

HTML5 仿真实验：弹簧的欠阻尼振动

物理学系 17307110179 章晋哲

摘要：本实验利用 HTML 编程工具模拟了弹簧不同初始长度下开始振动的欠阻尼振动情况，并且通过对比实验的方法对比不同阻尼系数、劲度系数条件下弹簧的振动情况，并绘制不同情况下弹簧振幅-时间图像。最后制作了拉动弹簧弹开小球使其碰撞另一小球的小游戏。本实验通过计算机模拟，直观展示弹簧阻尼系数越大，劲度系数越小，频率越低，周期越大的结论，更利于学生的理解与记忆。

一、引言：

HTML 提供了简单而直观的平台直观地模拟各种物理现象，从而可以帮助学生更好更快地记忆并且理解相应的物理图像。HTML 称为超文本标记语言，它包括一系列标签。通过这些标签可以将网络上的文档格式统一，将分散的 Internet 资源连接为一个逻辑整体。而 HTML5 是 HTML 最新的修订版本，是下一代 HTML 标准。从广义上讲是一种网页开发技术。网页通常使用 HTML、CSS、JavaScript 共同开发。由 HTML 定义网页内容，CSS 描述网页布局，JavaScript 控制网页行为。在模拟物理现象过程中，JavaScript 无疑起到了最为重要的作用，因为使物理动起来的的核心就在于网页行为的控制。

弹簧阻尼振动作为力学最为基础的模型之一，是物理系入门的必学知识。不过由于大学一年级微分方程知识的欠缺，学习弹簧阻尼振动模型时总觉得有些困难，弹簧振动的图象也不甚清晰。所以一个描述弹簧振动的 HTML 课件显得十分重要。此程序可以将不同劲度系数、阻尼系数的弹簧振动情况进行对比，并绘制物理图像，旨在将结果可视化地展现，加强学生的记忆与理解。

二、实验原理：

弹簧阻尼振动是指振动系统受到摩擦和介质阻力或其他能耗而使振幅随时间逐渐衰减的振动。振动过程中受到正比于速度的力 $f = -\gamma v = -2\beta v$ 的阻力作用，其运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

其中 x 是弹簧伸长量， β 为阻尼系数， $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ， k 为弹簧的劲度系数。可以

在 $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$ 的条件下(即欠阻尼条件下),

解得该方程的解为: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$,

其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 。 A_0 为振幅, φ 为相位, 由初始条件决定^[1]。 弹簧阻尼振动图象如右图所示。

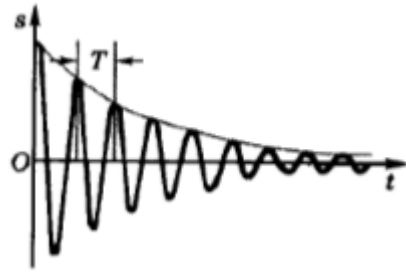


图 1 弹簧阻尼振动振幅-时间关系

由于 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}$, 而弹簧振动的

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}}$, 所以同劲度系数条件下, 弹簧的阻尼系数越大, 频率越低,

周期越长。同阻尼系数条件下, 弹簧劲度系数越大, 频率越高, 周期越短。而其振幅可视为指数衰减: $A_0 e^{-\beta t}$ 。 阻尼系数越小, 振幅衰减得越慢。

三、程序设计与说明:

1. 利用 HTML 设计可拖拽末端改变初始长度的欠阻尼弹簧

由于弹簧振动方程已知且为精确解, 所以我们可以通过改变弹簧运动方程的方式来控制弹簧的振动。在建立 canvas 页面, 导入图片后, 用 pic.w 变量储存弹簧图片的长度, 即模拟弹簧的长度。用 picw0 储存弹簧的初始长度。弹簧的初始长度由鼠标拖拽决定, 即鼠标在初始状态(原长)下的弹簧右端时, 鼠标状态由箭头改变为可选中的鼠标(即改变鼠标类型为 pointer)提示用户可以进行拖拽以改变长度。在 canvas.mousedown 记录鼠标摁下时在画布上的坐标, 在 canvas.onmousemove 中记录弹簧此时的长度, 并且通过 setInterval 动画效果来每隔 0.01s 重置画布, 重新绘制此时鼠标指示的弹簧长度, 即实现了用鼠标拖拽改变弹簧长度的目标。最后使用 canvas.onmouseup 记录鼠标放开时弹簧的长度, 并以此作为弹簧欠阻尼振动的初值。此时可设置一劲度系数与阻尼系数, 代入已经给定的公式中, 使用 setInterval 每隔 0.01s 重置画布并且重新绘制对应此时时间的长度的弹簧以实现动画效果。最终弹簧可以来回振荡。

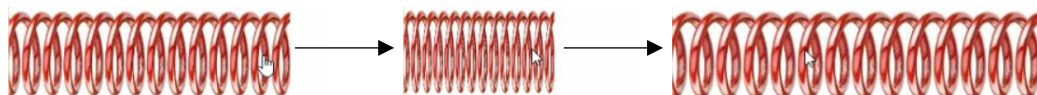


图 2 鼠标拖拽弹簧改变初始长度振动过程图

2. 利用 HTML 设计弹簧不同劲度系数与阻尼系数弹簧振动课件

设计思路与上一个程序不同的时: 这次弹簧振动设置振动初始长度为一定

值，改变弹簧的阻尼系数和劲度系数。为了对比更为明显，本实验设置了两个画布分别绘制不同条件下的弹簧振动模拟过程与振幅-时间图。在程序中通过 HTML 中的 input 元素，设置 type 为 range 以此设置滑动条改变弹簧的劲度系数与阻尼系数。为了对比，在弹簧振动的图样中通过 context.fillText 函数显示此时调节的劲度系数和阻尼系数。利用弹簧的长度乘以一定的系数为点的 y 分量位置，每隔 0.01s 点 x 分量增加 0.15px，这样就可以画出振幅-时间图。设置点击刷新按钮，按下按钮所有设置归为最初的数值。下图即为不同阻尼系数与劲度系数下弹簧的振动图样。

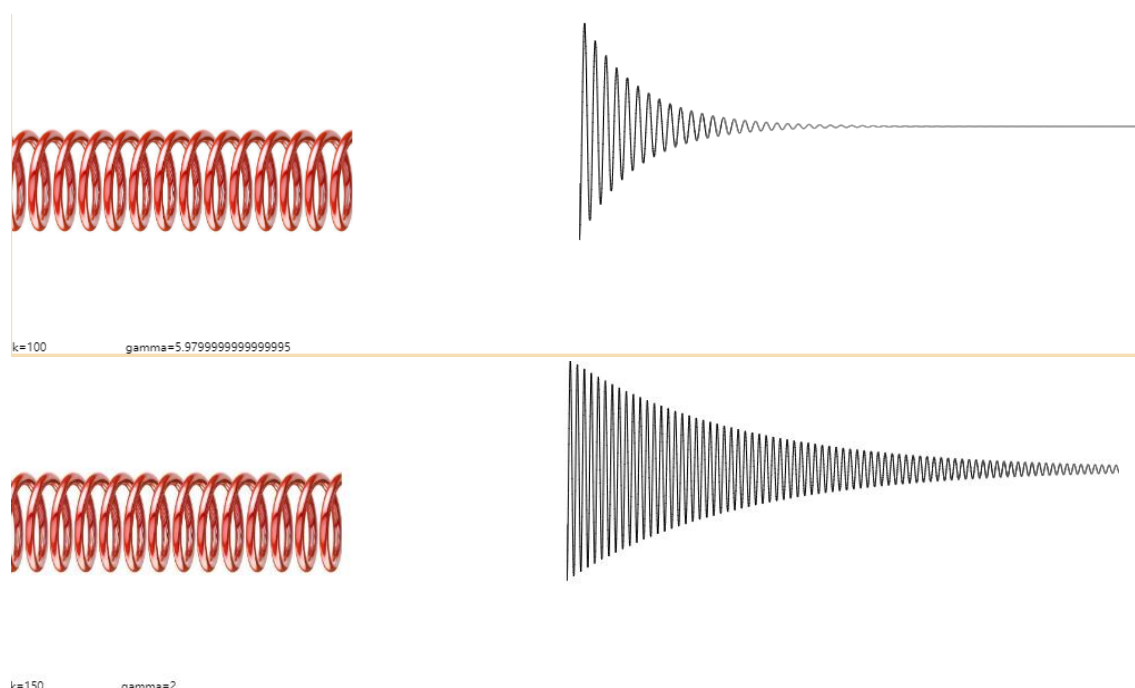


图 3 不同阻尼系数与劲度系数弹簧振动图样

3. 利用 HTML 制作弹簧弹开小球使其碰撞另一小球的的游戏

先利用随机数产生一小球作为被碰撞的小球。游戏规则为：拖动弹簧使得小球积累势能，随即松开鼠标，弹簧将小球弹出，随后小球将积累的势能转换为动能，以一定的初速度平抛射出。若小球碰撞到已经设置好的被碰撞的小球，则游戏成功；若未碰撞到，则游戏失败。当弹簧压缩量不同时，积累的势能也不同，所以之

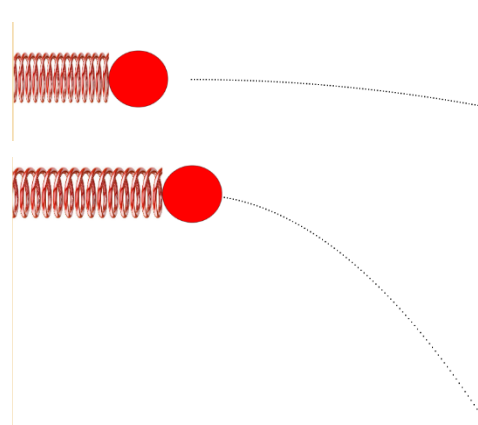


图 4 不同压缩量对应预测轨迹示意图

后的平抛运动轨迹会不同。为了降低游戏难度，我设计了以下帮助：压缩弹簧时，画布上会显示一小段与此此时弹簧压缩量对应的小球运动轨迹（用点画线表示）。最后当两小球圆心间距离小于设置好的小球半径时，即判断小球相碰，弹出对话框：**You win!** 若两个小球一直没有碰到，则显示对话框：**You fail!** 此时为方便，设置弹簧的劲度系数与阻尼系数为特定的值，具体可在程序中修改。



图 5 游戏成功截图

四、结果分析与说明：

1. 利用 HTML 设计可拖拽末端改变初始长度的欠阻尼弹簧

由于弹簧存在被压缩和释放后按运动方程运动两个阶段，所以用 `dragging` 这个布尔值来判断弹簧的运动状态。而判断的依据就是鼠标从按下开始是否释放。在 `canvas.onmouseup` 函数中改变 `dragging` 的布尔值。若 `dragging` 为 `true`，则弹簧的右端横坐标与鼠标位置对应的坐标相同，直至鼠标释放，获得弹簧振动方程的振幅。因为此时即为弹簧能达到的极限位置，所以相位自然确定。若 `dragging` 为 `false`，则弹簧的长度与鼠标位置无关，弹簧根据振动方程以及释放鼠标时确定的初值开始振动。

2. 利用 HTML 设计弹簧不同劲度系数与阻尼系数弹簧振动课件

此课件中由于存在两个不同的画布，所以变量显得较多，但是其实两个画布代码原理是相同的。弹簧的劲度系数以及阻尼系数的最大

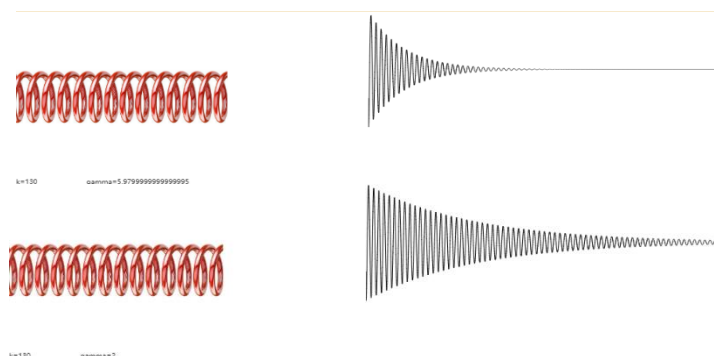


图 6 劲度系数相同，阻尼系数不同弹簧图像对比

值最小值可以在程序中改变以满足更多的需求。不论是从运动的过程中或是最后的结果截图中都可以验证当劲度系数大、阻尼系数小时，弹簧振动的周期短的结论。

3. 利用 HTML 制作弹簧弹开小球使其碰撞另一小球的戏

由于与弹簧靠近的小球存在两个运动阶段：一是跟弹簧接触，此时小球与弹簧末端有相同的位置和速度。二是与弹簧脱离后进行平抛运动。这两个阶段的分界点是弹簧恢复到其原长。所以用定义布尔变量 `out` 存储小球是否与弹簧分离。若未分离，则 `out` 为 `false`，若分离，则 `out` 为 `true`。根据 `out` 变量的值，赋给小球不同的运动方程。`Out` 变量的值由时间确定。可以大致计算弹簧第一次恢复原长的时间，从放开鼠标弹簧开始振动时开始计时，则时间小于弹簧第一次恢复原长时间时，小球的左端点横向标值与弹簧长度相同，`out` 变量为 `false`。根据鼠标放开的位置可以计算弹簧的弹性势能，从而得到小球离开弹簧开始平抛运动的初始动能，以此计算平抛运动的初始水平速度。当运动时间大于弹簧第一次恢复原长时间时，`out` 变量为 `true`，小球做平抛运动。

在动画效果中，由于小球的每次运动都必须要先清空整个画布再重新绘制，但是蓝色小球不能被清空，所以只能将画布中蓝色小球所在的包含它的最小矩形作为特别的一块区域。将画布除了这片区域外的部分清空，再重新绘图。为此可以把整个屏幕除了这片区域外分为四个矩形，再使用 `ClearRec` 来进行清空画布，类似于右图。但是这样的问题在于用矩形近似圆，所以会有不完美的地方类似于右图，矩形中的部分在动画效果中不会被清除，但是 Javascript 没有一个清除圆形区域的函数，所以如果想要效果更好，则需要编写用大量小矩形来近似圆形的程序。

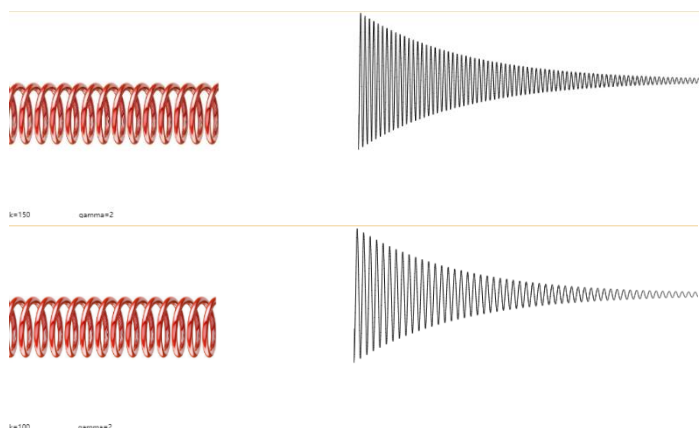


图 7 阻尼系数相同，劲度系数不同弹簧图像对比

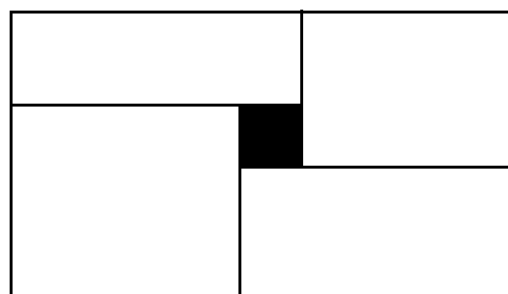


图 8 画布分块示意图

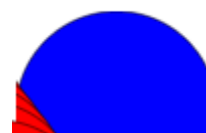


图 9 矩形部分重叠画图

进一步可以将弹簧设计在水平面内，并且设计成可以二维拖拽而非只能在 x 方向拖拽的弹簧，并且加入小球间的碰撞，从而可以设计成平面内弹球的游戏。

4.程序在用解得的方程绘制图像，会对学生记忆图像、理解结果，但是解方程的过程并非十分清楚。所以采用数值解法可能更为合适。通过一定的数值解法解弹簧欠阻尼振动的二阶常微分方程，并绘制相应的图象，可以将解方程的步骤省去，从而可以从更本源的、更物理的方面去给到学生理解。

5.由于物理课程中讨论的大多是欠阻尼弹簧，与其对应的临界阻尼和过阻尼情况通过 $\omega_0^2 - \beta^2$ 与零的大小关系判断。二者的方程也可以解出精确的数学解，但是数值解法仍然是更好的方法去展示这两种阻尼。

五、实验结论：

本程序利用 HTML5 语言，构建了弹簧欠阻尼振动的模型，并且在此基础上设计了弹簧弹出小球使其碰撞另一小球的游戏。通过弹簧振动振幅-时间图像的绘制，较为清晰地展示了弹簧振动周期随阻尼系数增大、劲度系数减小而增大的关系。后续可以使用数值解法解弹簧阻尼振动的方程。

六、参考文献

[1] 赵凯华，罗蔚茵，新概念物理教程（第一卷）力学第二版，高等教育出版社，2004，256-258