

夫兰克-赫兹实验曲线的理论分析

051920 蒋文超

摘要: 本文依据电子和汞的激发机制,推导出在测量汞的第一激发态能级实验中管电流曲线的方程,辅助以计算机模拟作图,得到新的观点,阐明了实验中管电流曲线的振荡变化的直接原因。

关键词: 夫兰克-赫兹实验; 管电流曲线; 理论分析; 碰撞激发; 汞; 计算机模拟

1、引言: 夫兰克-赫兹实验是近代物理学发展中的一个重要实验,是探索原子能级结构的有效手段。在利用夫兰克-赫兹实验测量汞的第一激发态能级的实验中,管电流曲线随着扫描电压的增大而振荡上升,并且其包络呈现纺锤形(图1[1])。由于实验本身的复杂性,其管电流曲线并没有得到很好的理论解释。传统上[2],人们认为管流的振荡突变是因为电子使汞激发失去动能从而无法通过反向偏压形成管电流,从而造成了管电流的突然变小,而且对于管电流的谷值包络曲线,用了 $I=C\text{Exp}(aV), a > 0$ 的形式拟合。我认为这是不妥的,

因为当电子的动能大于汞的第一激发能级的时候就有可能使汞激发,所以,在任何的扫描电压下,都有电子能够激发汞。所以传统的解释过于笼统而不能解释为何当扫描电压达到某些值的时候会出现管电流的突变,而这些值的间距正好是汞的第一激发能级。对于谷值包络曲线采用的方程也有问题,因为事实上,当 $V \rightarrow \infty$ 时, I 应该趋向饱和,但是这个方程的 I 没有上界。本文的目的是电子与汞原子的激发机制并辅助以计算机模拟的办法来解释管电流曲线的成因。

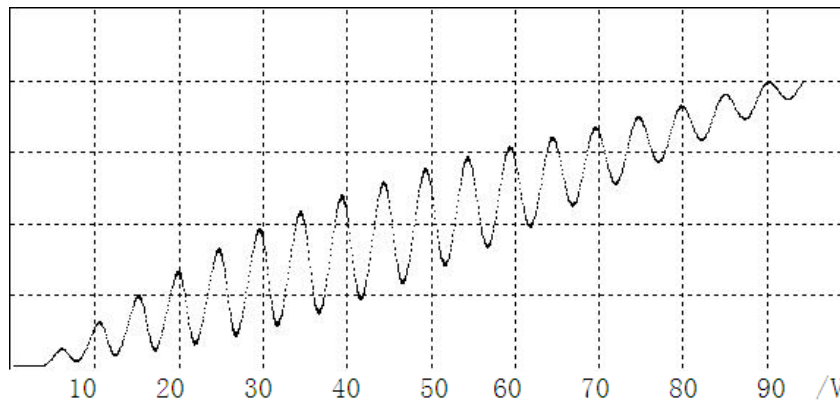


图1: 汞第一激发能态曲线
(温度: 170°C
反向电压 $V_{GP}=1.5V$
灯丝电压: 1.8V)

2、管电流曲线的方程推导与计算机模拟

2.1 实验仪器及其参数介绍:

复旦双栅柱面型四级式夫兰克-赫兹管

控制栅到加速栅间距为 $H=5\text{mm}$, 所以当扫描电压为 V 时, 电场强度为 $E=\frac{V}{H}$ 。

计算机软件为 Mathematic 5.0。

2.2 理论模型:

假定:

- 1、电子从阴极出射时,其初始动能为零,所以电子的动能全部由扫描电场的加速产生。
- 2、当电子能量大于 V_e 时,电子将有可能与汞原子发生非弹性碰撞,使之激发,电子损失 V_e 的动能。不考虑低能电子和弹性碰撞对于管流的影响。汞非弹性散射截面为 s , 电子非弹

性碰撞的自由程为 $\lambda = \frac{4kT}{\sigma P}$ ， P 为汞的饱和蒸汽压。那么自由运动了距离 S 而没有发生非弹性碰撞的电子比例为 $\eta = \text{Exp}(-S/\lambda)$ 。而当扫描电压较大时，使电子加速到 V_e 所需的 S 很小，

那么大部分电子的能量都可以达到激发汞原子的程度。而电子和汞原子发生弹性碰撞几乎不损失动能，所以忽略这两部分的影响。

3、扫描电压 V 总可以写成 $V = n \times V_e + V_R$ 的形式， V_e 为激发能级，对于汞 $V_e = 4.9V$ ， V_R 随着扫描电压的变化在 $0 \sim 4.9V$ 之间变化。由于 V 随空间均匀变化，可以把夫兰克-赫兹管分为几层，每一层的电压为 V_e ，那么最后一层为 V_R （图 2）。

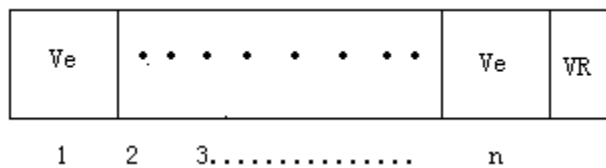


图 2：夫兰克-赫兹管分层示意图

那么每一层的宽度为 $d = \frac{V_e H}{V}$ ， n 较大时，当扫描电压 V 在 $nV_e \sim (n+1)V_e$ 之间变化， n

个 V_e 所占的总宽度几乎是不变的，那么可以认为，当扫描电压 V 在 $nV_e \sim (n+1)V_e$ 之间变

化时，从第 nV_e 层到 V_R 层交界面上出射的电子在能量分布上是不变的，所以在计算管流时主要考虑这一部分电子。

2.3 管电流方程的推导

在以上的假定下，推导管流曲线方程。

首先推导能量分布函数：

电子动能 $E_k = eV_s = e \frac{SV}{H}$ ， S 为自由运动路程，那么动能小于 E_k 的电子数比例为

$(1 - \text{Exp}(-\frac{V_s H}{V\lambda})) = \int_0^{V_s} f(v) dv$ ，那么， $f(v_s) = \frac{H}{V\lambda} \text{Exp}(-\frac{HV_s}{V\lambda})$ ，即 $f(v_s) dv$ 为动能在 eV_s 附近的电子比例。

管电流为能够通过反向电压 V_{GP} 电子所形成，这些电子可以分为两个部分：

1、在 V_R 层中激发汞原子后仍能够通过 V_{GP} 。

2、在 V_R 层中激发汞原子后不能通过 V_{GP} 。

首先计算第一部分电子，对于这部分电子，所要满足的条件是 $V_s > V_e + V_{GP} - V_R$ ，这部分

电子将全部通过 V_{GP} 形成管电流。其比例为 $h_1 = \text{Exp}(-\frac{H(V_e + V_{GP} - V_R)}{V\lambda})$ 。

第二部分电子， $V_s < V_e + V_{GP} - V_R$ ，这是只有在 V_R 层内不发生碰撞才可以形成管电流。但是，

电子的能量首先要达到 eV_e 才能够发生非弹性碰撞，不同能量的电子在 V_R 层内要加速

不等长的路程才能达到 eV_e ，那么不同能量的电子的激发路程也不同。那么能量在 eV_s 附近

的电子要经过 $S = \frac{H(V_e - V_s)}{V}$ 才能达到激发能级，那么剩余的路程为

$S_R = \frac{H(V_s + V_R - V_e)}{V}$ ，那么这些电子要通过反向偏压 V_{GP} ，必须在 S_R 内不激发汞原子，

即不发生非弹性碰撞，所以可以形成管电流的电子比例为：

$$dh = f(v_s) \text{Exp}\left(-\frac{H(V_s + V_R - V_e)}{V\lambda}\right) dv = \frac{H}{V\lambda} \text{Exp}\left(-\frac{H(2V_s + V_R - V_e)}{V\lambda}\right)$$

其中， $V_e - V_R < V_s < V_{GP} - V_R + V_e$ 。

所以这部分电子的总比例为：

$$h_2 = \int_{V_e - V_R}^{V_{GP} - V_R + V_e} f(v_s) \text{Exp}\left(-\frac{H(V_s + V_R - V_e)}{V\lambda}\right) dv。$$

所以一共能够通过 V_{GP} 形成管电流的电子比例为 $h = h_1 + h_2$ 。

2.4 管电流曲线模拟

实验中， $V_e = 4.9V$, $H = 5mm$, $T = 170^\circ C$ ，参考[3]，在汞原子对能量在 $4.9eV$ 附近的电子激

发截面约为 $\sigma = 7 \times 10^{-14} mm^2$ ，那么其自由程为 $\lambda = 0.44mm$ ，将这些参数带入方程拟合得到管流曲线图（图3）。

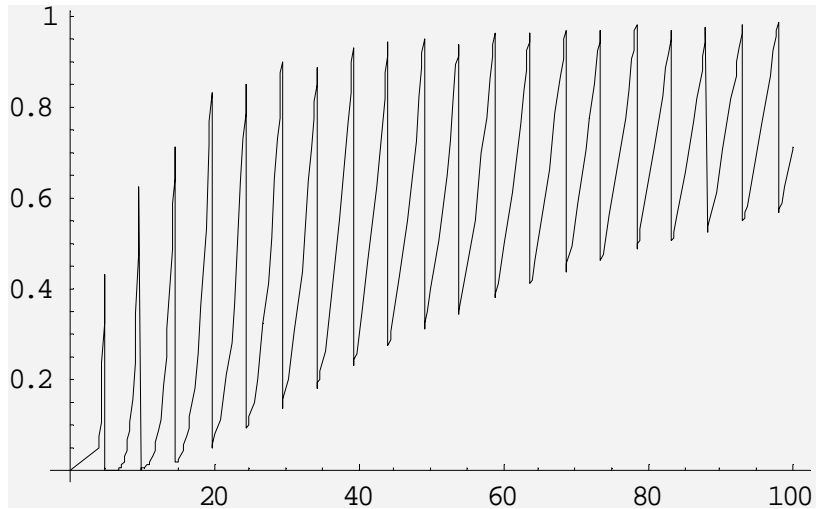


图3：计算机模拟的管电流曲线

由于之前的假定基本上都是在 V 较大的情况下作出的，而且这些假定比较粗糙，所以电流曲线与实际的曲线偏差很大。但是，从中可以看到电流的突变是发生在 $V = n \times 4.9V$ 附近，

其中 $V < n \times 4.9V$ 即 $V_R \sim 4.9V$ 时，对应的是峰值， $V > n \times 4.9V$ 即 $V_R \sim 0V$ 时，对应的是

谷值。这符合实验的结果。分别固定 $V_R = 4.7V$ 和 $V_R = 0.2V$ 可以近似的得到峰和谷的包络线（图4）。

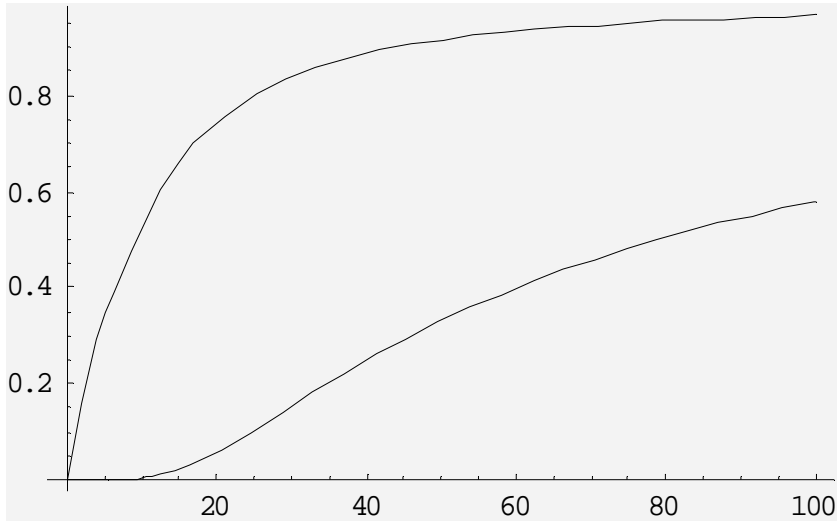


图 4：峰和谷的包络线图，上面的曲线为峰的包络，下面的为谷的包络。

其中谷值的包络线与实际的偏差较大。

在实验中，还有一个现象，就是峰谷间距随着扫描电压的变化呈现先变大后变小的趋势（图 5）。

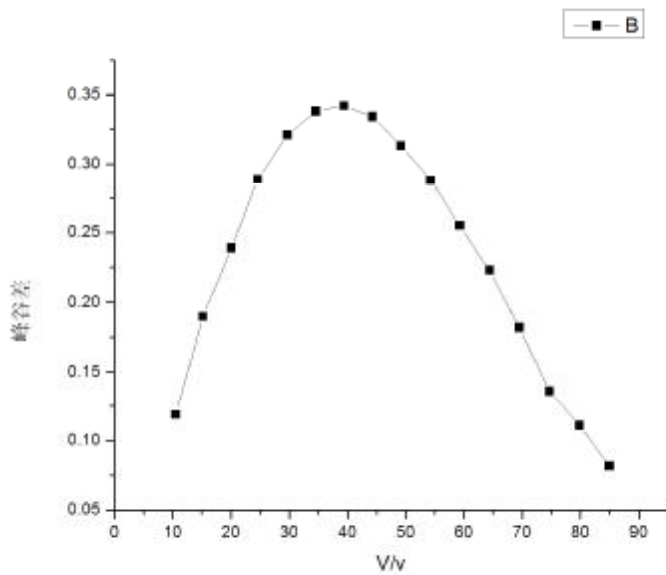


图 5：实验所得的峰谷间距图，y 轴的数据不代表比例差

利用上面的推导结论通过计算机模拟也可以得到类似的图线（图 6）：

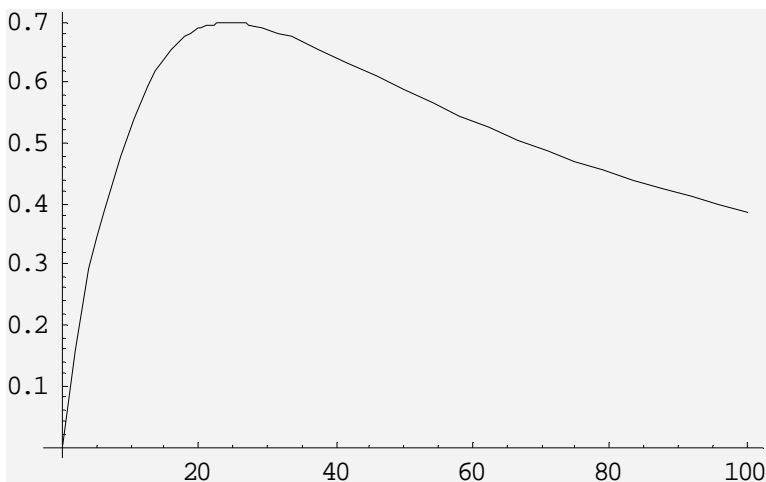


图 6：模拟所得的峰谷间距图线

相比实际的曲线，模拟的曲线过早的趋向极值，并且衰减较慢，但还是反映了整体的趋势。

3、结论：

导致夫兰克-实验中管电流变化的直接原因并不是由于电子使汞原子激发损失能量，从而电子无法通过 V_{GP} 反向偏压。因为根据之前的假定和推导，激发的实质是一种非弹性碰撞，而激发现象的发生与扫描电压的大小无关，在扫描电压不断增大的过程中，激发是一直在发生的，所以并不像传统的解释所说的那样，因为在某个扫描电压下电子使汞原子激发导致了管电流的突变。管电流振荡现象的直接原因是：在当 V 在 $V=n \times 4.9V$ 附近从 $V < n \times 4.9V$ 变化到 $V > n \times 4.9V$ 时， V_R 发生了突变：从接近 $4.9V$ 突变到 0 ，这样导致扫描电压在夫兰克

-赫兹管空间中的结构（如图 2）发生了突变，即 V_R 层宽度从最大突然变为 0 ，而方程的形式也发生了突变，从而其值也产生了突变，管电流产生了振荡的现象。并且，利用本文推导的得到的电流谷值在 $V \rightarrow \infty$ 时趋向一个有限的极值。

从以上的结果对比可以看出，在计算机上利用本文提出的假定和推导结果模拟出的图线虽然不能精确的符合实验的结果，但是在变化的趋势上与实验结果符合较好，可以半定量的解释利用夫兰克-赫兹实验测量汞第一激发态能级的实验中管电流的曲线变化，尤其成功的说明了管电流在扫描电压在 $V=n \times 4.9V$ 附近发生突变的原因，但是对于谷值包络线的方程推导仍然不成功。

致谢： 本文的实验结果来自罗胤同学。

参考资料：

[1]:罗胤同学的实验结果

[2]:潘玉莲 王煜 潘振元 《夫兰克-赫兹实验中 Hg 的第一激发点位的测量》

[3]: 复旦大学编《近代物理实验》