

# 基于 HTML 的驻波振动问题的物理仿真实验网页设计

陈寅聪 17307110004

**摘要：**由于疫情的影响，学校网上授课的举措迫使实验课程设计学生在家也能完成的仿真实验内容。本文利用 HTML 语言设计了对一维及二维情况下波的传播问题进行教学的物理仿真实验网页，内容涵盖一维驻波、一维行波与克拉尼图形，还给出了网页的设计思路以及仿真实验与现实中的真实实验结果的对比，说明其差异主要来自于真实实验中的复杂的边界条件以及介质的不均匀性。

**关键词：**网页设计；HTML；驻波；克拉尼图形；仿真实验

2020 年 1 月 29 日，教育部有关负责人在接受采访时表示，防控新型冠状病毒肺炎是当前头等重要的大事，各级教育部门正按教育部和当地党委政府统一部署要求，全力防控，坚决防止疫情在学校蔓延，延期开学是其中的一项重要举措。相应地，各学校均采取了网上授课的应对措施，以保证“停课不停教、不停学”。在此特殊时期，实验课程等包含大量学生动手实践内容的课程就面临着无法接触并操作实验仪器的困难，对课程内容的教学造成了极大的困难。因此，实验授课也逐渐改变思路，将重心放在利用电脑设计仿真实验上。仿真实验可以使学生足不出户，无视地域上的限制进行实验，并理解实验原理、掌握实验操作的规范，达到在线授课的效果。

利用电脑设计仿真实验有多种途径，例如利用现有软件进行简单地测量与分析[1]、新开发一个模拟实验的软件[2]等。本文采用的方法为利用 HTML 语言设计用于实验仿真的网页，其好处在于基于 HTML 语言的网页设计有着较为成熟的页面设计与程序运行基础，开发门槛低，且与仿真实验对动画表现与内在计算的需求相契合，还可以进行个性化设计。

本文主要研究的问题是在各个条件下的波的传播问题。一般的力学教科书中，只给出一维振动中的驻波的概念以及形成驻波的条件，并没有更多的深入，学生对于更加普遍的与波的传播相关的问题也就没有更多的了解。基于这一点，本文主要展现了一维情况下的波的传播问题并对二维情况下的驻波，即克拉尼图形进行一定的介绍与演示，通过仿真实验的形式使得学生对于波的传播问题的理解更加透彻，以及对高维情况下的波的行为有一定的了解。

## 一、设计思路及实验原理

### 1.1 仿真实验设计

仿真实验设计的原则是教育性、互动性与仿真性。学生可以通过仿真实验了解到实验背后的物理原理,是对理论课程中的内容的补充;于此同时,学生也要能够亲手进行一些操作,以了解不同实验操作对实验结果的影响并学习实验过程中的操作规范;同时还要注意到仿真实验的模拟与现实生活中的实验现象的不同,需要向学生指出其中的差异以及来源。

基于以上的设计理念,本文设计的仿真实验网页可划分为实验原理、仿真演示及实验展示三个部分。在实验原理部分,网页提供了一维驻波问题、一维行波问题及二维驻波问题的概念讲解与理论推导过程,帮助学生了解实验中的基本原理;在仿真演示部分,网页提供了对一维驻波、一维行波及二维方形薄板上的驻波的数值模拟结果,学生可以通过调节各个参数观察在不同的边界条件、介质长度及时刻下波的形状,从而更加深刻地理解波的传播过程以及驻波的形成原理与条件;在实验展示部分,考虑到大部分学生在之前的学习过程中已经接触过一维驻波实验,为避免内容重复,网页提供了在现实生活中二维方形薄板上的驻波实验的视频,学生可以通过它们了解二维方形薄板上的驻波的形成过程,并与之前仿真实验中的内容进行比较,探讨两者之间的异同,并思考其差异出现的原因,可以有效地提高学生的独立思考能力与实验探索能力。

### 1.2 实验原理

本实验中主要涉及到的物理原理为波在一维介质及二维介质中的传播原理。

#### 1.2.1 一维驻波的解与形成条件

驻波是指频率相同、传输方向相反的两种波,沿传输线形成的一种分布状态。其中的一个波一般是另一个波的反射波。在两者振幅相加的点出现波腹,在两者振幅相减的点形成波节。在波形上,波节和波腹的位置始终是不变的,给人“驻立不动”的印象,但它的瞬时值是随时间而改变的。如果这两种波的幅值相等,则波节的幅值为零。

2个周期为 $T$ ,波长为 $\lambda$ ,振幅为 $A$ 的简谐波沿着 $x$ 轴向相反方向传播。沿 $x$ 轴正方向传播的波称为右行波,波动方程为:

$$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

沿 $x$ 轴负方向传播的波称为左行波,波动方程为:

$$y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

合成后的驻波方程为:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

可见,合成后的波上的任何一点都在做同一周期的简谐振动。

当 $x$ 轴坐标是半波长的整数倍,即 $x = n\lambda/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ 时,  $\cos 2\pi(x/\lambda) = 0$ , 即该点的和振幅始终为0,称为波节。

驻波是波在一端固定的介质中传播的稳定解,但要求介质的长度为半波长的整数倍,若不满足该要求则无法达到稳定的情况,也无法生成位置固定的振幅为0的波节位置,在这一情况下,要想知道波的传播情况,就要求出行波解。

#### 1.2.2 一维波的行波解与振动模式

当介质长度不为半波长的整数倍时,一端的强迫振动不仅会激发其本身频率对应的振动模式,还会激发载体的所有振动模式。利用分离变量法可以解下列方程:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = A_0 \sin \omega t \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

其中第一个方程为波的传播问题的泛定方程，式中 $u$ 表示相对平衡位置的位移，下标表示对位置 $x$ 或时间 $t$ 的导数， $a$ 表示在该介质中的波速；第二个及第三个方程为边界条件，表示在 $x = 0$ 的位置为固定端，在 $x = l$ 的位置有一持续发出固定频率与振幅的正弦波的振动源；第四个方程为初始条件，表示当 $t = 0$ 时，介质上各点都处于平衡位置且处于静止状态。

为了将边界条件齐次化，可假设 $u = v + w$ ，其中 $v(x, t)$ 与 $w(x, t)$ 满足：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = A_0 \sin \omega t \\ v(x, 0) = \text{未定}, \quad v_t(x, 0) = \text{未定} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0, t) = 0 \\ w(l, t) = 0 \\ w(x, 0) = -v(x, 0), \quad w_t(x, 0) = -v_t(x, 0) \end{cases}$$

其解的形式为：

$$\begin{aligned} w(x, t) &= -\frac{2\omega A_0}{al} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} \\ &= -2A_0 \frac{\omega l}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{\omega l}{a}\right)^2 - (k\pi)^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l} \\ v(x, t) &= A_0 \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}} \sin \omega t \end{aligned}$$

第一项 $w(x, t)$ 表明受激发的载体的振动模式，其与强迫振动的频率越接近，受激发的幅度越大；第二项 $v(x, t)$ 表明振动源本身频率对应的振动模式，当存在衰减时，经过长时间 $w(x, t)$ 会趋近于0，总体上看将只保留强迫振动频率这一项。

### 1.2.3 二维驻波与克拉尼图形

克拉尼图形，又称“克拉德尼声音图案”，十八世纪，德国物理学家恩斯特·克拉德尼(Ernst Florens Friedrich Chladni)做过一个实验，他在一个小提琴上安放一块较宽的金属薄板，在上面均匀地撒上沙子。然后开始用琴弓拉小提琴，结果这些细沙自动排列成不同的美丽图案，并随着琴弦拉出的曲调不同和频率的不断增加，图案也不断变幻和越趋复杂。

克拉尼图形形成的原理为在振动源不变的前提下，声波在介质（通常为薄板，可以视为二维）中形成驻波，导致在特定的位置出现波节。当沙粒处在非波节位置时，会因为薄板的振动而跳动，从而向其他位置随机运动；当沙粒处在波节位置时，由于振幅不随时间变化且始终为0，沙粒便不再向其他位置运动。因此，经过一段时间以后，沙粒会集中在波节的位置，从而形成克拉尼图形。

对于一块边长为 $2l$ 的正方形薄板，为了简单考察二维驻波的性质，假设薄板边缘与中心固定[3]。设薄板在 $t$ 时刻在 $(x, y)$ 位置偏离平衡位置的位移为 $h(x, y, t)$ ，将时间变量与空间变量分离，不难得到：

$$h(x, y, t) = s(x, y) \sin(2\pi f t)$$

边界条件可以表示为：

$$\begin{cases} s(0,0) = 0 \\ s(\pm l, y) = 0 \\ s(x, \pm l) = 0 \end{cases}$$

由驻波的空间周期性,对 $s(x,y)$ 作 Fourier 级数展开,并由边界条件可知最大波长为 $2l$ , 即有:

$$s(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} e^{\frac{i\pi(mx+ny)}{l}}$$

又因为 $s(0,0) = 0$ , 由此得到展开式中余弦项前系数均为 0, 即有:

$$s(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

结合波动方程:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \nabla^2 h$$

可以得到:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \left( (m^2 + n^2)\pi^2 - \frac{4f^2 l^2}{c^2} \right) = 0$$

设 $k = 2fl/\pi c$ , 则对于任意 $m$ 和 $n$ , 有:

$$m^2 + n^2 = k^2 \text{ or } a_{mn} = 0$$

因此产生驻波的条件为 $k = 2fl/\pi c$ 为整数, 驻波节点的位置满足下面的方程:

$$A \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} + B \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi y}{l} = 0$$

对于圆形薄板, 与方形薄板类似, 同样假设振动源位于薄板中心, 且薄板边缘固定。利用分离变量法可以将薄板上的振动分解为 $r$ 方向上的振动模式与 $\theta$ 方向上的振动模式的叠加。径向波节出现的位置同样与圆形薄板的半径和振动源发出的波的波长相关, 但不是简单的线性关系。[4]

## 二、设计内容

### 2.1 整体设计

在网页制作的过程中, 选择 HTML 语言进行编写网页的基本结构及文字说明部分, 在适当的位置调用 Mathjax 脚本以显示数学公式的排版, 调用 Highcharts 脚本进行实时的图像输出; 在网页内部的程序运行部分, 自行编写 JavaScript 脚本用于模拟仿真实验。

为了网页页面的简洁性与可读性, 网页被分为实验原理、仿真演示、实验展示与参考文献四个部分, 各个部分有其对应的选项卡, 并以不同的背景色加以区分。网页上同时只会显示其中一个部分的内容, 学生可以点击标题下的选项卡切换, 自由选择学习的内容, 选项卡的设计如图一所示。

## 驻波与克拉尼图形

陈寅聪 17307110004 物理学系

实验原理

仿真演示

实验展示

参考文献

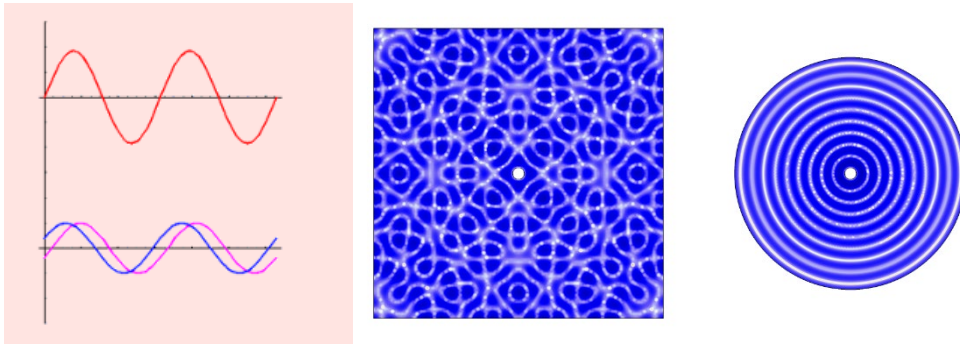
图一 网页中的选项卡, 选项卡中的背景色对应内容的背景色。

由于各部分的内容较多, 为方便学生快速浏览并在各部分之间切换, 在每一部分的最后, 均有“返回顶部”的按钮, 学生可以通过单击该按钮快速返回至标题及选项卡处, 而不需要

再经过鼠标滑轮滚动或拖动网页右侧进度条的繁琐的方式。

## 2.2 实验原理

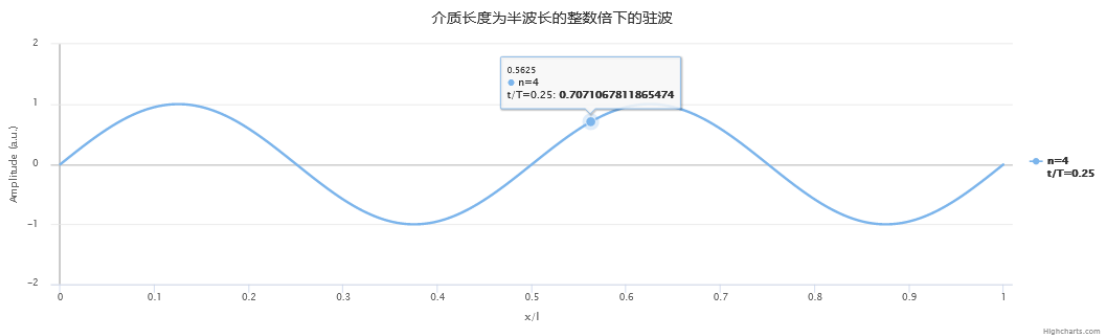
在实验原理部分，其主要的作用是向学生讲解波的传播问题中的物理原理及规律。除了在本文 1.2 节中介绍的理论推导过程之外，在网页中还添加了一维驻波中两个方向相反的行波叠加形成驻波的动图、利用 COMSOL 软件进行数值模拟得到的二维方形薄板上的克拉尼图形及二维圆形薄板上的驻波波节位置，利用图像的方式加深学生对这一物理问题的理解与认识，插入的图片如图二所示。



图二 在实验原理部分插入的图片。左图为一维驻波中两个方向相反的行波叠加形成驻波的图片，中图与右图为利用 COMSOL 软件分别在二维方形薄板及二维圆形薄板上数值模拟得到的波节位置（白色线条）。

## 2.3 仿真演示

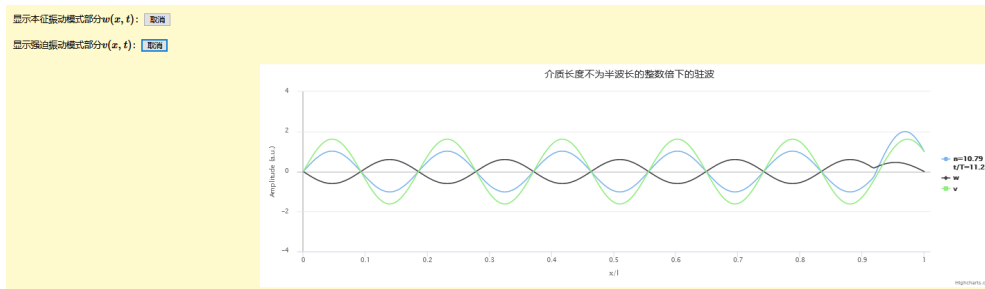
在仿真演示部分，其主要的作用是向学生提供可以进行交互的仿真实验页面。这一部分主要包含三个部分的内容：介质长度为半波长的整数倍下的驻波演示、介质长度不为半波长的整数倍下的行波演示及方形薄板上的克拉尼图形演示。在各部分中，网页都给出了在之前的实验原理部分推导得出的其物理过程对应的数学公式供学生查阅。仿真模拟的结果均由图像的形式输出，学生还可以用鼠标观察图像中对应点的值，如图三所示。



图三 学生可以通过将鼠标移动到曲线上观察曲线的纵横坐标的值。

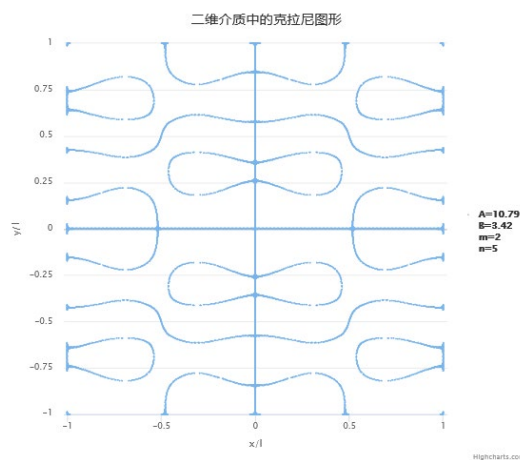
在介质长度为半波长的整数倍下的驻波演示中，学生可以调节介质长度  $l$  与半波长的比值  $n$ （在该部分中这一参数为整数，调节范围为 1 到 20）及时间  $t$  与周期  $T$  的比值（调节范围为 0 到 1 的实数），由此可以观察在不同参数设置下波形的变化。

在介质长度不为半波长的整数倍下的行波演示中，学生可以调节介质长度  $l$  与半波长的比值  $n$ （在该部分中这一参数为实数，调节范围为 1 到 20）及时间  $t$  与周期  $T$  的比值（调节范围为 0 到 50 的实数），由此可以观察在不同参数设置下波形的变化。除此之外，网页中还设置了两个开关，可以分别显示解的两个部分  $w(x, t)$  与  $v(x, t)$ ，帮助学生更好地理解两个部分分别对应的振动模式与相互作用，如图四所示。



图四 学生可以通过开关控制解的不同振动模式对应的部分的显示。

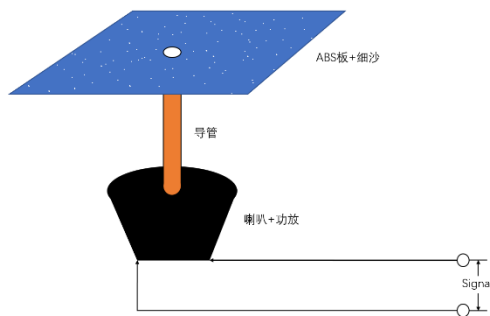
在方形薄板上的克拉尼图形演示中，学生可以调节波节位置公式中的参数 $A$ 、 $B$ 、 $m$ 、 $n$ （参数 $A$ 、 $B$ 的调节范围为0到20的实数，参数 $m$ 、 $n$ 的调节范围为1到20的整数），由此可以观察在不同参数设置下克拉尼图形的变化，如图五所示。



图五 网页中默认参数显示的方形薄板上的克拉尼图形。

## 2.4 实验展示

在实验展示部分，网页提供了进行克拉尼图形实验的实验装置图与实验过程视频展示，实验装置图如图六所示。实验装置由三部分组成，包括信号发生部分（电脑声音生成软件）、振动部分（喇叭及收束部分）及图像部分（ABS板及细沙）。实验过程中，通过调节电脑软件中的参数，可以设置生成的声音的频率，并经过功放与喇叭形成强度较高的声波。声波经一长直圆管集中后传播到ABS板上，圆管与方形薄板的中心用热熔胶固定，薄板上方不规则地撒有细沙。当开启声音后，薄板上的细沙随着薄板的振动开始跳动，并在波节的位置集中，形成不同的图案。网页提供了三个视频，它们分别为在不同频率条件下的克拉尼图形，以供学生与之前理论推导结果以及仿真实验结果进行比对。



图六 卡拉尼图形的实验装置示意图。

### 三、实验结果和分析

在仿真演示部分，网页给出了一维驻波、一维行波以及二维方形薄板上的克拉尼图形的模拟结果。一维驻波的解是稳定解，根据选择参数的不同，波形会在固定的位置出现振幅始终为 0 的波节，与理论分析的结果相同。一维行波的解不是稳定解，仿真实验给出了在一定时间内波的传播的过程，当时间 $t$ 较小时，波形表现为一列正弦波入射；当波接触到反射节点时，入射波与反射波开始叠加，但由于不满足驻波的形成条件，因此入射波与反射波的叠加相对于标准的正弦波有一定的畸变，且没有位置不变的波节。二维方形薄板上的克拉尼图形会随着学生设置的参数不同而发生变化，其结果与直接使用 COMSOL 软件进行数值模拟的结果非常接近。

在实验展示部分，学生可以发现现实中的实验结果与理论推导的结果以及仿真实验结果都有着很大的不同，其主要的不同来自于不同的边界条件以及实验器材的限制。在实验展示部分，方形薄板四周的边界条件是开放的，而且实验中使用的薄板为 ABS 板，密度及厚度在薄板的不同位置可能有所不同，导致波在其中的传播过程与理论相比有一定的偏差。

### 四、实验结论

本文利用 HTML 语言设计了对一维及二维情况下波的传播问题进行教学的物理仿真实验网页，内容涵盖一维驻波、一维行波与克拉尼图形，还给出了网页的设计思路以及仿真实验与现实中的真实实验结果的对比，说明其差异主要来自于真实实验中的复杂的边界条件以及介质的不均匀性。

### 五、参考文献

- [1] 温建科. 基于 Cool Edit Pro 软件的数字音频处理技术[J]. 实验科学与技术(6):42-44+60.
- [2] 汪百真, 俞曼华, 张俊祥, et al. CT、MRI 仿真操作系统的研发及在实验教学中的应用[J]. 蚌埠医学院学报, 2013(02):101-102.
- [3] 方奕忠, 王钢, 沈韩, et al. 方形薄板二维驻波的研究[J]. 物理实验, 2014(1):33-36.
- [4] 方奕忠, 王钢, 沈韩, et al. 圆形薄板二维驻波的研究[J]. 大学物理, 2015, 34(3):8-13.