

三线摆测量转动惯量的影响因素探究

16300200009 屈范虎

摘要：本实验利用自制三线摆测量了圆盘的转动惯量，并与理论值比较，相对误差为 7.7%；对几种可能造成误差的影响因素进行了探究，并尝试推导出了比简化公式更精确实用的非线性条件公式。

一、引言：

转动惯量是刚体转动惯性大小的量度，是表征刚体特性的一个物理量。转动惯量的大小除与刚体的质量有关外，还与转轴的位置和刚体的质量分布（即形状、大小和密度）有关。如果刚体形状简单、且质量分布均匀，则可直接计算出它绕特定轴的转动惯量。但在工程实践中，我们常碰到大量形状复杂、且质量分布不均匀的刚体，用理论计算其转动惯量将极为复杂，有时甚至不可能，因此通常采用实验方法来测定。

测量刚体的转动惯量时，一般都是使刚体以一定的形式运动。通过表征这种运动特征的

物理量与转动惯量之间的关系，进行转换测量。测量刚体转动惯量的方法有多种，三线摆法是具有较好物理思想的实验方法，它具有设备简单、直观、测试方便等优点。

本实验主要通过自制的三线摆测量物体转动惯量，并与理论值比较；在此基础上讨论影响三线摆测量结果的几种可能因素，并尝试改进计算公式。

二、实验原理：

三线摆实验装置如图 1 所示，上、下圆盘均处于水平，且悬挂在横梁上。三个对称分布的等长悬线将两圆盘相连。上圆盘固定，下圆盘可绕中心轴作扭摆运动。当下盘转动角度很小，且略去空气阻力时，扭摆的运动可近似看作简谐运动。根据能量守恒定律和刚体转动定律均可以导出物体绕中心轴的转动惯量。

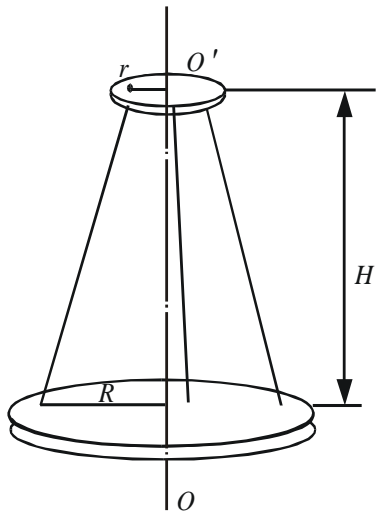


图 1 三线摆实验装置图

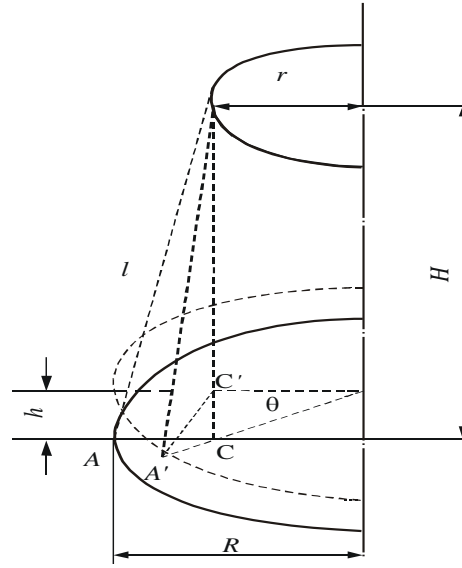


图 2 公式 (8) 推导示意图

当下盘扭转振动，且转角 θ 很小时，其扭动是一个简谐振动，运动方程为：

$$\theta = \theta_0 \sin \frac{2\pi}{T_0} t \quad (1)$$

当摆离开平衡位置最远时，其重心升高 h ，根据机械能守恒定律有：

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = mgh \quad (2)$$

即
$$I = \frac{2mgh}{\omega_0^2} \quad (3)$$

而
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{T} \theta_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (4)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \theta_0 \quad (5)$$

将 (5) 式代入 (3) 式得

$$I = \frac{mghT^2}{2\pi^2\theta_0^2} \quad (6)$$

从图 2 的几何关系中可得

$$(H-h)^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta_0 = l^2 = H^2 + (R-r)^2$$

简化可以得到 $Hh - \frac{h^2}{2} = Rr(1 - \cos \theta_0)$ ，将 $\frac{h^2}{2}$ 略去，且取 $1 - \cos \theta_0 \approx \theta_0^2 / 2$ ，则有 $h = \frac{Rr\theta_0^2}{2H}$ ，

代入 (6) 式得

$$I = \frac{m g R r}{4\pi^2 H} T^2 \quad (7)$$

即得物体绕中心轴的转动惯量

$$I_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H_0} T_0^2 \quad (8)$$

式中各物理量的意义如下： m_0 为下盘的质量； r 、 R 分别为上下悬点离各自圆盘中心的距离； H_0 为平衡时上下盘间的垂直距离； T_0 为下盘作简谐运动的周期； g 为重力加速度。^[1]

三、实验装置及过程：

首先，自制图 3 所示三线摆（铝塑板、尼龙绳），用水平仪调整上下圆盘水平，利用游标卡尺和电子秤（精度 0.001kg）测量相关参数；将上圆盘转动一个小角度（ $3^\circ - 6^\circ$ ）并参照图 4 打开手机 phyphox 软件中的磁力计功能测量圆盘上小磁铁运动引起的磁场变化，得到圆盘摆动周期 T ，重复 5 次，并利用公式(8)计算下圆盘对中心轴转动惯量，与理论值进行比较^[2]

接着，选取粗细基本一致的一根尼龙线，两根棉线组成三线摆，其余条件不变，测下盘转动周期，探究三线密度对结果造成的影响。

然后，选取粗细各不相同的三根尼龙线组成三线摆，其余条件不变，测下盘转动周期，探究三线粗细对结果造成的影响。

之后，使用读角器，分别将上圆盘转动 5° ， 10° ， 15° ， 30° ， 45° ， 60° ， 75° ， 90° ，其他条件不变，测量下圆盘转动惯量，探究上圆盘转动角度对结果造成的影响。



图 3 自制三线摆装置图



图 4 phyphox 测量图

四、实验结果及分析：

(1) $m_0=50\text{g}$, $r=73.73\text{mm}$, $R=124.84\text{mm}$, $H_0=32.18\text{cm}$, 初始条件下测得 $T_0=1.100\text{s}$,

利用公式 (8) 算得 $I_0 = \frac{m_0 g R r}{4\pi^2 H_0} T_0^2 = 0.430 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

(2) 利用规则圆盘对中心转动惯量公式计算得下圆盘对中心轴转动惯量理论值为 $I = \frac{1}{2} m R^2 = 0.39 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 相对误差 $\eta = \frac{0.430 \times 10^{-3} - 0.39 \times 10^{-3}}{0.39 \times 10^{-3}} = 7.7\%$ 。

(3) 三线密度不同时, 下圆盘平均周期 $T_1=1.095\text{s}$, $I_1 = \frac{m g R r}{4\pi^2 H} T^2 = 0.426 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 偏差 $\eta_1 = \frac{0.430 \times 10^{-3} - 0.426 \times 10^{-3}}{0.430 \times 10^{-3}} = 0.9\%$ 。

(4) 三线粗细不同时, 下圆盘平均周期 $T_2=1.096\text{s}$, $I_2 = \frac{m g R r}{4\pi^2 H} T^2 = 0.426 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 偏差 $\eta_2 = \frac{0.430 \times 10^{-3} - 0.426 \times 10^{-3}}{0.430 \times 10^{-3}} = 0.9\%$ 。

(5) 根据以上结果可发现三线摆中线的粗细和密度等因素对试验结果几乎无影响, 造成偏差极小。根据公式 (8) 的推导过程, 是将小角度转动下的三线摆当做线性振动, 不考虑摩擦力后通过机械能守恒和 R 、 r 和 H 的几何关系推导得出, 计算中没有出现关于线的拉力、材质等相关物理量, 不应该对实验结果造成太大影响。与事实相符。

(6) 改变圆盘转动角, 得到圆盘摆动周期, 见表 1

$\theta/^\circ$	T_3/s	T_3/T_0	I_3/I_0
5	1.095	1.00	1.00
10	1.098	1.00	1.01
15	1.104	1.01	1.02
30	1.117	1.02	1.04
45	1.134	1.04	1.07
60	1.172	1.07	1.15
75	1.223	1.12	1.25
90	1.281	1.17	1.37

表 1

随着初始转角增大，测得周期也在增大，测得转动惯量的偏差也就越大。初始转角确实对试验结果有较大影响。

查阅文献可知，公式（8）仅在三线摆做线性运动时可用。一般在转角小于 6° 时认为可近似为线性运动。根据《应用理论力学实验》中的计算，在转角超过 10° 度时，按线性振动理论计算的结果会形成 0.2% 左右的误差，当转角达到 45° 时按线性振动理论计算的结果误差会达到 7% ，与测量结果相符。^[3]

（7）在此尝试推导非线性振动条件的近似解。如图 5，此时不再考虑小角度， H 会产生变化。

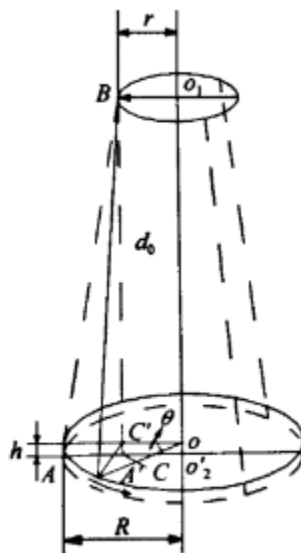


图 5 公式（20）推导图

不考虑摩擦力，机械能守恒，圆盘势能与动能总和为

$$E = \frac{1}{2}I_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + m_0gh \quad (9)$$

当下圆盘转过 θ 时，从上圆盘 B 作下圆盘垂线，与升高 h 前后的下圆盘分别交于 C, C' ，则

$$h = BC - BC' = \frac{BC^2 - BC'^2}{BC + BC'} \quad (10)$$

将 $(BC+BC')$ 近似为两盘间距 d_0 的两倍，则

$$h = \frac{Rr(1 - \cos\theta)}{d_0} \quad (11)$$

将式 (11) 带入式 (9) 并对 t 微分可得

$$I_0 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + m_0g \frac{Rr}{d_0} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta = 0 \quad (12)$$

作泰勒展开

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2\theta^3}{6} + \frac{\omega_0^2\theta^5}{120} = 0 \quad (13)$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{m_0gRr}{I_0d_0} \quad (14)$$

在式 (13) 中引入人工摄动参数且令 $\tau = \omega t$

$$\omega^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta - \frac{\varepsilon\omega_0^2\theta^3}{6} + \frac{\varepsilon\omega_0^2\theta^5}{120} = 0 \quad (15)$$

令式 (15) 初始条件为

$$\tau = 0, \theta(0) = b, \frac{d\theta(0)}{d\tau} = 0 \quad (16)$$

令

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \end{cases} \quad (17)$$

将式 (17) 带入式 (15) 中利用待定系数法可求得

$$\omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2) = A\omega_0 \quad (18)$$

其中

$$A = 1 - \frac{b^2}{16} + \frac{b^4}{3\,072} + \frac{b^6}{2\,048} \quad (19)$$

因此得到

$$I_0 = \frac{m_0 g R r A^2}{4\pi^2 d_0} T_0^2 \quad (20)^{[4]}$$

根据公式 (20)，非线性条件下的周期 T 应为 $\frac{2\pi}{A\omega} = \frac{T}{A}$ ，换算后结果如表 2：

$\theta / ^\circ$	T / s	T	T / T_0
5	1.095	1.095	1.000
10	1.098	1.095	1.000
15	1.104	1.095	1.000
30	1.117	1.095	1.000
45	1.134	1.095	1.000
60	1.172	1.096	1.001
75	1.223	1.098	1.003
90	1.281	1.112	1.016

表 2

可以看出改进后的公式 (20) 中周期 T 几乎不再随转动角的变化而变化，新公式中的转动惯量也不再受小角度条件的制约，比线性振动的简化公式更精准，适用性更强。尤其当转动角较大时，应采用公式 (20) 更为合适。

五、实验结论

本实验利用自制三线摆测量了圆盘的转动惯量，并与理论值比较，相对误差为 7.7%；在探究几种可能造成误差的影响因素后，排除了线密度和粗细的影响，发现了初始转动角度对结果的影响，并尝试推导出了非线性条件下的计算公式，消除了转动角度带来的影响；计算结果证明改进后的计算公式比原来的简化公式更精准，适用性更强。

六、参考文献

- [1] 百度百科词条 三线摆
- [2] 殷子琪, 丁益民, 史振宇, 张余梦, 蒋富丽. 利用智能手机磁场传感器测量刚体的转动[J]. 大学物理实验, 2018,31
- [3] 庄表中, 王惠明. 应用理论力学实验[M]. 北京高等教育出版社, 2009
- [4] 刘丹, 侯之超. 三线摆方程简化及其共振问题研究[J]. 振动与冲击, 2007,33