

# 对“磁力小火车”的原理探究及实验验证

陈芳婷 核科学与技术系

## 一、摘要

本文根据磁铁在不均匀磁场中受力公式和洛伦兹力公式推导出“磁力小火车”现象中，“小车”的平衡速度表达式，并通过 MATLAB 和 COMSOL 等软件结合实验测量数据得出表达式中相关参数数值，利用 MATLAB 做出小车平衡速度  $v$  与电池电压  $U_0$ ， $v$  与线圈半径  $R$ ， $v$  与线圈匝数密度  $n$ ， $v$  与加入磁铁个数  $N$  的理论图像，并通过实验探究  $v$  与  $U_0$ ， $v$  与  $n$ ， $v$  与  $N$  的关系，得到的实验图像与理论图像吻合程度较好。

**关键词：**公式推导；仿真模拟；MATLAB 作图；实验探究

## 二、引言

YouTube 上的一个视频（视频详见 <https://youtu.be/J9b0J290zAU>）展示了这样一个有趣的现象：将一个两端吸引着磁铁的 AA 电池放入一段铜线圈（非漆包线）中，电池能够在线圈中跑动（具体装置如图 1，图片来源于 Draft\_2016\_IYPT\_Reference\_kit）。



图 1 磁力小火车装置图

闫峰在一篇发表于《中学物理教学参考》上的名为《磁动力小火车的驱动原理》的文章中指出“小车”的动力来源于线圈电流在线圈两端产生的不均匀磁场，并强调要使“小车”运动，需使两端磁铁同极性朝外。而耶鲁大学学者 Stephen Irons 在发表于 The Physics Teacher 上的一篇名为 The dipolar express : An electromagnetically driven train 的文章中给出公式： $F = \nabla[m \cdot B(r)]$  ( $m$  为磁铁的磁化强度， $B(r)$  为磁铁所在处磁感应强度) 来表达磁铁在不均匀磁场中的受力，并指出随“小车”运动速度增大，线圈切割“小车”周围磁感线所产生的反电动势增大，使得“小车”受动力减小，再加上摩擦力的存在，“小车”的运动速度有上限。然而以上两位学者的文章以及目前其他学者对于“磁力小火车”的研究均未涉及“小车”平衡速度与线圈参数、电池参数和磁铁参数的定量关系。

本文通过对“小车”运动过程中具体受力做理论推导，得出“小车”平衡速度的表达式。通过实验测得相关参量，做出小车速度随相关参数变化的理论图像，并通过实验验证“小车”速度与不同参数的关系，进而得出“小车”运动规律。

### 三、理论推导

#### (I)平衡速度推导

“小车”运动过程中的动力源于磁铁在闭合回路两端的不均匀磁场中所受合力(如图2, 图片来源于《磁动力小火车的驱动原理》\_闫峰)。利用毕奥萨伐尔定律, 计算通电螺线圈在空间某一点的轴向磁感应强度:

$$B_z = \int dB_z = \frac{n\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{R(R-y_0 \sin \theta)}{r^3} dz \right] d\theta^{[3]}$$

$n$  为线圈匝数密度,  $\mu_0$  为真空中磁导率,  $I$  为线圈中电流,  $L$  为在闭合回路中的线圈长度(即“小车”长度),  $R$  为线圈半径。

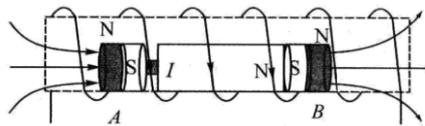


图2 “小车” 两端不均匀磁场示意图

两端磁铁水平方向上受到的合动力为:

$$F=2 \iiint \nabla (\vec{M} \cdot \vec{B}) dV^{[6]}$$

其中 $\vec{M}$ 为磁铁磁化强度,  $\vec{B}$ 为磁铁体积微元所在处磁感应强度,  $dV$  为磁铁体积微元。基于两点理想化处理: ①磁铁均匀磁化②磁铁磁化强度 $\vec{M}$ 沿轴向, 可将上述受力公式进一步转化为:

$$F = 2M \cdot \iiint \frac{\partial B_z}{\partial z} dx dy dz$$

在“小车”的运动过程中, 线圈切割“小车”周围磁感线产生反电动势, 表达式为:

$$U = v \cdot \sum_{k=1}^{k=n \cdot L} \int_0^{2\pi} B_r(x, y, z) \cdot R \cdot \theta d\theta$$

$B_r$ 为线圈长度微元上的径向磁感应强度大小,  $v$  为“小车”运动速度。

本研究将“小车”在运动过程中所受摩擦力处理为常数 $f_0$ 。

综上, 对“小车”平衡状态下动力等于摩擦力列受力平衡式, 而考虑到线圈中电流为 $\frac{U_0 - U}{R'}$  ( $U_0$  为电池电压,  $R'$  为闭合回路中的电阻)。可得出受力平衡状态下“小车”的速度为:

$$v = \frac{U_0 - \frac{4\pi f_0 \cdot R'}{2M \cdot \mu_0 n \cdot \iiint \frac{\partial \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{LR(R-y_0 \sin \theta)}{r^3} dz \right] d\theta \right\}}{\partial z} dx dy dz}}{\sum_{k=1}^{k=n \cdot L} \int_0^{2\pi} B_r(x, y, z) \cdot R \cdot \theta d\theta}$$

式中  $M$ ,  $f_0$ ,  $\iiint \frac{\partial \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{LR(R-y_0 \sin \theta)}{r^3} dz \right] d\theta \right\}}{\partial z} dx dy dz$ ,  $\sum_{k=1}^{k=n \cdot L} \int_0^{2\pi} B_r(x, y, z) \cdot R \cdot \theta d\theta$  的计算需结

合实验数据。

## (II) 相关参数的测定和计算

**M 的测定:** 利用软件 COMSOL Multiphysics 5.0(一款多物理场仿真软件)建立磁铁模型(如图 3), 做出与实验测定相同位置上的磁感应强度图像, 通过调试材料的磁化强度, 使得做出的理论图像与实验测定的数据吻合较好(如图 4), 以此作为实验用磁铁的磁化强度 M。

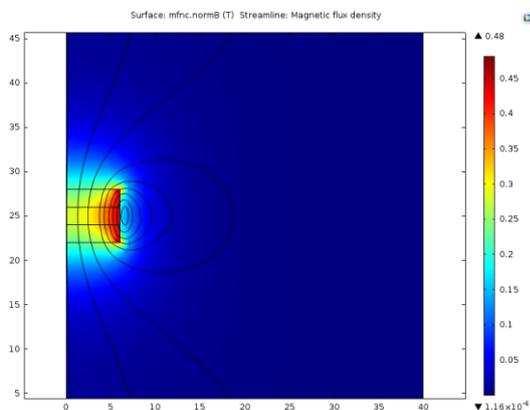


图 3 COMSOL 模拟磁铁在空间产生的磁场

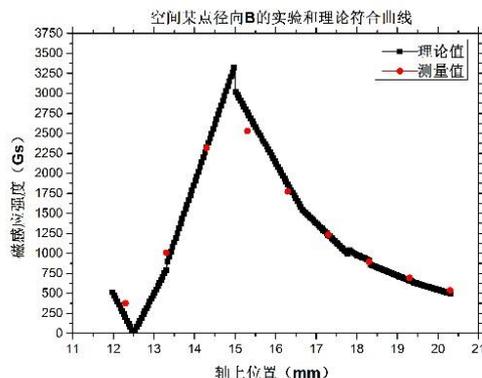


图 4 磁铁磁场理论与实验图像

**$f_0$  的测定:** 利用棉线将“小车”与 i0lab 的拉环相连接, 固定 i0lab, 将“小车”置于线圈中, 保持棉线水平, 拖动线圈, 读取并记录摩擦力数据。

$$\iiint \frac{\partial \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{LR(R-y_0 \sin \theta)}{r^3} dz \right] d\theta \right\}}{\partial z} dx dy dz$$

**的计算:** 利用 MATLAB 编程计算, 值得注意的是, 该积分式无解析解, 因此在编程时采用 Monte Carlo method(以概率统计理论为指导的一类数值计算方法, 也称统计模拟方法)为算法, 此处略去程序代码。

**$\sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_r(x, y, z) \cdot \mathbf{R} \cdot \theta d\theta$  的转化和计算:** 首先, 构建“小车”模型。根据“小车”的磁场演示结果(如图 5, 电池并非全部被磁化, 而仅仅是中间部分), 利用 COMSOL Multiphysics 5.0 构建“小车”模型(如图 6), 根据所构建的模型画出的理论图像与实际测量数据吻合地较好(如图 7)。

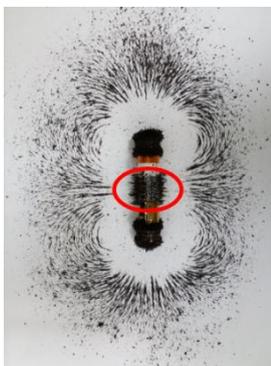


图 5 “小车”磁场的铁屑演示

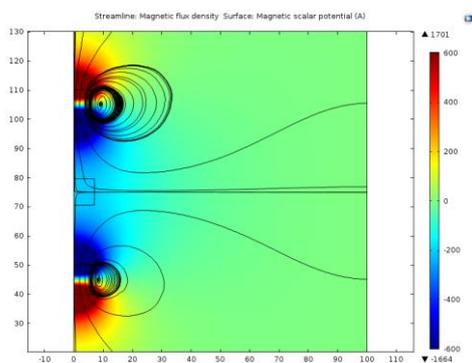


图 6 “小车”周围磁场理论图像与实验图像

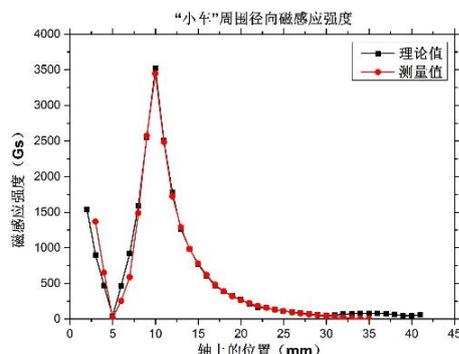


图 7 “小车”周围磁场理论图像与实验图像

对“小车”在线圈中运动的真实情况做适当简化，将真实情况下“小车”与线圈的非同轴心关系简化为同轴心关系，进而将复杂的积分求和算式转化为易于计算的线积分：

$$\sum_{k=1}^{k=n \cdot L} \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} d\theta = 2\pi n R \int_0^L \mathbf{B}_r d\mathbf{l}$$

其中  $\int_0^L \mathbf{B}_r d\mathbf{l}$  可通过 COMSOL 软件添加 Cut Line 2D, 并利用 Derived Values 功能计算得到。

### (III) 理论图像的绘制

基于上述计算结果，利用 MATLAB 做出  $v$  和  $U_0$  (如图 8)， $v$  和  $R$  (如图 9)， $v$  和  $n$  (如图 10)， $v$  和计入磁铁个数  $N$  (如图 11, 这里  $N$  指在一个  $\varnothing 15\text{mm} \cdot 5\text{mm}$  的磁铁上加入的  $\varnothing 12\text{mm} \cdot 2\text{mm}$  的磁铁的个数，选择添加直径更小的磁铁为控制“小车”与线圈接触点位置不变) 的理论关系图。

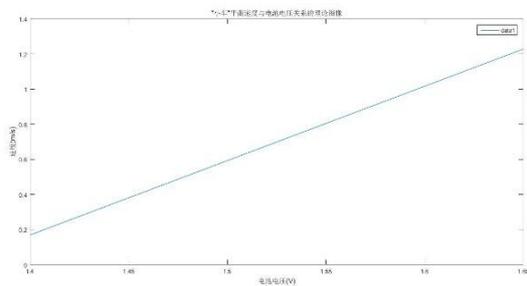


图 8  $v$  和  $U_0$  的理论关系图

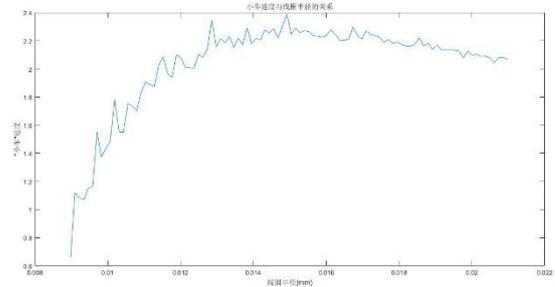


图 9  $v$  和  $R$  的理论关系图

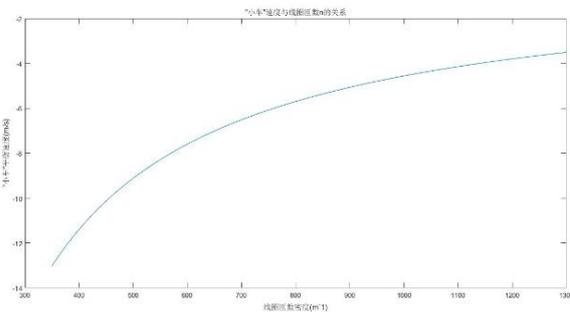


图 10  $v$  和  $n$  的理论关系图

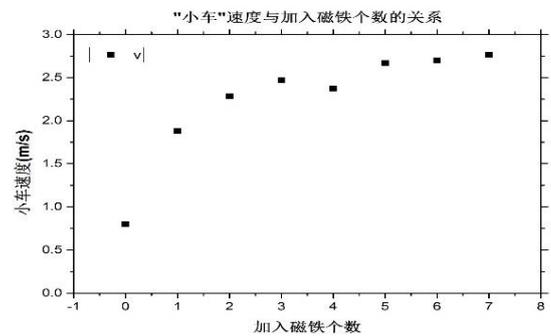


图 11  $v$  和  $N$  的理论关系图

需指出理论速度的范围与真实水平有一定差距，因  $v$  的理论公式对各参数较敏感，相关参数的微小误差能使得理论图像的纵坐标水平发生较大变化，但对曲线变化趋势影响较小。

图 8 理论图像因考虑到在电池在电压为 1.4V-1.65V 的范围内，内阻变化不大，因此认为闭合回路中的电阻保持不变，显然，平衡速度与电池电压成正相关关系。

图 9 曲线的波动因  $\frac{\partial \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{LR(R-y_0 \sin \theta)} \frac{dz}{r^3} \right] d\theta \right\}}{\partial z} dx dy dz$  随  $R$  的变化发生变化，而该式由 Monte Carlo method 计算得到，因使用随机数计算，计算结果非确定值，使得绘制出的理论图像表现为小范围波动。随线圈半径增大，在线圈两端轴向磁感应强度的梯度变大和闭合回路中电阻增大的两变化影响下，该曲线呈现先增大，后减小的趋势。

图 10 中随着  $n$  的增大，接入闭合回路的铜线电阻增大以及相同的“小车”速度切割线圈产生的反电动势增大使得阻碍作用增强，而在相同电流情况下，线圈两端轴向磁感应强度的梯度变大使得磁铁动力增大。在此三方面作用下， $v$  随  $n$  增大而增大，但趋势变缓。

图 11 中增加磁铁个数使得在线圈中电流相同的情况下，“小车”受到更大的驱动力，同时使得在相同速度的情况下，“小车”切割磁场产生的反电动势增大。在两者的共同影响下， $v$  与  $N$  的图像趋势中有个“凹陷”。(图 11 通过 MATLAB 计算实验数据点，利用 Origin 9.0 作图)

#### 四、 实验装置及过程

实验仪器：磁铁( $\varnothing 15\text{mm} \cdot 5\text{mm}$ 、 $\varnothing 15\text{mm} \cdot 3\text{mm}$ 、 $\varnothing 12\text{mm} \cdot 2\text{mm}$ )、GD 超霸碱性 5 号电池、铜线圈(铜线直径 0.8mm)、棉线、红色塑料泡沫小块、JVC GC-P100 摄像机、三脚架、VC9807A+数字万用表。

实验过程：将电池与磁铁相吸构成“小车”装置(注：磁铁需使相同极性朝外)，用棉线将红色塑料泡沫小块与“小车”连接(棉线长度稍长于线圈长度)。记录所要探究的影响因素的数值(探究电池电压对“小车”平衡速度的影响实验中，因电池电压在小车进入线圈前与离开线圈后发生较大改变，需取两时刻电压平均值)，将“小车”放入线圈中，利用水平放置在三脚架上的 JVC GC-P100 摄像机拍摄红色塑料泡沫小块的运动情况(以塑料泡沫小块运动速度表征“小车”的运动速度)，并用于 Tracker 4.93(一款物理视频分析软件)分析，得到相应速度。

实验装置如图 12，Tracker 4.93 分析界面如图 13。



图 12 “磁力小火车”实验装置

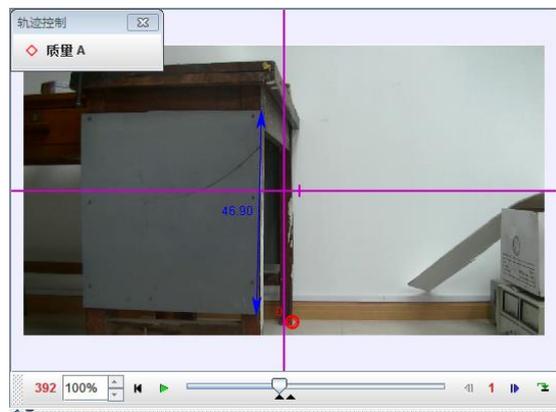


图 13 “磁力小火车”实验装置

#### 五、 实验结果及讨论

本实验测量了  $v$  与  $U_0$ (如图 14)、 $v$  与  $n$ (如图 15)、 $v$  与  $N$ (如图 16)的关系。

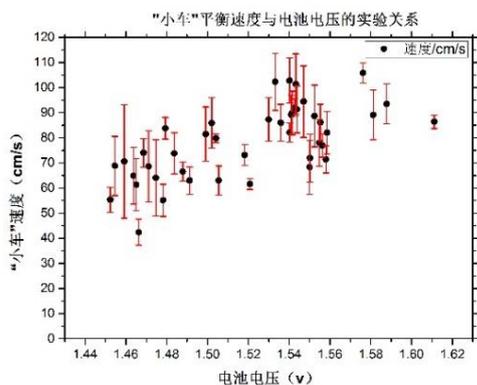


图 14 v 和  $U_0$  的实验关系图

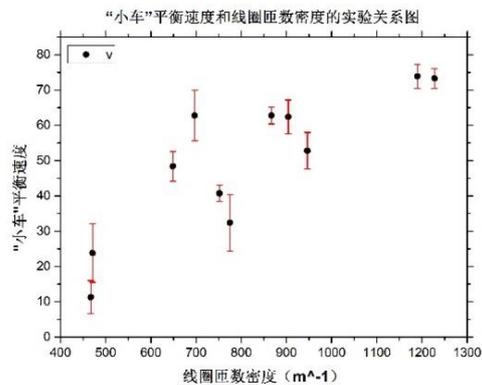


图 15 v 和 n 的实验关系图

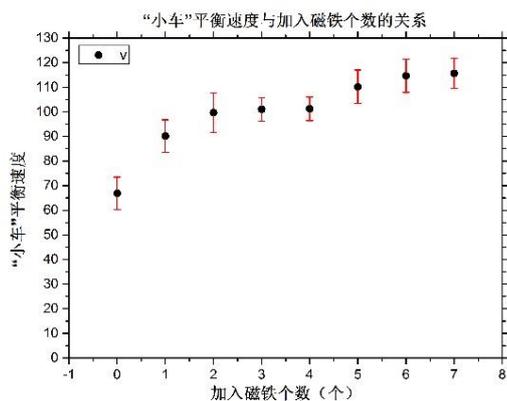


图 16 v 和 N 的实验关系图

实验数据有一定的不确定度，原因主要为以下两点：①“小车”运动过程中接触电阻和摩擦力不断变化② Tracker 分析视频时每秒帧数为 50 帧，不够精确。

各图像的趋势与理论图像吻合程度较好。

## 六、参考文献

- [1] 郭硕鸿 《电动力学(第三版)》
- [2] 高伟平 《利用 MATLAB 分析有限长螺线管外部的电磁场强度》
- [3] 惠小强 《有限长通电螺线管空间的磁场分布》
- [4] J. T. Conway and C. Agder. Exact solutions for the magnetic fields of axisymmetric solenoids and current distributions. IEEE Trans. on Magnetics, 37, 4, 2977-2988 (2002)
- [5] R. H. Jackson. Off-Axis Expansion Solution of Laplace's Equation: Application to Accurate and Rapid Calculation of Coil Magnetic Fields. IEEE Trans. on Electron Devices 46, 5, 1050-1062 (1999)
- [6] The dipolar express\_ An electromagnetically driven train