

冉绍尔-汤森效应

建模分析

刘允文 物理学系

16307110096

Outline

- ★利用三维有限深球形形势阱解释冉绍尔-汤森效应
- ★定性解释灯丝电压对散射截面曲线的影响
- ★建模分析几何因子随加速电压的变化规律

三维有限深球形势阱

势能表达式:
$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

径向薛定谔方程:
$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = \begin{cases} -k'^2 u, & r < a \\ -k^2 u, & r > a \end{cases}$$

分波
近似

$u(r) = rR(r)$, $R(r)$ 为径向波函数

两区域内的波矢:
$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

三维有限深球形势阱

最低阶响应 ($l=0$) :
$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \begin{cases} -k'^2 u, & r < a \\ -k^2 u, & r > a \end{cases}$$

试解:
$$u(r) = \begin{cases} A \sin kr, & r > a \\ C \sin(k'r + \delta_0), & r < a \end{cases}$$

相移形式的分波近似

函数值连续: $A \sin ka = C \sin(k'a + \delta_0)$

一阶导连续: $kA \cos ka = k'C \cos(k'a + \delta_0)$

$$\frac{1}{k} \tan ka = \frac{1}{k'} \tan(k'a + \delta_0)$$

三维有限深球形势阱

$$k' \tan ka = k \tan(k'a + \delta_0) = k \frac{\tan k'a + \tan \delta_0}{1 - \tan k'a \tan \delta_0}$$

$$\Rightarrow \tan \delta_0 = \frac{k' \tan ka - k \tan k'a}{k + k' \tan ka \tan k'a}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(k' \tan ka - k \tan k'a)^2}{(k + k' \tan ka \tan k'a)^2 + (k' \tan ka - k \tan k'a)^2}$$

其中： $k' = \sqrt{k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}}$

$$QL = n\sigma L \propto \sigma$$

三维有限深球形势阱

Mathematica作图

```
In[3]:= Manipulate[Plot[  
  
$$\frac{1}{z^2} \frac{\left(\sqrt{z^2 + q} \tan[z] - z \tan[\sqrt{z^2 + q}]\right)^2}{\left(z + \sqrt{z^2 + q} \tan[z] \tan[\sqrt{z^2 + q}]\right)^2 + \left(\sqrt{z^2 + q} \tan[z] - z \tan[\sqrt{z^2 + q}]\right)^2},$$
  
  {z, 0, 15}], {q, 0, 20}]
```

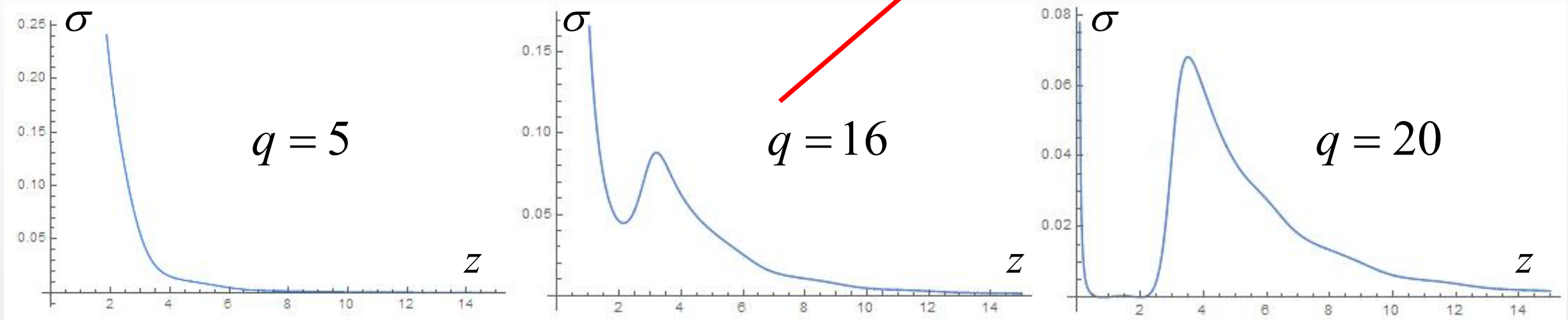
$$z = ka, \quad q = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}, \quad \sqrt{z^2 + q} = k'a$$

q 值可调，以寻找适当的势阱深度，与实验现象吻合

三维有限深球形势阱

作图结果 (σ 为相对值)

可以定性预测
冉绍尔-汤森效应



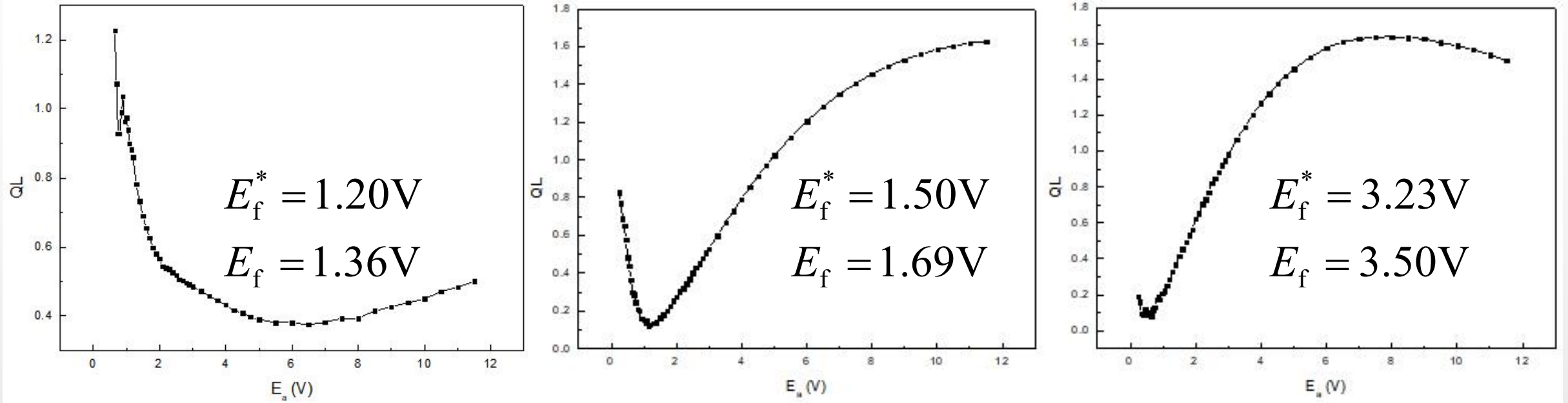
q 值越大, 峰谷越明显

当 q 取15~19时, 图像与实验结果最接近

由于模型粗糙且只取 $l = 0$ 的分波, 能量增大后图像逐渐不准确

灯丝电压对实验结果的影响

三种不同灯丝电压下的冉绍尔-汤森曲线



★ E_f^* 和 E_f 分别为低温测量和室温测量时的灯丝电压

★ 为保证低温与室温测量时阴极电流一致, E_f 大于 E_f^*

灯丝电压对实验结果的影响

现象：随着灯丝电压逐渐增大，冉绍尔-汤森曲线的峰和谷都逐渐向左移动。为测量完整曲线，必须牺牲准确度，增大灯丝电压和电表量程。

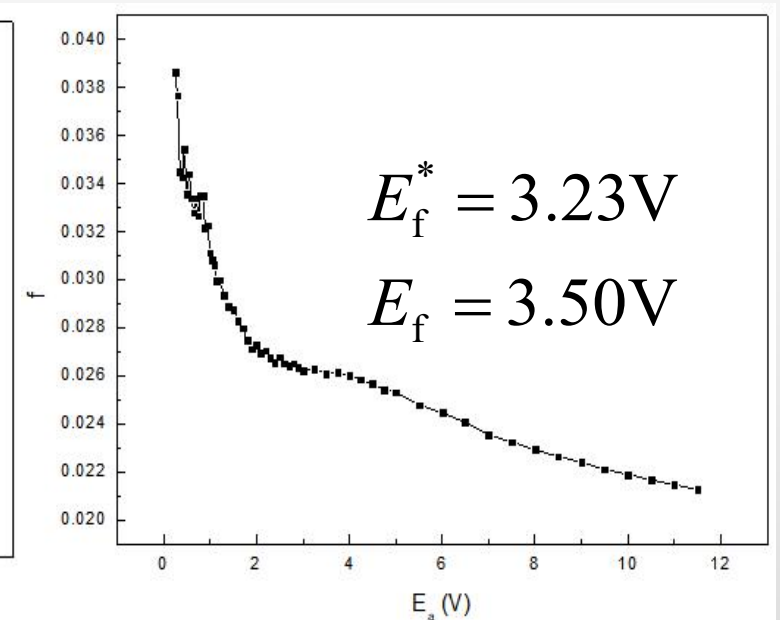
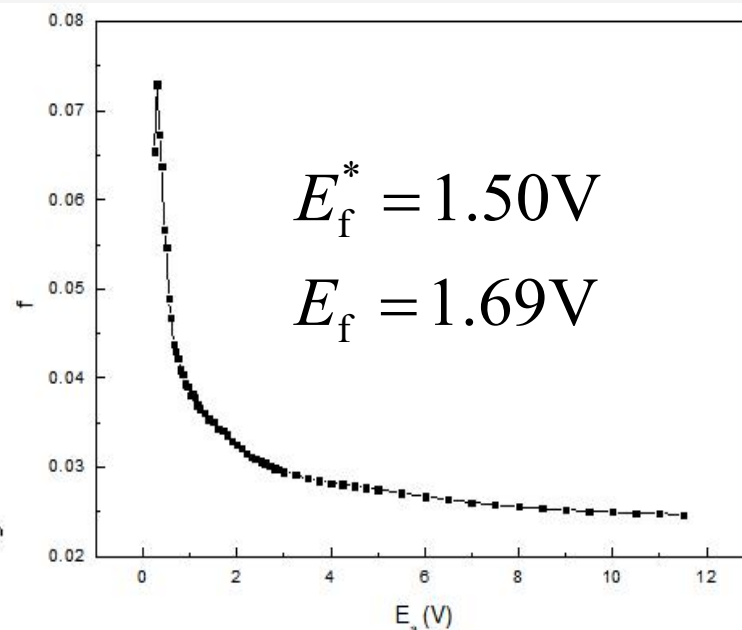
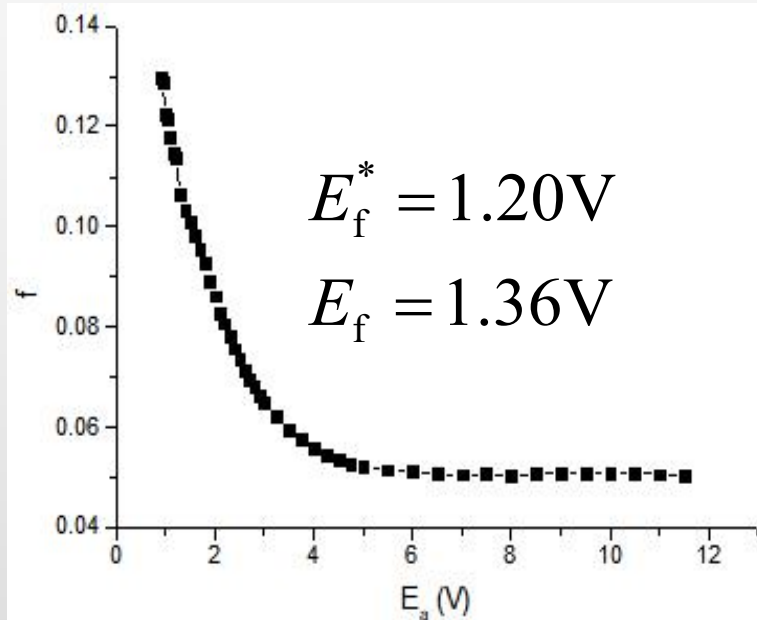
原因：散射的能量极值点是固定的，而热运动动能越大，达到极值点所需的加速电压就越小。

加速电压不能完全反映散射电子的能量。

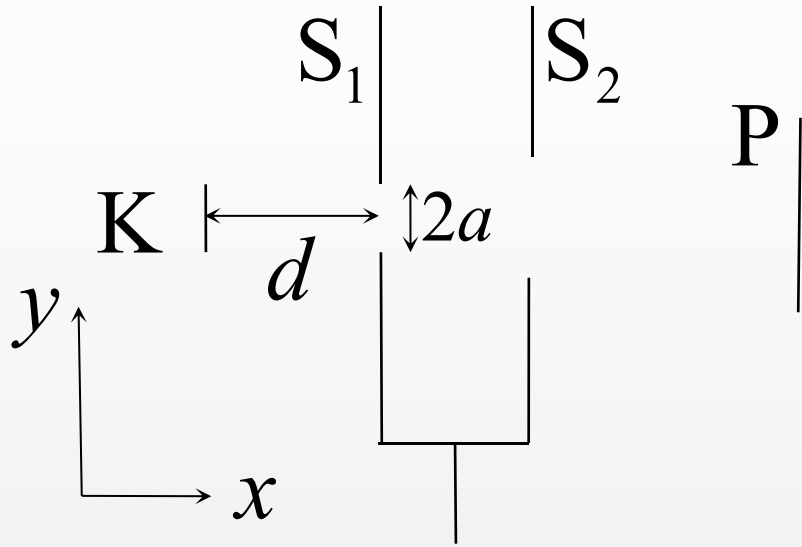
几何因子的变化规律

表达式: $f = \frac{I_0}{I_{S1}} \approx \frac{I_P^*}{I_S^*}$

现象: 不论灯丝电压如何, 几何因子总是随着加速电压的增大而减小。



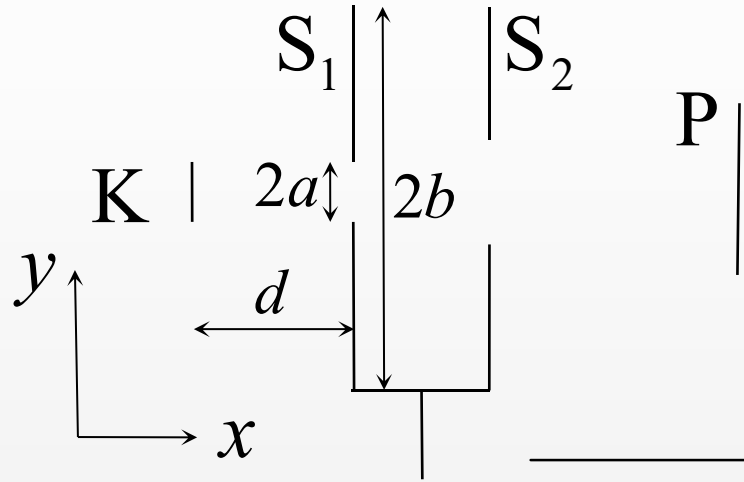
几何因子的变化规律



考虑二维情形，即体系在垂直纸面方向 (z) 无限宽广，以方便演算。

对于阴极，只有费米面附近的电子可以逸出。假设它们都具有费米速度 v_F ，且出射电子各向同性。

几何因子的变化规律



设电子初速度与 x 轴夹角为 θ

若电子能通过 S_1 , 则

$$\frac{d}{v_F \cos \theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2eE_a}{m}}} < \frac{a}{v_F \sin \theta} \Rightarrow \theta < \arctan \frac{a}{d} + \arcsin \left(\frac{1}{v_F} \sqrt{\frac{eE_a}{2m}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right)$$

若电子不会从 S_1 外侧飞走, 则同理有

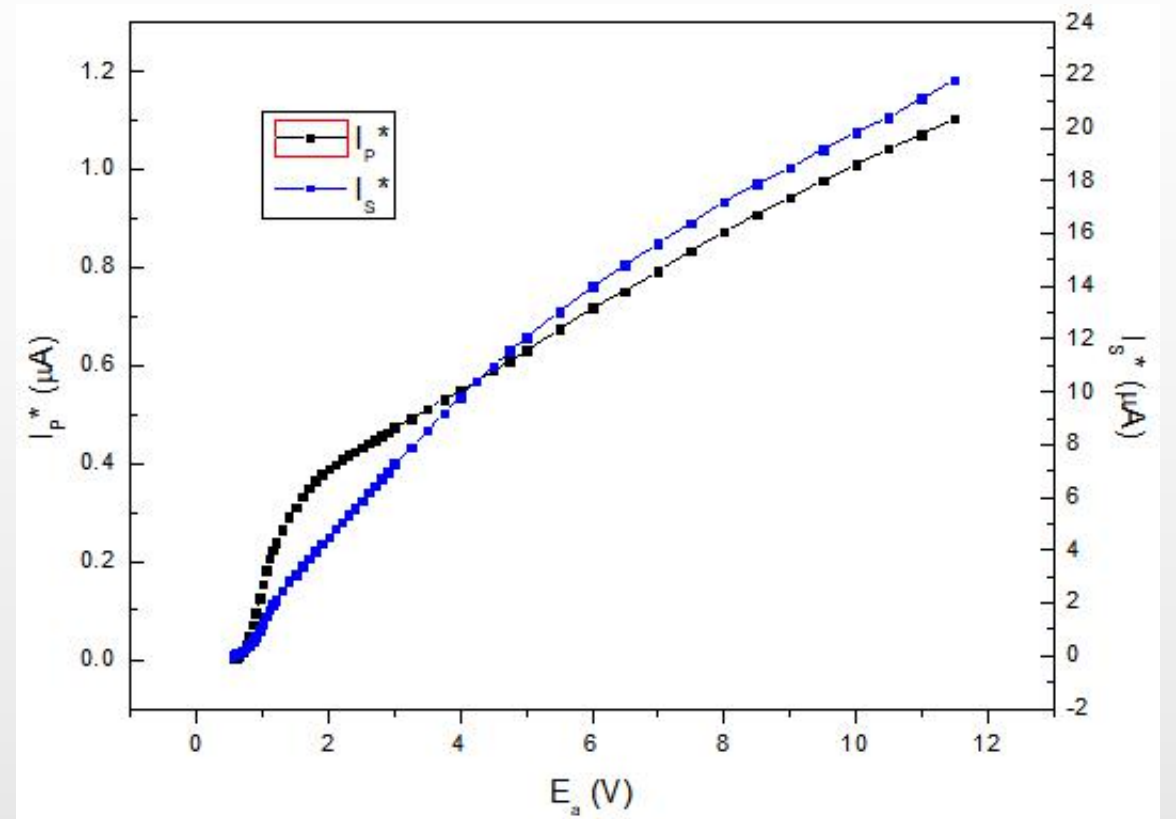
$$\frac{d}{v_F \cos \theta + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2eE_a}{m}}} < \frac{b}{v_F \sin \theta} \Rightarrow \theta < \arctan \frac{b}{d} + \arcsin \left(\frac{1}{v_F} \sqrt{\frac{eE_a}{2m}} \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right)$$

几何因子的变化规律

$$\theta_{P_{\max}} \approx \frac{a}{d} + \frac{1}{v_F} \sqrt{\frac{eE_a}{2m}} \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

$$\theta_{S_{\max}} \approx \frac{b}{d} + \frac{1}{v_F} \sqrt{\frac{eE_a}{2m}} \frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}}$$

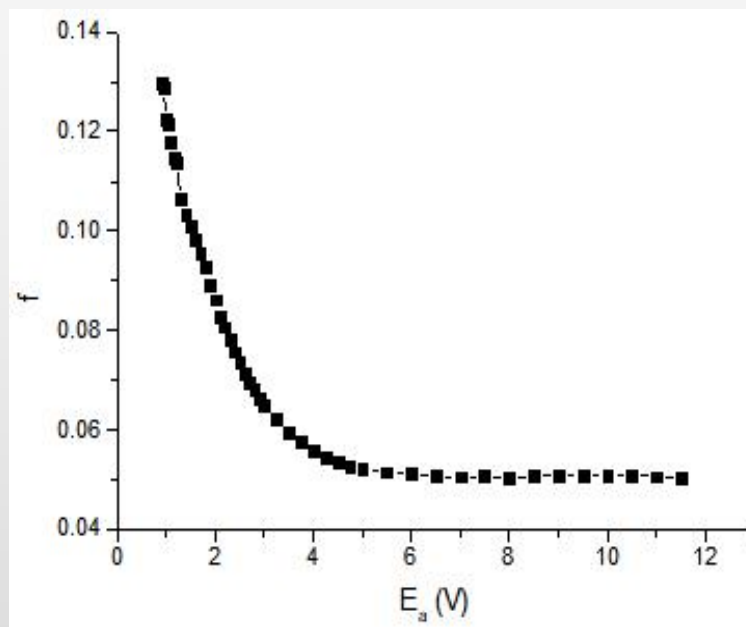
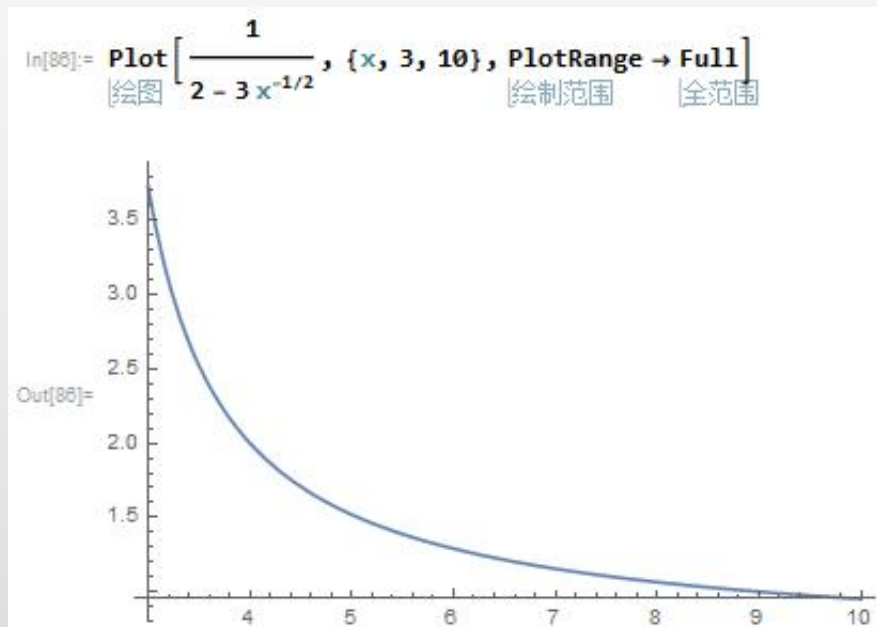
加速电压越大，则 θ_{\max} 越大。
打在 S_1 上和进入开口的电子都
越多，从而 I_P^* 和 I_S^* 都增大。



几何因子的变化规律

$$f = \frac{I_P^*}{I_S^*} \approx \frac{\theta_{P\max}}{\theta_{S\max} - \theta_{P\max}} = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b} \frac{\sqrt{\frac{2m}{eE_a}} + \frac{d}{v_F} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + d^2}} \right)}{1 + \frac{d}{v_F} \frac{1}{\sqrt{a^2 + d^2}}} \right)^{-1} = \frac{1}{A - BE_a^{-1/2}}$$

几何因子不完全由几何尺寸决定，与加速电压负相关



定性基本吻合

实验结论

- 1、通过实验验证了冉绍尔-汤森效应，并通过一维有限深方势阱和三维有限深球形势阱定量解释了散射截面随加速电压的变化关系。
- 2、灯丝电压会影响出射电子的速度，因此灯丝电压越大，则散射截面曲线越往左偏。
- 3、实验测得几何因子 f 随加速电压的上升而下降，并对其进行了定量解释：加速电压越大，就有越多电子可以通过小孔并到达P极。

参考文献

[1]An Introduction to Quantum Physics (Norton, 1978), A.P. French and E.F. Taylor.

[2]David J. Griffith. 量子力学概论（第二版）[M]. 北京, 机械工业出版社, 2009.8: 268

[3]赵元晟, 贾晓瀚, 姚红英. Ramsauer-Townsend 效应与 Child-Langmuir 定律实验[J]. 大学物理, 2018, 37(10): 47-53

谢谢！
