Html5 演示含空气阻力的斜抛运动

16307110136 钞宇通

摘要：本项目利用 html5 等工具演示含空气阻力的斜抛运动下各个参数的变化趋势，并实现整个过程的可视化。

一、引言：

向斜上方抛出的物体，受到跟它的速度方向不在同一直线上的重力作用而做曲线运动，这种运动叫做斜抛运动。投出的标枪和手榴弹，大炮发射的炮弹，它们的运动都是斜抛运动。做斜抛运动的物体，先是沿曲线上升，升到最高点后，又沿着曲线下降。

然而实际运动过程中所物体总会受到空气阻力的影响，例如羽毛球的运动轨迹，不能忽略，我们想考虑加入这一因素后对物体运动状态的影响。

本项目主要通过加入与速度成正比的空气阻力项，可视化其对物体斜抛运动的影响。

二、实验原理：

当物体在雷诺数很低，没有紊流（雷诺数 $R_e < 1$）的流体中移动时，其受到的阻力称为黏滞阻力、线性阻力。此情形下，阻力大约和速度成正比，但和速度方向相反。黏滞阻力的方程式如下：

$$F = -kv \tag{1}$$

其中 k 为一常数，和流体特性及物体尺寸有关，v 为物体和流体的相对速度。

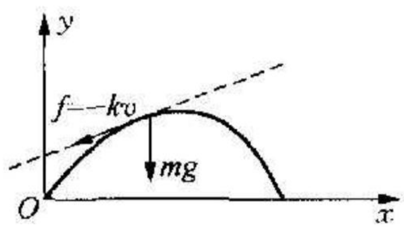

图 1 受力示意图

设一质点沿与水平方向成 θ 角斜抛，质量为 m，初速度为 v_0，根据运动独立性原理，考虑水平和数值方向的牛顿第二定律：

$$m\frac{dv_x}{dt}=-kv_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-kv_y-mg$$

（2）

分离变量，积分考虑初值：

$$v_x=v_0\cos\theta e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y=(v_0\sin\theta+\frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}$$

（3）

再对时间积分：

$$x=\int v_x dt=\frac{m}{k}v_0\cos\theta(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$y=\int v_y dt=\frac{m}{k}(v_0\sin\theta+\frac{mg}{k})(1-e^{-\frac{k}{m}t})+\frac{mg}{k}t$$

（4）

合速度大小：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\theta e^{-2\frac{k}{m}t}+[(v_0\sin\theta+\frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{mg}{k}]^2}$$

（5）

三、代码实现

由以上的推导我们可以看出，尽管对于线性空气阻力，其运动的主要参量包括速度、位移等已有显式解，然而其公式较为复杂，无法直观的表现出各个参量的影响。所以我们希望利用 html5 制作网页动画，包含可控制各个参量的控件，并实时更新数据，实现可视化的效果。

所以首先先对界面进行设计，例如字体，背景，颜色等。

```css
body{background: #eeeeee;
    margin: 20px;
    background-image:url('background.png') ;
    background-size: cover;}
h2 {color: antiquewhite;
    text-align: center;
    font-family:'Times New Roman', Times, serif;
    font-size: xx-large}
#myCanvas{background: skyblue;
        display: block;}
p {font-size: large;
color: antiquewhite;}
li {font-size: large;
color: antiquewhite;}
a {font-size: large;
color: antiquewhite;}
```

滑块控制具体参数，调节初速度最低 0m/s，最高 300m/s，阻尼系数最低 1N*s/m，最高 5N*s/m，质量最低 1kg，最高 5kg，此外还有抛射角度、物体半径（假设为圆盘状）等参数：

```html
<p>初速度调节：</p><input id="radiusRange" class="controls" type="range" min="0" max="300" />
<p>阻尼系数调节：</p><input id="radiusRange2" class="controls" type="range" min="1" max="5"  />
<p>质量调节：</p><input id="radiusRange3" class="controls" type="range" min="1" max="5"  />
```

canvas 添加像素，按钮控制整个动画的开始和停止：

```html
<canvas id="myCanvas" width="600" height="300"></canvas>
<input id="animateButton" class="controls" type="button" value="开始"/>
```

然后设置物体的初值，x、y 是物体在画布上的初位置，radius 对应物体的半径，vx、vy、v 对应水平、竖直方向的速度和合速度：

```javascript
var circle = {
        x: 20,
        y: 20,
        x0:20,
        y0:20,
        xp:0,
        yp:0,
        radius: 20,
        startTime: 0,
        k: radiusRange2.value,
        m: radiusRange3.value,
        velocity: radiusRange.value,
        vx: 0,
        vy: 0,
        v: 0,
```

之后在画布的右侧绘制文本框，实时更新数据，例如分速度、合速度、位置、速度方向等：

```javascript
context.rect(400, 20, 170, 260);
```

```
context.fillText("x: "+circle.xp.toFixed(2)+"m", 420, 50);
context.fillText("y: "+circle.yp.toFixed(2)+"m", 420, 80);
context.fillText("初速度: "+(circle.velocity/PER_METER).toFixed(2)+"m/s", 420, 110);
context.fillText("Vx: "+(circle.vx/PER_METER).toFixed(2)+"m/s", 420, 140);
context.fillText("Vy: "+(circle.vy/PER_METER).toFixed(2)+"m/s", 420, 170);
context.fillText('V:'+(circle.v/PER_METER).toFixed(2)+'m/s',420,200);
context.fillText('k:'+circle.k+'N*s/m',420,230);
context.fillText('m:'+circle.m+'kg',420,260);
```

接下来根据我们前面得到的速度及位移公式，更新每一帧物体的位置，并且利用 Starttime 实现暂停和重启的功能，而当物体的位置超出画布时，会重新回到初始的位置重复运动：

```
function draw(currentTime) {
        requestAnimFrame(draw)
```

```
circle.x = circle.x0+circle.m/circle.k*circle.velocity*(1-Math.exp(-circle.k/circle.m*(currentT
circle.y = circle.y0+circle.m/circle.k*(circle.m*G_ACC/circle.k)*(1-Math.exp(-circle.k/circle.m
circle.vx=circle.velocity*Math.exp(-circle.k*(currentTime-circle.startTime)/(1000*circle.m));
circle.vy=-(circle.m*G_ACC/circle.k)*Math.exp(-circle.k*(currentTime-circle.startTime)/(1000*ci
circle.v=Math.sqrt(circle.vx**2+circle.vy**2);
```

```
if (!paused) {

    if (circle.startTime == 0) {
        circle.startTime = currentTime;
    }
    if (circle.x >= canvas.width || circle.y>=canvas.height){
        circle.x=circle.x0;
        circle.y=circle.y0;
        currentTime=0;
        circle.startTime=0;
    }

    if (circle.startTime == 0 && currentTime > circle.startTime) {
        circle.startTime = currentTime;
```

四、结果与讨论

这里我们从一个学生的视角，主要通过改变参数，观察动画，得到直观上的结果，我们假定只了解基本的无空气阻力的抛射问题和含空气阻力的抛射公式，但对图像缺乏直观上的感受。

首先我们讨论参数对于射高（物体的最高高度）的影响，事实上通过（2）式我们可以看出 $\frac{k}{m}$ 可以看作一个参数，初抛射角 θ_0 可以看作另一个参数，所以保持抛射角为 45° 一定，设置初速度 300m/s，改变 $\frac{k}{m}$ 的值，观察射高与其关系。利用动画观察整个运动，可以发现随着 $\frac{k}{m}$ 的增加，射高逐渐降低，空气阻力的粘滞效应越来越明显，尽管刚开始的速度很快，但当 $\frac{k}{m}$ 过大时，这种势头马上消失，随后变为缓慢的下降。

而改变初抛射角，观察其对射高的变化，显然的，抛射角越大，射高越大，然而随着我们增大抛射角从 70° 到 90°，这种增加的速率逐渐变小，80° 以上几乎完全不发生，这种现象不只是由于速度竖直方向投影的增加速率随正弦函数的变化率降低而降低，也可以是由于随着竖直方向初速度的增大，空气阻力的粘滞能力越强，某种程度上抵消了速度增长带来的射高的增长。

事实上$\frac{k}{m}$就是一种粘滞性的体现，当该值较小时，相当于物体的惯性占主导地位，当该值较大时，环境的粘滞性占主导地位，如同一个羽毛和石头的斜抛运动一样，而动画能很直观地表现它们的影响。

接下来，我们讨论抛射角对于射程的影响，这里的射程值得时先对于初始点处于同一高度时，物体水平方向的位移。显然的是，整个过程中当抛射角为 0° 或者 90° 时，射程都为 0，如果不存在阻力，射程与$\sin 2\theta_0$成正比。我们设$\frac{k}{m}$=2，$v_0 = 150m/s$，观察动画效果。发现实际上，尽管随着抛射角的变大，射程先变大后变小，然而最大值所对应的抛射角却远小于 45°，如同一个变形的三角函数。改变$\frac{k}{m}$均得到相似的结果，说明相比于影响整个抛射过程的时间变化，空气阻力更影响横向的速度变化，导致整体上极值点发生的偏移。

最后我们简单探讨物体的轨迹。已知的是，当物体不受空气阻力时，整体应该为抛物线，而动画观察可知，抛物线的顶点向贝利初始点的方向发生了偏移，但无论如何，总有水平方向的移动，可以联想到一次项阻力在其中的影响，直观感受指数衰减的作用。

五、参考文献

[1] French, A. P. Newtonian Mechanics (The M.I.T. Introductory Physics Series) 1st. W. W. Norton & Company Inc., New York. 1970. ISBN 0393099709.

[2] 维基百科：阻力

[3] Batchelor, George. An introduction to fluid dynamics. Cambridge Mathematical Library 2nd. Cambridge University Press. 2000. ISBN 978-0-521-66396-0. MR1744638.