

用 HTML 演示混沌系统的变化过程

17307110109 雷宙 物理学系

摘要：混沌是现代物理中的一个前沿问题，具有很高的研究价值。本程序对两个混沌吸引子进行了求解，并动态显示了计算结果，展示出混沌吸引子的演化过程。

一、引言

混沌系统是指在一个确定性系统中，存在着貌似随机的不规则运动，其行为表现为不确定性，不可重复，不可预测，这就是混沌现象。混沌是非线性动力系统的固有特性，是非线性系统普遍存在的现象^[1]。混沌理论是关于非线性系统在一定参数条件下展现分岔，周期运动相互纠缠，以至于通向某种非周期有序运动的理论。混沌理论在数学、生物学、经济学等领域都有着广泛的应用。了解并熟悉混沌系统的变化对于理解混沌理论有很大的帮助，本程序利用 html 语言，可以在网页中显示混沌系统的变化情况。

二、相关原理

(1) 奇异吸引子

又称为混沌吸引子，具有复杂的拉伸、扭曲的结构，与平庸吸引子相对应，是反映混沌系统运动特征的产物，对应系统中非周期的，貌似无规律的无序稳态运动形态。特点是对初值相当敏感，初值的微小差异经过一定的演化时间可导致系统运动过程的显著差别。

(2) 洛伦兹吸引子

在 20 世纪 50 年代末到 60 年代初，美国气象学家洛伦兹的主要工作目标是从理论上进行长期天气预报，他在使用计算机进行天气现象的模拟时发现，对于天气系统，初始条件微小的改变也会显著影响模拟的结果。之后，他化简了自己之前的模型，得到了有 3 个变量的一阶微分方程组，在不同的参数取值下，方程的解显现出非常复杂而有趣的现象。其中最经典的一幅图样是形似蝴蝶状的一个洛伦兹吸引子。如今，这一方程组已经称为混沌理论的经典也是所谓的“蝴蝶效应——亚马孙雨林中的一只蝴蝶扇动翅膀会引起德克萨斯州的飓风”这一说法的来源^[2]。

方程的形式如下图所示：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{1}$$

(3) 埃农吸引子

1964 年，法国天文学家埃农从研究球状星团以及洛伦兹吸引子中受到启发，给出了如

下所示的埃农映射。与洛伦兹吸引子不同，埃农吸引子并非是一个微分方程组而是一个迭代过程，因此若每次画出前后两次散点之间的连线，最终会形成一片区域而非洛伦兹吸引子那样光滑的图形。若只保留散点，最终形成的会是一个具有分形结构的月牙形图样^[3]。

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + b y_n \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}\quad (2)$$

(4) 龙格库塔方法

龙格库塔方法是数值分析里用于非线性常微分方程的解的重要的一类隐式或显式迭代法。这些技术由数学家卡尔·龙格和马丁·威尔海姆·库塔于1900年左右发明。在各种龙格库塔方法中有一种常用的“RK4”即“4阶龙格库塔方法”，是利用方程导数和初值信息来进行微分方程的求解。

令初值问题表述如下： $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$

则

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3)\end{aligned}\quad (4)$$

通过不断迭代便可对微分方程进行数值求解^[4]。

三、HTML 页面简介

整体页面比较简单，通过在对应的参数栏里输入参数的值，就可以在画布上看到对应的混沌吸引子的变化过程。



图1 洛伦兹吸引子参数控制

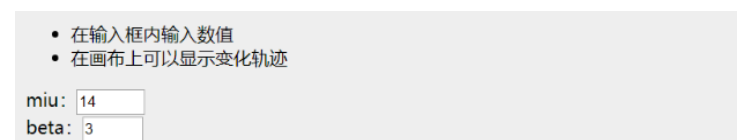


图2 埃农吸引子参数控制

四、程序说明

(1) 洛伦兹吸引子

洛伦兹吸引子对应的是一个三元的微分方程组，对于每一条方程都需要使用 RK4 方法，因此需要有三组不同的数组来存储计算过程中产生的 k，每产生一个新的 y_{n+1} 就需要四个 k，通过 k_1 、 k_2 、 k_3 、 k_4 来计算得到值。因此创建了三个二维数组来储存分别用于 x, y, z 迭代所需要的 k。类似地，对于 x, y, z，也做了同样的处理。由于 javascript 中无法直接创建二维数组，因此选择了先创建一维数组再将每个元素设置为一个一维数组。

为了将吸引子的演化过程连续地表现出来，采用了一个 setInterval 函数，将自定义的绘图函数 interval_pict 每隔固定时间间隔执行一次，就可以实现类似于动画的效果，展现出洛伦兹吸引子的演化过程。

给 x, y, z 赋予初始值 0, 1, 0 后计算得到的结果若直接显示在屏幕上会因为数值太小而无法看清，因此对计算结果做了适当处理使图样能以一个合适的大小显示在屏幕中央。

```

var k_x=new Array(50000);
for (var i=0;i<k_x.length;i++){
    k_x[i] = new Array(4);
}

var k_y=new Array(50000);
for (var i=0;i<k_y.length;i++){
    k_y[i] = new Array(4);
}

var k_z=new Array(50000);
for (var i=0;i<k_z.length;i++){
    k_z[i] = new Array(4);
}

var x = new Array(50000);
for (var i=0;i<x.length;i++){
    x[i] = 0;
}

var y = new Array(50000);
for (var i=0;i<y.length;i++){
    y[i] = 1;
}

var z = new Array(50000);
for (var i=0;i<z.length;i++){
    z[i] = 0;
}

```

图 3 数组设置

(2) 埃农吸引子

由于埃农吸引子本身是一个散点迭代过程，因此并不需要进行十分复杂的运算，每次将新生成的点显示在 canvas 画布上即可。同样采用了 setInterval 函数来达到类似动画生成的效果，也对计算结果进行了适当处理。

```

sh2 = setInterval(function(){
    interval_pict2(interval_count2);
    interval_count2++;
},1);

```

图 6 埃农吸引子 setInterval 函数

```

sh = setInterval(function(){
    interval_pict(interval_count);
    interval_count++;
}

```

图 4 洛伦兹吸引子 setInterval 函数

```

for (var i=0;i<25000;i++){
    t_depict[i] = t[2*i]*12;
    x_depict[i] = x[2*i]*12+300;
    y_depict[i] = 250-y[2*i]*5;
    z_depict[i] = z[2*i]*5+150;
}

```

图 5 洛伦兹吸引子调整计算结果

```

for (var i=0;i<25000;i++){
    t_depict2[i] = t_henon[2*i];
    x_depict2[i] = x_henon[2*i]*150+300;
    y_depict2[i] = y_henon[2*i]*120+200;
}

```

图 7 埃农吸引子调整计算结果

五、运行结果

(1) 洛伦兹吸引子的 $z-x$ 图和 $y-t$ 图如下所示:

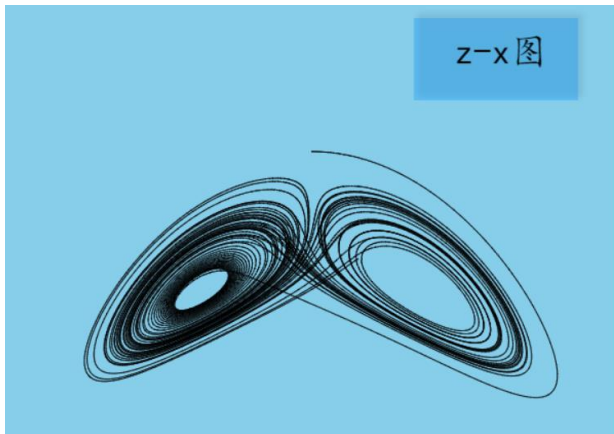


图 8 洛伦兹吸引子 $z-x$ 图

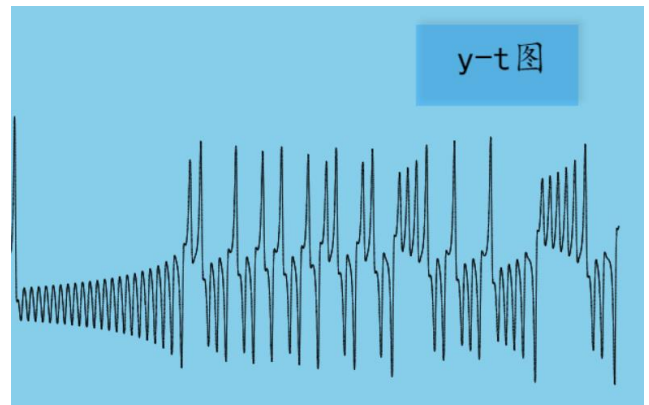


图 9 洛伦兹吸引子 $y-t$ 图

(2) 埃农吸引子的 $y-x$ 图如下所示:

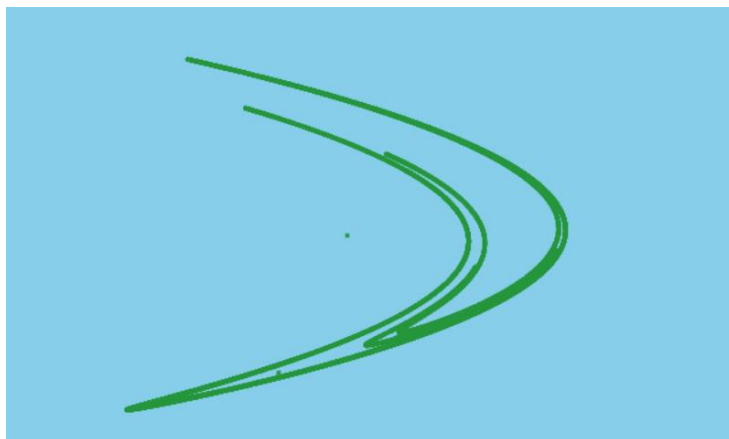


图 10 埃农吸引子 $y-x$ 图

六、结论

本程序利用四阶龙格库塔方法,对洛伦兹方程组进行了求解。将所得结果利用类似动画的效果演示出来。可以直观地看到一个混沌系统的演化过程,可以观察到混沌吸引子所具有的初值敏感性、内在随机性、混沌区域有界性以及可能具有的分形结构。

七、参考资料

[1]. <https://baike.baidu.com/item/%E6%B7%B7%E6%B2%8C%E7%B3%BB%E7%BB%9F/20861139?>

fr=Aladdin 百度百科：混沌系统

[2]. <https://baike.baidu.com/item/%E6%B4%9B%E4%BC%A6%E5%85%B9%E6%96%B9%E7%A8%8B>

百度百科：洛伦兹方程

[3]. <https://wenku.baidu.com/view/3dc7b8f0294ac850ad02de80d4d8d15abe230003.html>

埃农-黑尔斯模型

[4]. <https://baike.baidu.com/item/%E9%BE%99%E6%A0%BC%E5%BA%93%E5%A1%94%E6%B3%95/3016350?fr=Aladdin>

百度百科：龙格库塔法