，对于粘性阻力的表达式可以用量纲分析的方法。

$$\text{粘性系数 } [\eta] = ML^{-1}T^{-1} \quad \text{下沉速率 } [v] = ML^{-1}$$

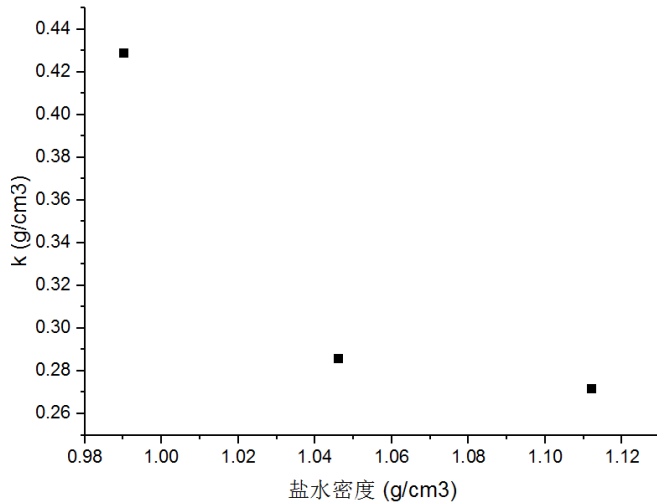
$$\text{半径 } [R] = M \quad \text{粘性阻力 } [F] = ML^2T^{-1}$$

$$\text{组合得 } F = C\eta v R \quad \text{由匀速下降时阻力、重力、浮力相等，得到 } F = \Delta\rho g V$$

其中 $\Delta\rho$ 为 finger 与其外液体的密度差。进而得到 v 与 $\Delta\rho$ 成正比。

我们假设盐的扩散速度远大于糖和墨水，那么当 finger 稳定下降时 finger 内部的密度就是糖浓度与上层糖水相同、盐浓度与下层盐水相同时的密度。

若假设低浓度下混合溶液的密度 $\rho = \rho_{\text{water}} + k_1 C_{\text{sugar}} + k_2 C_{\text{sugar}} + k_3 C_{\text{sugar}} C_{\text{salt}}$ ， C_{sugar} 和 C_{salt} 分别是糖/水质量比和盐/水质量比， k_1 、 k_2 、 k_3 为常数，则低密度下可假设混合溶液的密度 $\rho = k C_{\text{sugar}} + \rho_{\text{salt}}$ ，其中 k 是 ρ_{salt} 的线性函数。是根据实验的得 k 如图。



估计盐水密度为 0.996g/cm³，即盐/水质量比 0.008 时， k 在 0.4 到 0.42 左右，基本可以认为和纯水类似，那么稳定时 finger 的速度就和上层糖水密度线性相关了。从理论来讲只要上层有糖，盐水的扩散就必然使上层出现密度大于盐水的部分，从而形成 finger。若将稳定时的速度拟合，则有如下的线性关系。

$$v = 705.41\rho + 700.25$$

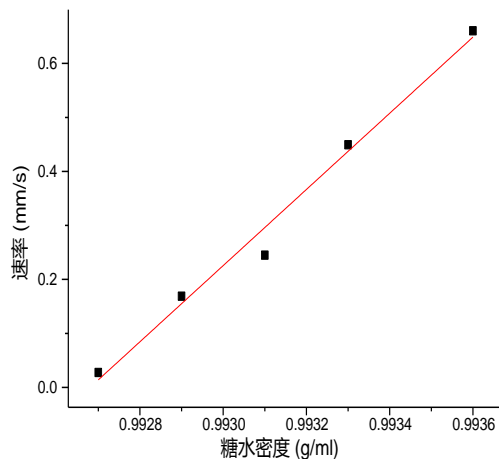
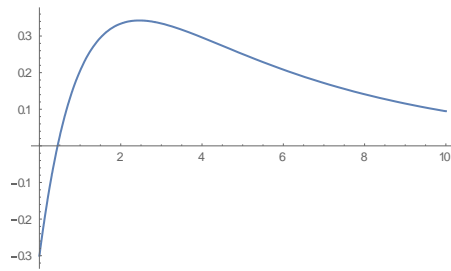


图2.finger生长速率与糖水密度成正相关(盐水密度为0.9963g/ml)

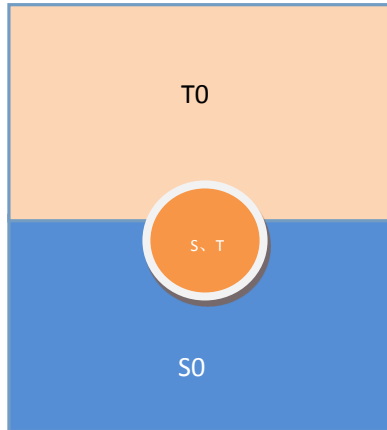
将拟合曲线延长，得到 finger 稳定速度恰好为 0 的密度大小在 0.9925 左右，对应糖/水质量比约为 0.0065。而事实上糖/水质量比在 0.0065 时在 20 分钟的放置中未发现 finger，糖/水质量比在 0.007 时则在约 5 分钟后停止增长。可能的原因是糖的扩散速度并不可以忽略，当糖扩散完，就会出现 finger 静止的情况。定性上来讲，若糖和盐均按

照指数扩散，则上下层密度差随时间变化如下图所示。



若糖水浓度过低，就可能出现由于密度差太小而导致 finger 过早的进入停止增长的平衡状态，因而看不到 finger。接下来，我们从之前的扩散理论出发，结合理想流体的力学，尝试对手指的生长做出解释。

手指生长速率的无黏性模型



我们将系统分成手指和手指以外的环境溶液，把环境糖、盐溶液看作大粒子源，即 finger 的生长对上下溶液浓度的影响可以忽略。

T_0, S_0 分别代表初始糖、盐浓度，即环境浓度； T, S 分别代表手指内部糖、盐浓度。

由于之前已经证实了在低浓度条件下溶液密度与浓度有很好的线性关系，之后都用浓度代替密度进行讨论。

按照扩散理论，可得 $T = T_0 e^{-K_T t}, S = S_0 (1 - e^{-K_S t})$

K_T, K_S 分别代表糖、盐的扩散系数。

实验中，我们观察到大部分情况下手指呈蝌蚪状(例如末端是直径为 6mm 的球，颈部约 3mm),手指末端可以看作一个主要受力球。忽略黏滞阻力，由动量定理

$$d(\rho v) = (\rho - \rho_{s_0}) dt$$

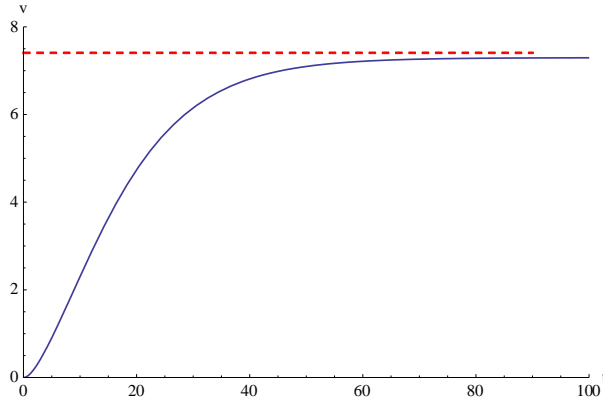
ρ 代表指端密度、 ρ_{s_0} 代表环境盐溶液密度。

按之前的分析，密度可用 $S+T$ 代替；将具体表达式代入

$$d[(T + S)v] = (T_0 e^{-K_T t} - S_0 e^{-K_S t}) dt$$

$$\text{积分得 } v = \frac{-\frac{T_0}{K_T} e^{-K_T t} + \frac{S_0}{K_S} e^{-K_S t} + \frac{T_0}{K_T} - \frac{S_0}{K_S}}{T_0 e^{-K_T t} + S_0 (1 - e^{-K_S t})}$$

做出速率随时间变化图如下(模拟作图时取了 $3K_T = K_S$)



从数学上讲, 当 $t \rightarrow \infty, v = \frac{1}{S_0} \left(\frac{T_0}{K_T} - \frac{S_0}{K_S} \right)$; 而在实验上, 手指内部密度与外界持

平就意味着可以扔掉速率表达式中的指数项, 匀速速率与糖的初始浓度成一次关系, 与实验结果吻合。显然, 从这个模型出发, 我们可以预言匀速速率与盐的初始浓度有一次反比的关系, 以及和糖盐扩散系数的关系; 但**这急需实验的检验**。

由此推出这个实验中 **finger** 的成因是盐扩散的比糖快, 造成糖水与盐水界面处一小部分的液体密度比纯盐水大, 由于表面张力等因素形成 **finger** 状下落。

为了验证这个模型, 首先我们做了上下层为不同浓度的盐水的实验, 发现上层盐水密度小于下层时稳定分层, 不出现 **finger**; 上层浓度大于下层时立刻一大团的涌下, 也没有典型的 **finger**。这也说明隔板未抽出时上层液体的密度必须小于下层液体, 不然, 若上层液体的密度大于下层液体, 则由于隔板抽离时的扰动, 系统必定会失稳不会形成 **finger**。其次, 我们将盐水放在上层, 糖水放在下层。发现即使两者密度接近, 也没有形成 **finger**。这是因为初始时扩散快的组分在上下两层液体中的单独贡献必须是使界面稳定, 而扩散慢的组分的单独贡献是使界面失稳。这样由于扩散快的组分扩散非常快, 使得它对于界面稳定性的贡献很快减小, 一定时间后, 界面失稳即上层液体的密度略大于下层液体的密度, 从而形成 **finger**。

(这里指的 **finger** 指的是从上到下的 **finger**)。回到 **finger** 伸长的速率, 由于 **finger** 初始形成时伸长的速率非常慢, **finger** 内部仍然在与上下层发生溶质的扩散, 即 **finger** 内的密度仍然在增加, 所以初始时上层浓度大的密度大, **finger** 内的密度也大, 从而在最终稳定时速度与上层浓度呈正相关。

实验结论

本实验实现并观察了盐指现象的实验现象, 提出了盐指现象的一种。下层盐溶液密度一定时, **finger** 达到的最大速率与上层糖溶液密度成一次关系; 实验得到产生 **finger** 的时间与上下层溶液密度差呈指数关系。

致谢

感谢陈唯老师对我们的帮助，不断给我们加油打劲，与我们一起分享实验中的苦与乐；感谢 104 的张佳正学长给予我们的指导，他慷慨地将烧杯、酒精、量筒等实验器材借给我们使用；还有乐永康老师和光谱公司的殷海伟先生，热情地帮助我们完成湿布实验中光谱结果的测定，在此一并表示感谢。

参考文献

- [1]http://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_%28water_waves%29
- [2]http://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_%28buoyancy%29
- [3]http://www.curry.eas.gatech.edu/Courses/6140/ency/Chapter11/Ency_Oceans/Double-diffusive_Convection.pdf
- [4]http://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_expansion#Coefficient_of_thermal_expansion
- [5]<http://www.planetwater.ca/research/oceanmixing/saltfingers.html>
- [6]Y.-N. Young, H. Tufo, A. Dubey and R. Rosner, On the miscible Rayleigh–Taylor instability: two and three dimensions
- [7]HERBERT E. HUPPERT and PETER C. MANINS, Deep Sea Research, Limiting conditions for salt-fingering at an interface
- [8]O. P. Singh and J. Srinivasan, PHYSICS OF FLUIDS 26, 062104 (2014), Effect of Rayleigh numbers on the evolution of double-diffusive salt fingers
- [9]Eric Kunze, Progress in Oceanography 56(2003) 399-417, A review of oceanic salt-fingering theory