

利用 Phyphox 设计声学实验

16307110024 罗家鸣

Phyphox 软件简介：

近年来,随着芯片通讯设备的智能化微型化和高端化,移动手机端已经非常智能化和平常化。现在几乎人人都拥有至少一台智能化手机移动端。除了最基本的通讯交流之外,最大化使用智能手机也是当今科技的一股潮流,从而各种功能和用途的手机 APP 不断涌现,不断丰富人们的日常生活和提高了工作的效率。而 Phyphox 这款移动手机端的 APP 是德国亚琛工业大学基于移动手机端传感器而开发研制的用于简单物理实验的手机软件。

由于许多智能手机都集成具备很多灵敏度和精度都很高的微型传感器,这也为手机成为物理实验平台打下了坚实的基础。与此同时它还能通过调用移动手机端的 29 种内置传感器,例如 GPS 全球定位系统,旋转传感器(陀螺仪),加速度传感器,压力传感器,光传感器等,从而对手机所处的运动状态以及外界的环境来进行数据测量。测量到的物理量,例如加速度,磁场强度,压力大小,声学的频率以及音量等会在软件中以具体数值或者图像的形式给出。除以上的传感器测物理量外,使用 Phyphox 和一些单独的传感器或者一些物理实验器材进行模块化组合,可以让研究者分析和研究更多的物理现象。鉴于家庭场地和实验器材的有限,故本实验报告将专注于使用 Phyphox 手机软件进行 3 种简单的声学实验,分别是汉语元音共振峰实验,声速的测量和多普勒效应的研究。

汉语元音和共振峰实验：

元音和共振峰的概念：

语言往往都是由单个的语音组成的,而元音又往往是组成语音的重要的一环。其根本原因是其振动特性非常稳定从而便于我们对它进行分析。而在对语言数字化分析中,元音的共振峰是一个十分重要的性能参数,它所包含的共振峰频率和频带宽度是区分元音不同的根本。共振峰是准周期脉冲激励进入声道时产生的一组共振频率。

元音的声源是声带颤动产生的周期性声带音,声带音通过声腔时产生共振作用,和声腔固有频率相同或相近的一些频率会得到加强,另外一些频率则会得到减弱甚至消失。声腔形状的改变使得它的固有频率发生变化,声带音通过声腔时所产生的共振作用也随之发生变化,原来比较强的频率可能减弱,原来比较弱的频率可能反而加强,元音的音色自然也随之发生变化。简单来说,声音中的共振峰就是发声器官的固有频率。

声带每秒钟振动的次数被称为基频,可以反映声带功能以及是否患有嗓音疾病。正常男性的平均值大约是 160.81Hz , 正常女性的平均值大约是 297.42Hz , 性别差异化还是非常明显的,其中物理和生物学的原因在于女性的声带通常窄而短,故频率更高。

实验器材：

一位被测试者,一台装有 Phyphox 的手机

实验前觉得误差可能的来源：

1. 如果被测试者在发音时，身体有颤动的行为，会影响实验数据
2. 被测试者数量过少的话，统计学意义不大
3. 个体发音可能会随着发声习惯而不同

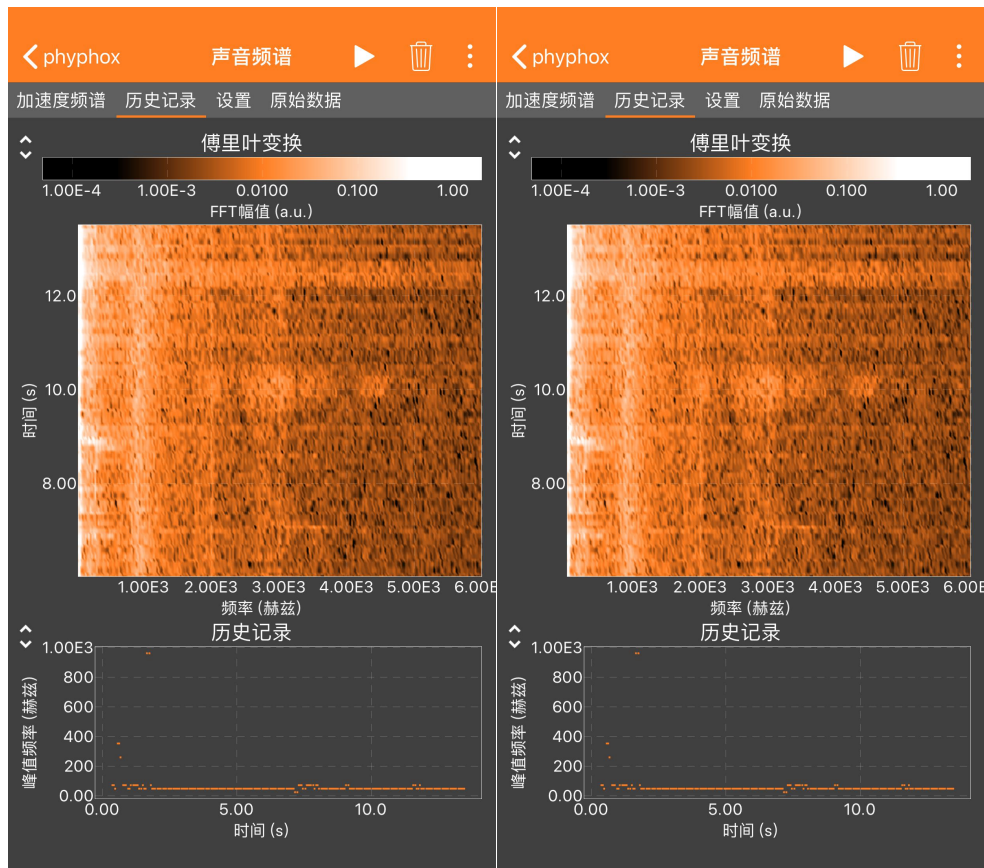
第一次实验：

实验具体步骤：

1. 选择一间较为安静的房间，打开 Phyphox 并开启声音频谱测试功能，选择最精准的测试样本数采集为 32768。
2. 先测量得到安静房间的环境噪声
3. 开启声音频谱测试功能，再令测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er，等测试者朗读完毕后，关闭声音频谱测试功能，并记录下数据。

实验数据和分析：

安静房间环境噪音频谱的测量：

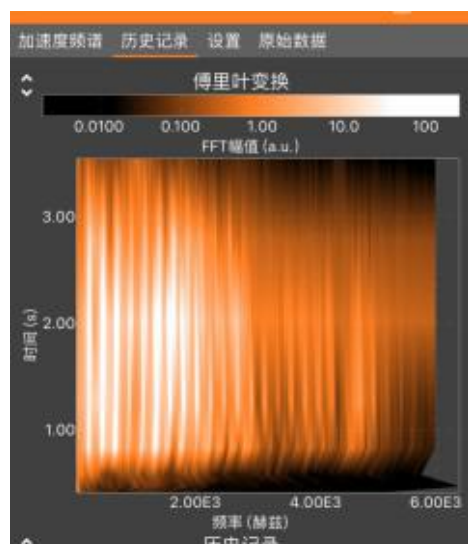
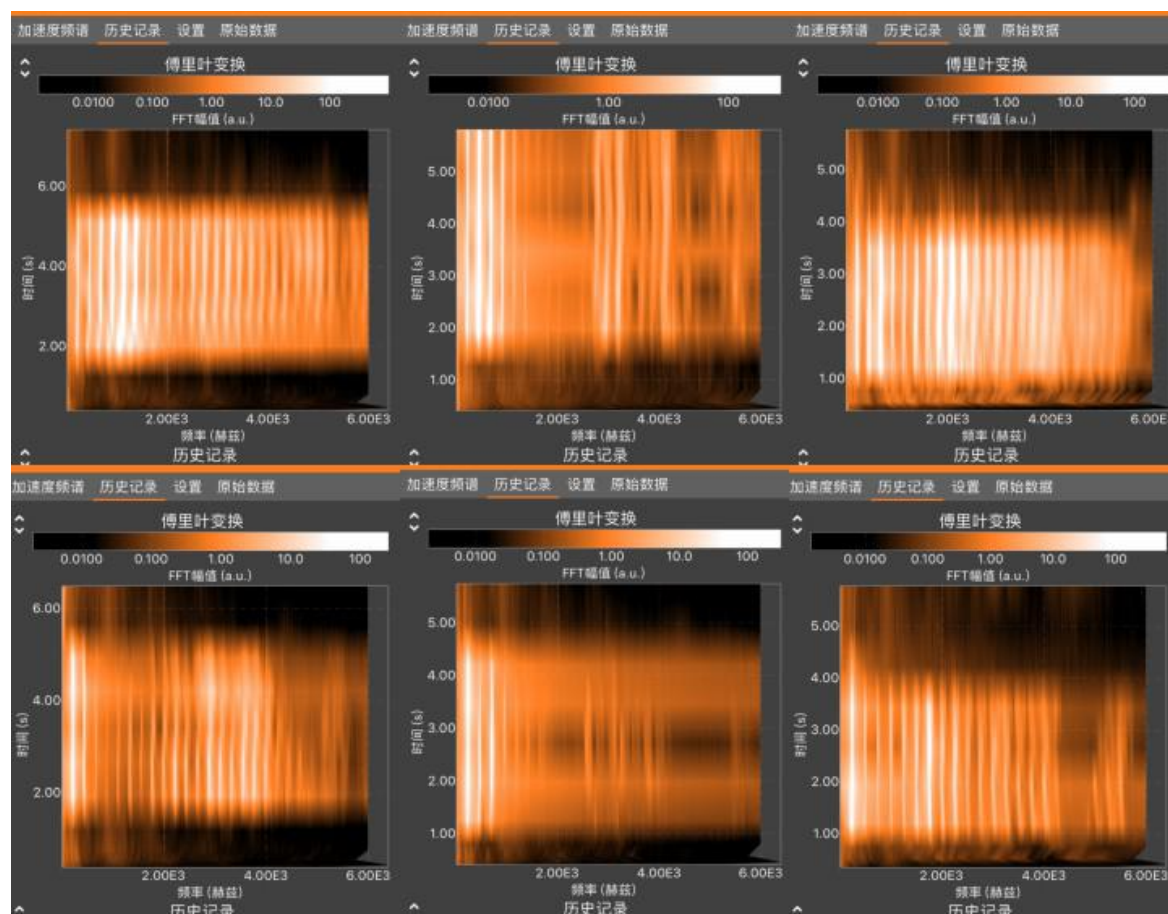


房间安静时的声音频谱图。可以从图中清晰得看出并不存在任何明显的有规律的声音的峰，也就是在频谱图中看不到有明显的从上到下的亮纹，说明这个房间所提供的实验环境较为安静，几乎没有特定频率的噪音，是一个较为理想的实验环境。

之后的关于元音共振峰的实验都在此环境下进行。

测试者汉语元音的频谱图：

从手机中直接截屏可以获得测试者汉语语音的频谱图，整理之后如下图所示。



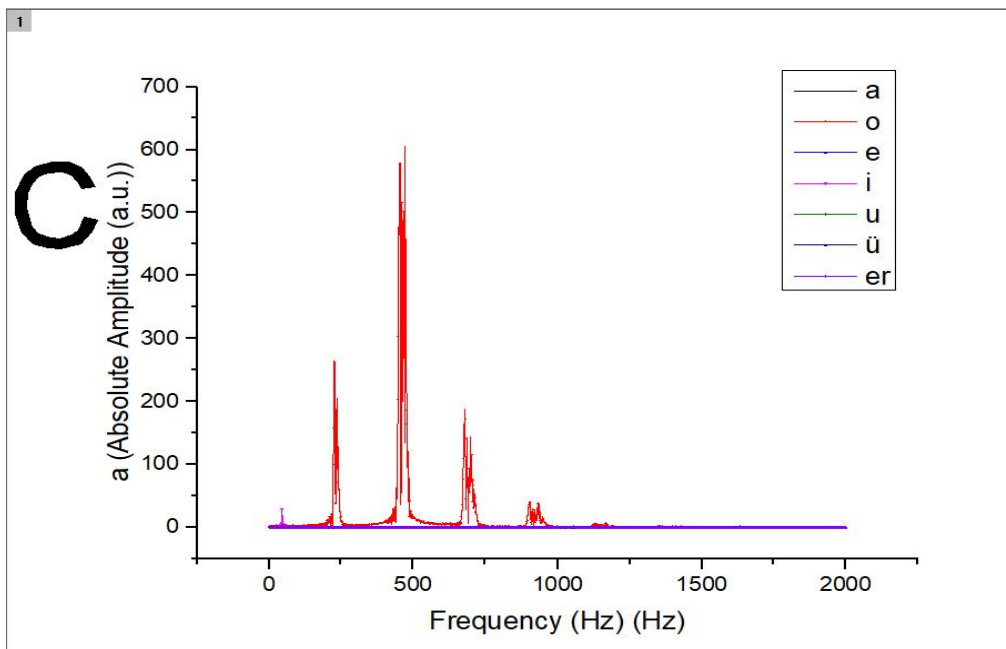
上图分别表示 a-o-e, i-u-ü, er

此组连环图分别是测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er 的手机中呈现的声音频谱图。样本数采集为 32768。

从这一系列组图中能看出不同频率的分界线和强度的差异，不过并不是很直观，或者说不是十分清晰，有点模糊，频率的强度层次也不分明，较难看出确定特定频率的大小，也很难直接得出特定频率的强度。而且因为设计的实验步骤的原因，有 1/3 甚至 1/2 的时间是没有测试者元音发音的，空白的背景噪音。

Phyphox 数据处理：

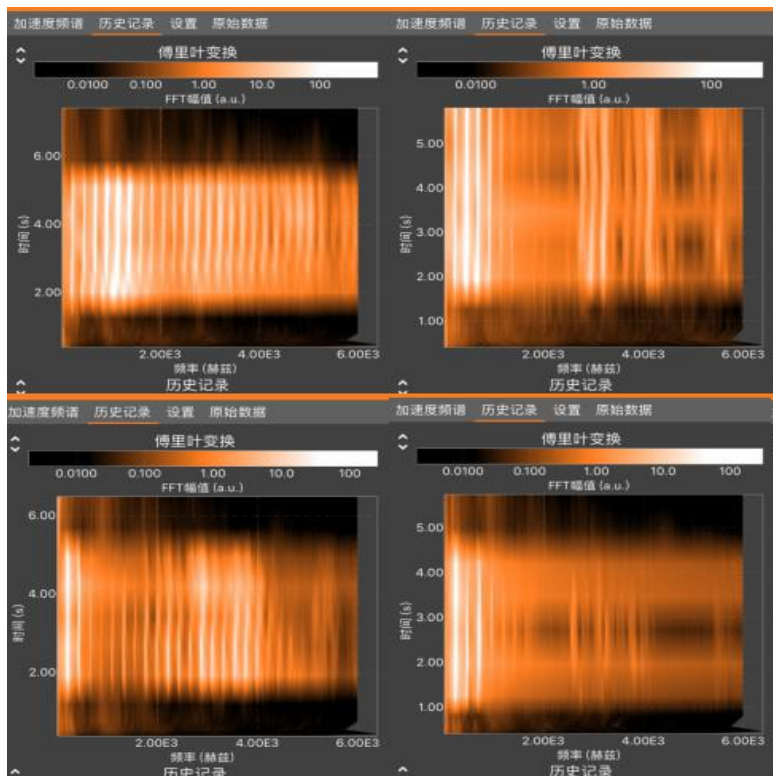
从手机中提取出相关的数据，放入 origin 中，进行整理，如下图所示。此图与预期相差较远，从该图中不难发现只有“o”音的共振峰较为清晰可见，大约为 480Hz。而其他汉语元音的峰值却很难在数据中体现出来，查看了 Phyphox 这个软件提供的数据，发现发其他元音时被记录的值都很小。



为了找到这一神奇现象（为什么只能明显找到“o”音的共振峰而看不到其他汉语元音的共振峰）产生的原因，仔细将“o”音与其他汉语元音的频谱图进行了核对，发现“o”音的频谱图和其他的汉语元音的

频谱图确实有一些差异，我们不妨截取之前的频谱图进行比对研究。

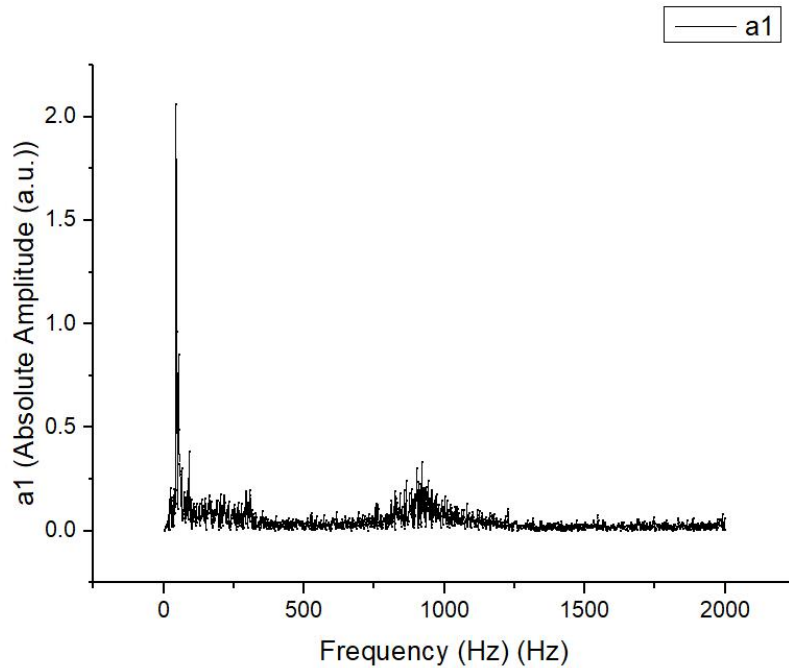
一个较为明显的区别就是当给测试者记录他发“o”音的过程中，软件Phyphox慢于发音开始记录，软件Phyphox早于发音结束便停止录音，频谱图上的反映就是测量到的“o”音的频谱图在时间0s和时间6s时没有明显的如之前记录安静房间时得到的图案。而测量其他汉语元音时，如左图所示的“a”，“i”，“u”三个汉语元音，在0-2s，5-7s时都没有对测试者发音的记录，而是空白的



房间噪音。

从中得到一定的启示，会不会因为记录安静时刻导致整个频率的强度被平均得很小以至于无法观察。随后又整理了提取得到了“a”音单独的数据来验证这一猜想。如果确实如之前的猜想，“a”音得到的数据应该是能大致看到相应共振峰，但是强度会很弱。通过下图可以明显看出“a”音的共振峰约在1000Hz附近，但强度很弱。这也就应证了之前的猜想，是之前

的设计实验时测量的步骤有误，所以需要改进实验步骤，并进行第二次实验。



改进方法：

第一次实验后进行的改进是，将实验步骤第三步中“开启声音频谱测试功能，再令测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er，等测试者朗读完毕后，关闭声音频谱测试功能，并记录下数据”改为“先令测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er，开启声音频谱测试功能，过 2-3s 后，关闭声音频谱测试功能，测试者停止朗读，并记录下数据”。从而来减少可能因为引入了背景噪音而造成的相应共振峰数据获取很小的问题，从而使得共振峰在频谱图中更加明显直观。

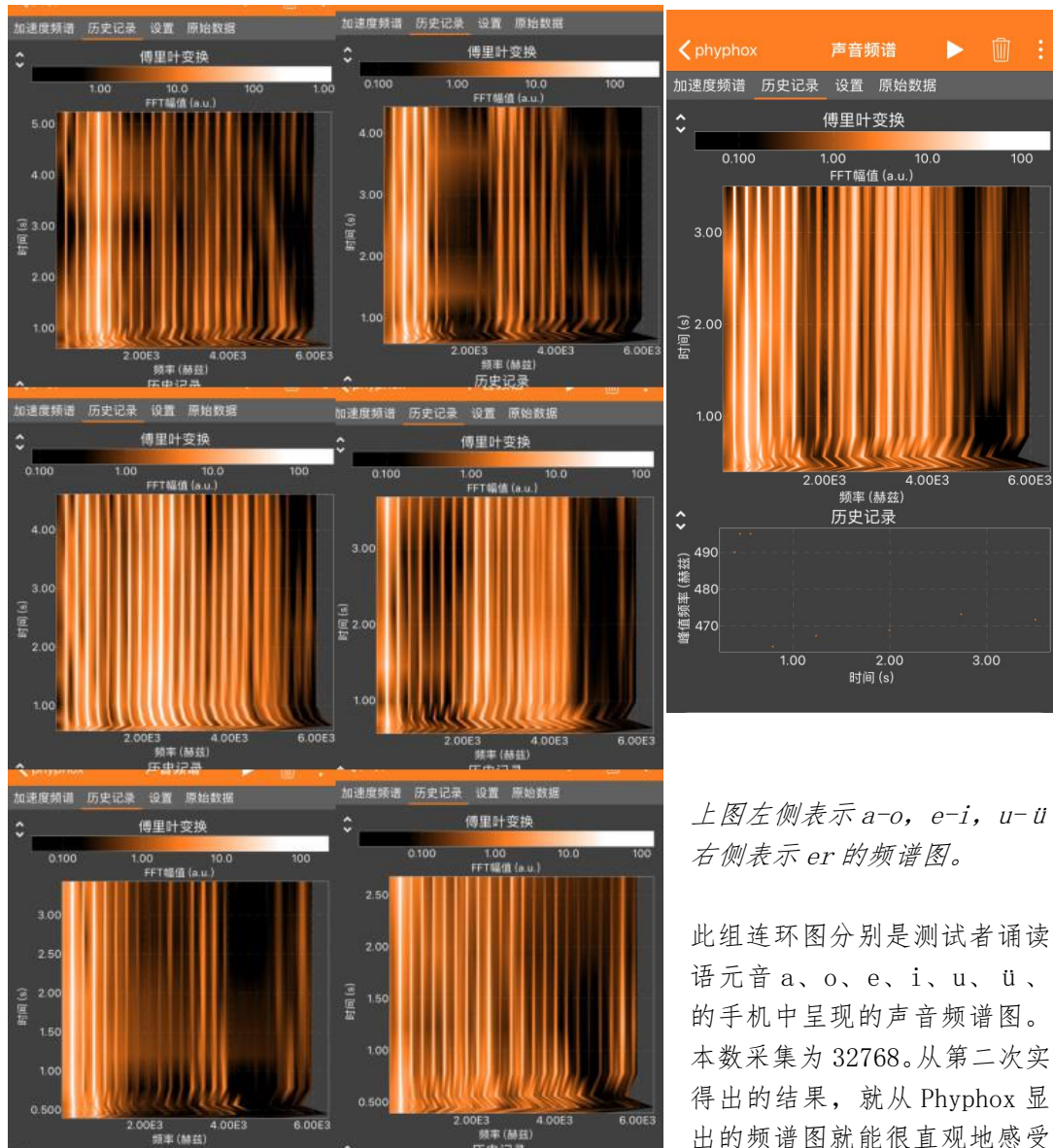
第二次实验：

实验具体步骤：

1. 选择一间较为安静的房间，打开 Phyphox 并开启声音频谱测试功能，选择最精准的测试样本数采集为 32768。
2. 先测量得到安静房间的环境噪声。
3. 选取了同一个测试者进行测试。
4. 先令测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er，开启声音频谱测试功能，过 2-3s 后，关闭声音频谱测试功能，测试者停止朗读，并记录下数据。
5. 将数据传输输入电脑，用 origin 等数值分析软件进行整理归纳。

实验数据和分析：

测试者汉语元音的频谱图：



上图左侧表示 a-o, e-i, u-ü, 右侧表示 er 的频谱图。

此组连环图分别是测试者诵读汉语元音 a、o、e、i、u、ü、er 的手机中呈现的声音频谱图。样本数采集为 32768。从第二次实验得出的结果，就从 Phypbox 显示出的频谱图就能很直观地感受到

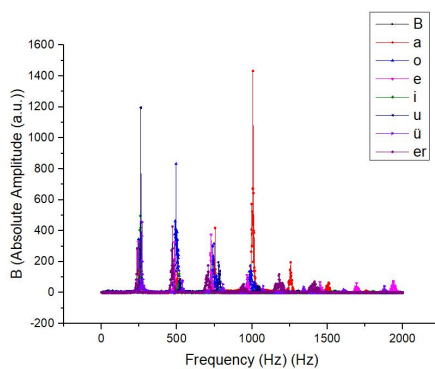
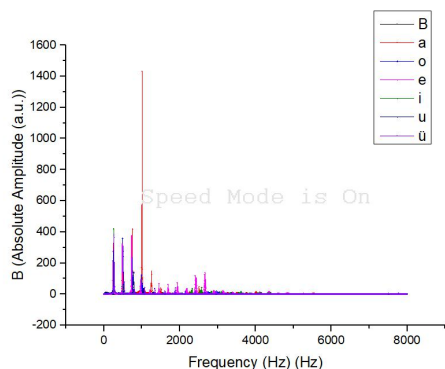
实验步骤进行了完善后的第二次实验结果更加清晰一目了然。能明显看出不同频率之间的分界线，条纹清晰，而不是像第一次的那样，有一些混沌不清晰。

Phypbox 数据处理：

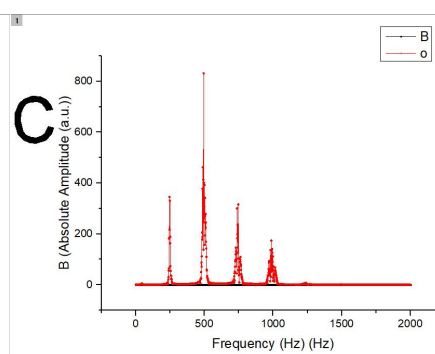
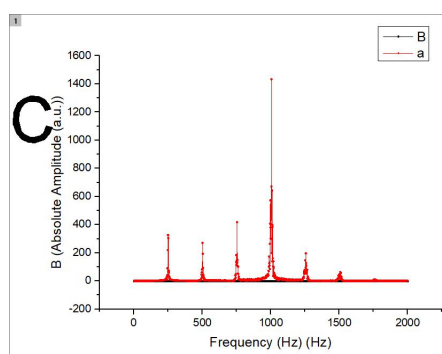
随后我们来处理从手机中提取出相关的数据，放入 origin 中，进行整理，如下图所示。其中 B 代表的是 background，也就是背景噪音的数据，基本上背景噪音的值和汉语元音的值相比来说很小，因为其强度往往和元音的峰强差了 3 个数量级及以上，所以可以忽略不记。

通过对实验步骤的改进，这一次的实验数据的处理中可以清晰地观察到不同元音共振峰的存在，且强度都很理想，几乎都可以从图中一眼看出共振峰大致的峰位。

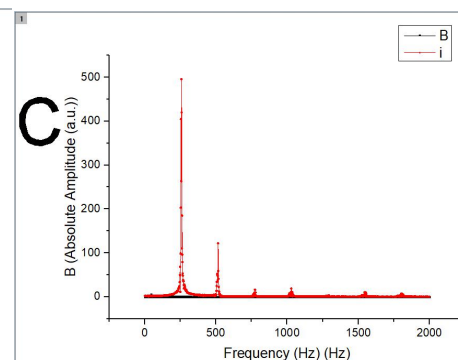
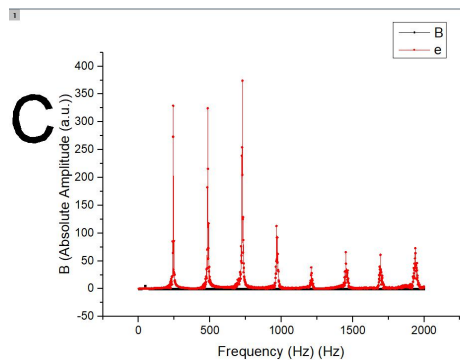
为了更好地观察强度最大也最为明显的不同元音第一共振峰的特性，决定选取区间为 0-2000Hz 的波段进行研究，选取这一段的根本原因是汉语元音的第一共振峰基本上都在这一波段内可以被我们观察到。结果如下图所示：



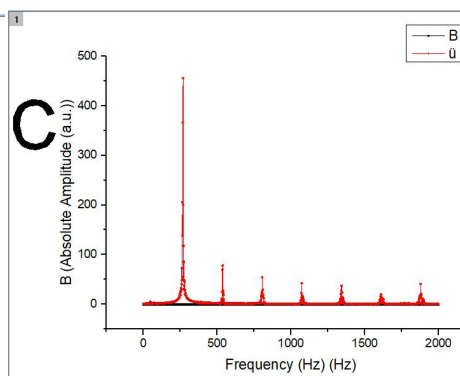
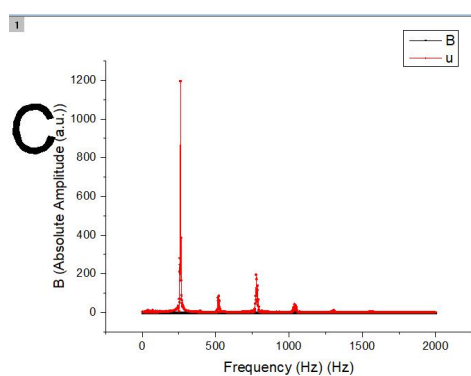
得到了整体的数据之后，我们再来研究每一个汉语元音发音的第一共振峰，选取的数据分别是背景噪声和相应元音的数据。从图中不难发现“a”音的第一共振峰的频率约为 990Hz，“o”音的第一共振峰的频率约为 490Hz。



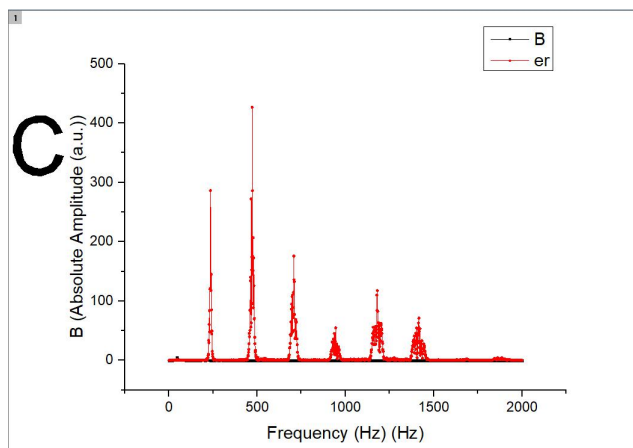
“e”音的第一共振峰的频率约为 500Hz，第二共振峰约为 1450Hz。“i”音的第一共振峰的频率约为 250Hz。



“u”音的第一共振峰的频率约为 260Hz，第二共振峰约为 770Hz。“ü”音的第一共振峰的频率约为 260Hz。

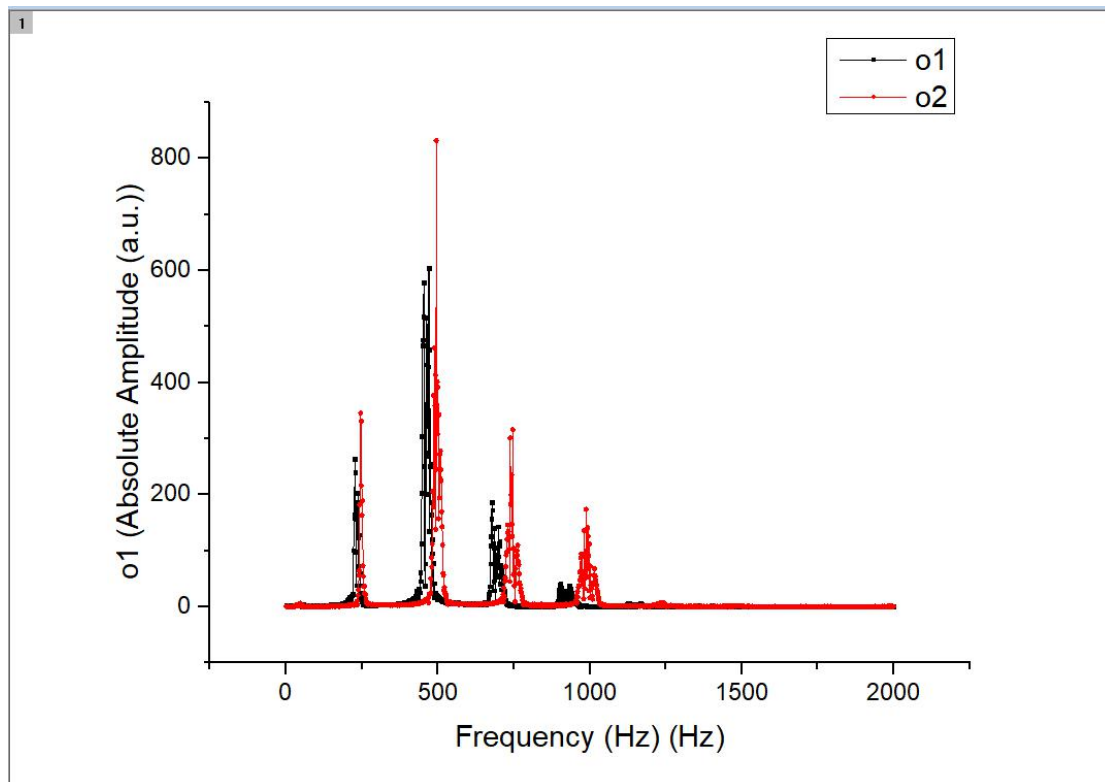


“er”音的第一共振峰频率约为500Hz。



同人同音不同时的比较:

同一个“o”音，不同时间测量出来的共振峰频率。“o1”代表第一次测量的结果，“o2”代表第二次测量的结果。从图中看不难发现第一次测量的共振峰比第二次测量的共振峰强度要小，而且也有所偏移。第一次强度明显小于第二次强度较为有力地说明了，如果在测试中引入了一定的背景噪声，会使得采集得到的元音共振峰数据偏小。而发生偏移可能是因为被测试者的发音习惯不够稳定，虽然每次都尝试发同一个音，但是每次发音时发声腔肌肉的形状并不完全一致，这就简介导致了频率上的偏差。



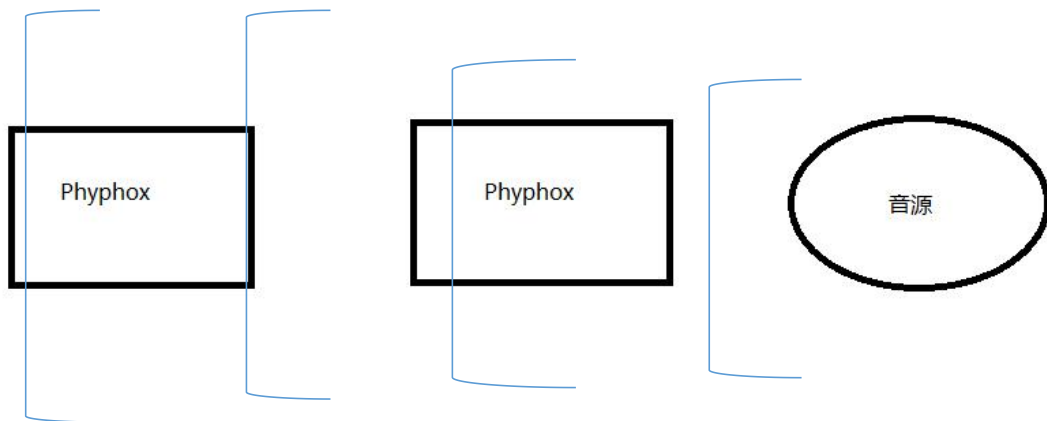
声速的测量实验

声速的理论公式是 $v = 331.45 \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}} (m/s)$ ，而本分支实验将尝试使用 Phyphox 现有的功能来测量声速。

实验的初步设计：

实验器材：

一个声音发生器，两台装有 Phyphox 的手机，一把卷尺，温度计



实验设计：

1. 选取一个较为空旷和安静的房间，利用温度计测量得到该房间的温度 t
2. 将音源和两台装有 Phyphox 的手机放在同一直线上，两台装有 Phyphox 的手机相距为 $10m$ 。
3. 打开手机上装有的 Phyphox，在同一时刻打开音源。
4. 从 Phyphox 中得到两台设备间接收到声音的时间差 Δt 。利用公式 $v = \frac{10}{\Delta t} (m/s)$
5. 多次实验，减少误差。
6. 验证音源与两台设备的距离与测得两台设备所接收到声音的时间差 Δt 无关。

误差可能的来源：

1. 因为房间不可能是理想空旷的，会存在一定的反射。（房间长度有限）
2. 可能手机间距离过近导致测量间隔不准确。（房间长度有限）
3. 不知声音信号探测器在手机的确切位置所以很难做到两台手机探测器距离的确切知晓。也即手机的相距距离并不准确。

实验初步设计的缺陷：

在遍历使用了所有声学功能之后，我决定使用声音振幅功能来进行实验。该功能主要是能测量在一段时间内，接收到的声音信号的振幅大小。但由于该实验只记录麦克风的短间隔并计

算声压级 (SPL), 十分的简易, 因此声音的分贝测量未必精确, 但是我所需要使用的功能实际上就是声音信号的接收和在时间上所得到的记录与响应, 所以该功能还是能较好地满足我的需求。

不过与此同时我也遇到了一些设计初步实验时没有想到的棘手问题, 那就是我很难控制两台手机的时间轴。换句话说, 即使我用最快的手速连接按下两台手机的时间序列的开始键, 这样的时间间隔大约为 $0.3 \sim 0.5s$, 而理论上在 $5 \sim 10m$ 的空间内, 声音的传播的间隔为 $\frac{5 \sim 10}{340} \approx 0.015 \sim 0.029s$, 已经和上述按下按钮的时间间隔在一个数量级了, 故势必会引入很大的误差, 甚至都难以测准。这也就使得我无法按部就班地使用初步的实验设计的实验步骤, 实验一度陷入了僵局。

实验设计的改进:

经过半天的思考, 我突然想出了一个较好的改进方案, 而这种改进的方案可以让之前校准时间轴的问题在理论上很好解决, 而且打开软件的时间间隔将对实验不会产生影响。



实验中的具体改进操作就是将分别打开 Phyphox 软件的手机放置在相应位置后, 音源在两个位置的中央发出多个声音信号, 根据对称性, 两台手机里的软件应该会在

同一时间 Phyphox 接收到声音信号, 即使两台手机与音源的实际距离可能会有 $0.2m$ 左右的差别, 但是这样对时间轴的影响只有约 $\frac{0.2}{340} \approx 0.00059s$, 不会对实验产生较大的影响。

在上述操作结束后 (即时间轴校准之后), 两边手机的软件都不关闭, 音源移动至手机一处, 再发出多次声音信号。



鉴于家庭条件的限制, 无法做到预设实验计划中 $10m$ 的相距距离, 故将相距距离改为较为可行的 $7.2m$ 。

实验设计改进后的步骤:

1. 选取一个较为空旷和安静的房间, 利用温度计测量得到该房间的温度 t
2. 将音源和两台装有 Phyphox 的手机放在同一直线上, 两台装有 Phyphox 的手机相距为 $7.2m$ 。
3. 打开手机上装有的 Phyphox, 音源移动至两台设备的中间位置, 与两台设备的间距为 $3.6m$ 。
4. 声源发出三次声音信号, 用于两台设备时间轴的校准。
5. 将声源移动到手机一处, 发出三次声音信号, 并关闭手机中的 Phyphox 软件。
6. 整理实验数据, 从 Phyphox 中得到两台设备间接收到声音的时间差 Δt 。利用公式

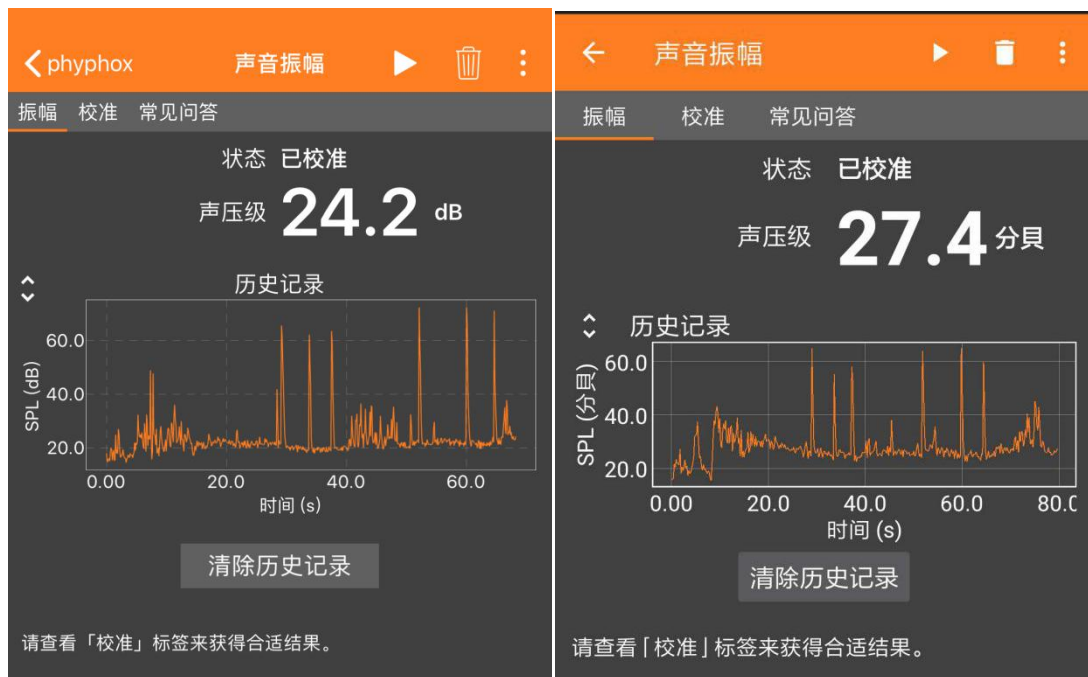
$v = \frac{7.2}{\Delta t} (m/s)$ 计算声速的值，并与理论值作比较分析原因。

实验使用的声源是实验者的鼓掌声，分贝值足够大，能够被软件捕捉。且鼓掌的声音信号持续时间较短，更加有利于后续的数据处理。

实验数据和分析：

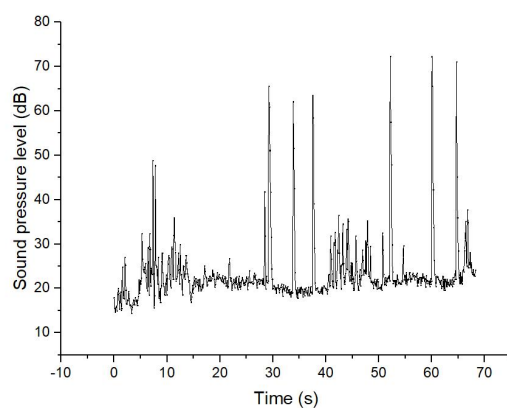
第一次实验：

记录下此时温度为 16 摄氏度，声速的理论值为 $341.02m/s$ 。

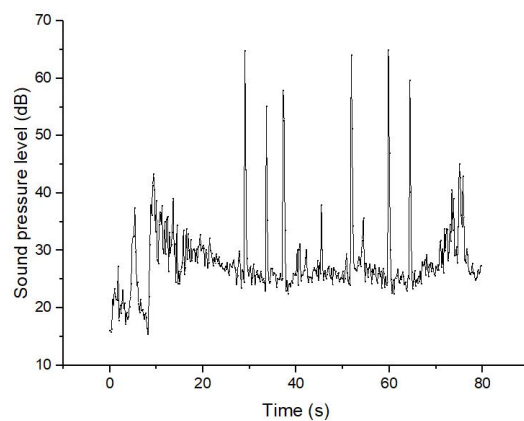


左图是手机一中软件 Phyphox 的屏幕截图

右图是手机二中软件 Phyphox 的屏幕截图



左图是手机一中软件 Phyphox 的数据



右图是手机二中软件 Phyphox 的数据

从上述图片中可较为明显地看出手机一更靠近声源，这是因为校准信号与接收的实验信号分贝值的比更小，其根本原因是因为手机一更接近声源，所以接收到的声音信号也就越明显清晰，而手机二中的校准信号与接收的实验信号分贝值的比更大，也是因为其与声源较远。

经过时间校准之后，可以得到手机一接收到三次声音信号的时间为 14.716s,22.502s,27.118s，手机二接收到三次声音信号的时间为 14.796s,22.591s,27.196s，时间差分别是 0.080s,0.089s,0.078s，平均值是 0.082s，方差是 0.0048s。代入之前的声速公式可以得到声速的测量值为 87.80m/s。

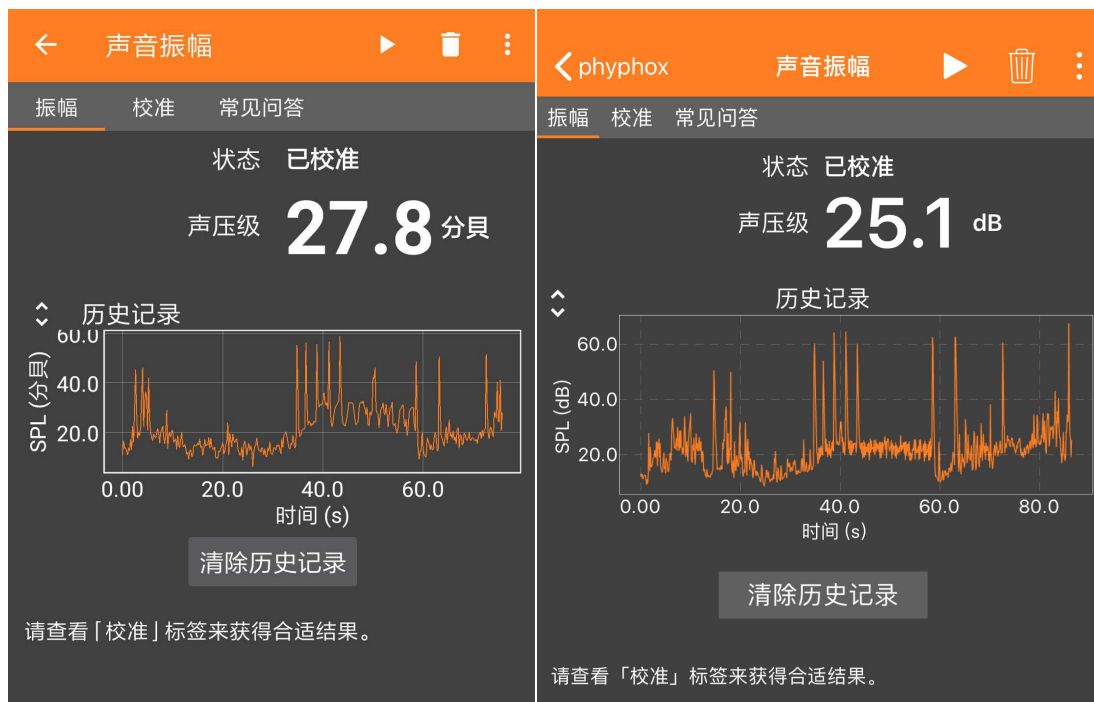
不确定度分析，卷尺测量长度距离的不确定度为 0.2m（可能测量时无法保证百分之百的拉直），时间的不确定度为 $\sqrt{0.0048^2 + 0.0005^2} = 0.00483s$ ，那么声速的不确定应该是

$$\sqrt{\left(\frac{0.2}{7.2}\right)^2 + \left(\frac{0.00483}{0.082}\right)^2} = 0.065m/s。相对误差是 -74.27%。$$

第二次修正实验：

第二次修正实验较第一次最大的不同在于：当声源发出鼓掌声音时，都尽可能地和手机保持在同一个水平面上，使得不会有额外的距离引入，因为当人站起来时，实际上传播的距离是人到手机距离和人到地面距离构成的直角三角形的斜边。

记录下此时温度为 13 摄氏度，声速的理论值为 339.25m/s。



左图是手机一中软件 Phyphox 的屏幕截图 右图是手机二中软件 Phyphox 的屏幕截图

经过时间校准之后，可以得到手机一接收到三次声音信号的时间为 17.442s,22.071s,31.431s，手机二接收到三次声音信号的时间为

17.442s,22.121s,31.457s，时间差分别是0.039s,0.050s,0.026s，平均值是0.038s，方差是0.0098s。代入之前的声速公式可以得到声速的测量值为189.47m/s。较之前那一次测量有着较大改观。

不确定度分析，时间的不确定度为 $\sqrt{0.0098^2 + 0.0005^2} = 0.00981s$ ，那么声速的不确定度

该是 $\sqrt{\left(\frac{0.2}{7.2}\right)^2 + \left(\frac{0.00981}{0.038}\right)^2} = 0.260m/s$ 。相对误差是-44.46%。

实验误差分析：

1. 手机 Phyphox 软件对时间这一物理量的测量误差较大，且测量地面的卷尺可能不够准直导致两点之间物理距离的测量不够准确，且也不能确定手机中声音接收器所在的确切位置，引入了在空间测量层面的误差。

2. 虽然实验改进时的想法能较好地解决两台手机软件在时间轴上校准的问题，但是这其实还是会有很大的误差的，原因在于作为音源的掌声对实验完成的效果并不十分理想，因为掌声不是理想的短时间结束的声音，它会持续一定的时间段，从而引入了在时间测量层面的误差。

3. 空间不是完全理想的，由于家里有装饰物（如沙发，茶几，电视等）或多或少干扰了声波传递的过程，可能会引入一些较小的干扰信号。

多普勒效应（普通和复杂）

普通多普勒效应简介：

有心人在生活中一定会注意到一个有趣的现象：当一辆救护车或警车迎面驶来的时候，人感受到的听到的声音的频率将会越来越高；而当救护车或者警车离去的时候，人感受到的声音的频率会越来越低。这种现象被物理学家称为“多普勒效应”。“多普勒效应”(Doppler effect)是为了纪念奥地利物理学家及数学家克里斯琴·约翰·多普勒 (Christian Johann Doppler) 而命名的，他于 1842 年首先提出了解释这种日常物理现象的这一理论。其主要内容为物体产生或者辐射的波长因为波源和观测者的相对运动而产生一定的变化。当接收者在运动的波源前面，波被压缩，波长变得较短，频率变得较高；当接收者在运动的波源后面时，会产生相反的效应即波长变得较长，频率变得较低（红移 red shift）；波源的速度越高，所产生的效应越大。可能很多人都不会有意识到，这个现象和医院使用的彩超同属于一个原理，也常常在天文等领域得到广泛应用。根据波红（蓝）移的程度，可以计算出波源循着观测方向运动的速度。恒星光谱线的位移显示恒星循着观测方向运动的速度，除非波源的速度非常接近光速，否则多普勒位移的程度一般都很小。所有波动现象都存在多普勒效应。

普通多普勒效应公式：

观察者 (Observer) 和发射源 (Source) 的频率关系为（此式不适用于光波）：

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s} \right) f$$

f' 为观察到的频率；

f 为发射源于该介质中的原始发射频率；

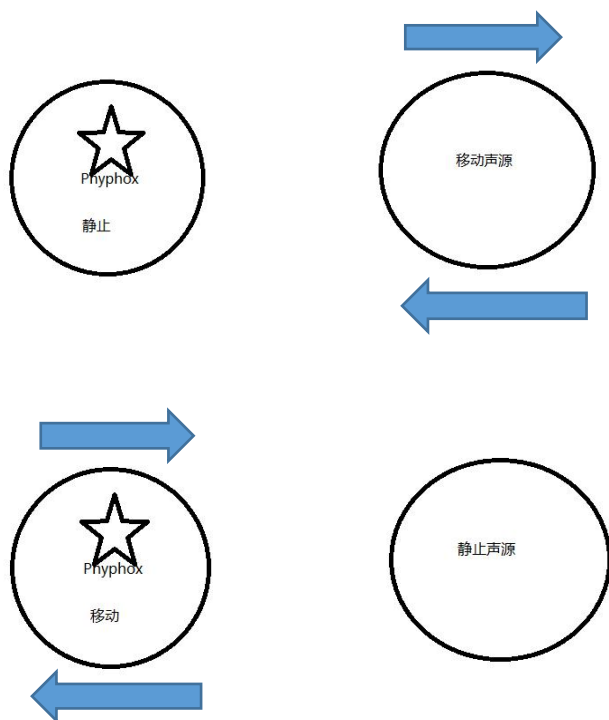
v 为波在该介质中的行进速度；

v_0 为观察者移动速度，若接近发射源则前方运算符号为 + 号，反之则为 - 号；

v_s 为发射源移动速度，若接近观察者则前方运算符号为 - 号，反之则为 + 号。

实验器材：

一个声音发生器，一台装有 Phyphox 的手机，一个移动声源。



实验设计：

1. 选取一个较为空旷和安静的房间，利用温度计测量得到该房间的温度。根据理论公式

$$v = 331.45 \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}} \text{ (m/s)}$$

算出该温度下的声速。

2. 在声源和 Phyphox 都静止的情况下测量下声源的频率 f 。

3. 打开手机上装有的 Phyphox 并放置在一个静止的位置，移动声源匀速向其运动，记录下该移动声源的速度 v_s 。

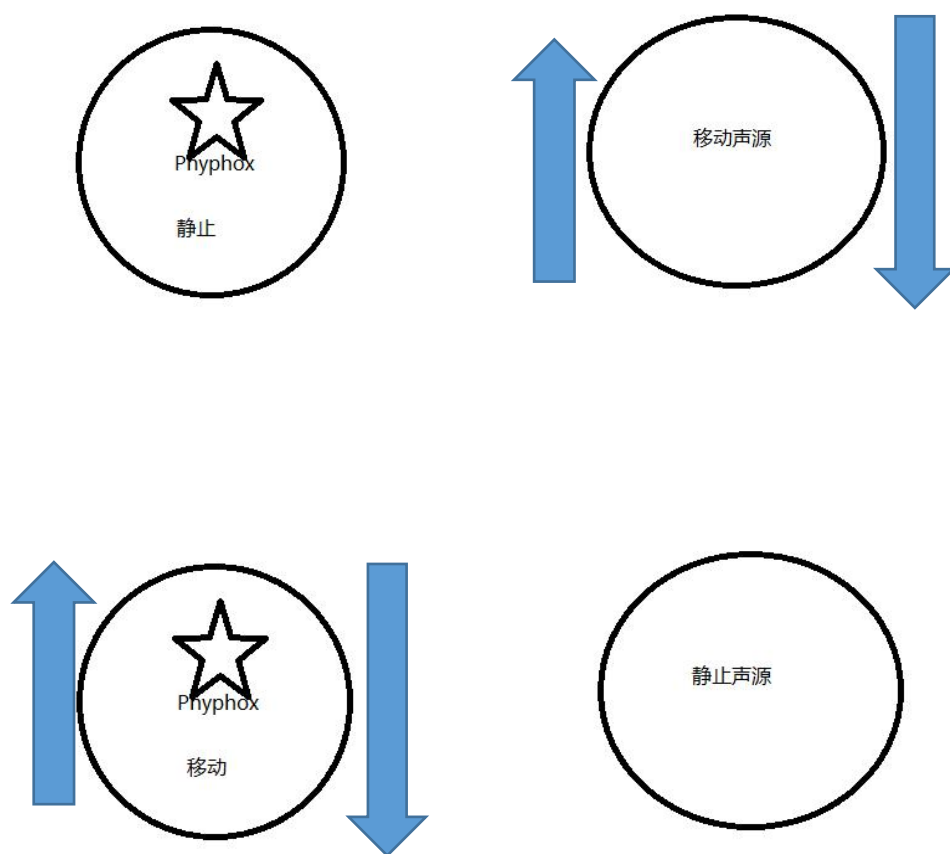
4. 从 Phyphox 中得到接收到声音的频率 f' 。

5. 验证理论公式 $f' = \left(\frac{v}{v \mp v_s} \right) f$

v_s 为发射源移动速度，若接近观察者则前方运算符号为 $-$ 号，反之则为 $+$ 号。

同理可以验证理论公式 $f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v} \right) f$

复杂多普勒效应公式的探究：



实验设计：

1. 选取一个较为空旷和安静的房间，利用温度计测量得到该房间的温度。根据理论公式

$$v = 331.45 \sqrt{1 + \frac{t}{273.15}} (m/s)$$

算出该温度下的声速。

2. 在声源和 Phyphox 都静止的情况下测量下声源的频率 f 。

3. 打开手机上装有的 Phyphox 并放置在一个静止的位置, 移动声源匀速向其运动, 记录下该移动声源的速度 v_s 。

4. 从 Phyphox 中得到接收到声音的频率 f' 。

5. 验证实验得到的数据进行拟合, 试图得到复杂多普勒效应的公式 $f' = F(v, v_s, f)$

v_s 为发射源移动速度

同理可以试图得到复杂多普勒效应的公式 $f' = F(v, v_0, f)$

可以尝试从理论推导出复杂多普勒效应的公式。

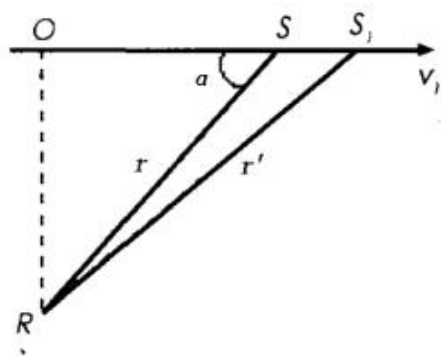
复杂多普勒效应的理论推导:

1. 声源移动, 观察者不动

假设移动声源发出的频率为 f , 周期为 T , 运动方式如下图所示。在过 O 点的直线上以不变的速率 v_s 运动, S 为波源在 t 时刻的位置, S_1 为波源在 $t+T_0$ 时刻的位置, 设波源在 S 和 S_1 处分别发出两个声音信号, 则在 R 点的观察者收到这两个声音信号的时间应该是

$t_1 = t + \frac{r}{v}, t_2 = t + T_0 + \frac{r'}{v}$, 那么观察者所感受到的周期应该是

$$T = t_2 - t_1 = t + T_0 + \frac{r'}{v} - (t + \frac{r}{v}) = T_0 + \frac{r' - r}{v}。$$



从图中不难发现 $r'^2 - r^2 = (v_s T_0)^2 + 2rv_s T_0 \cos \alpha$, 在 $v_s T_0 \ll r$ 的条件下, 通过二项式展开

$$\text{得到: } r' = r \left[1 + \frac{v_s T_0 (v_s T_0 + 2r \cos \alpha)}{2r^2} \right]。$$

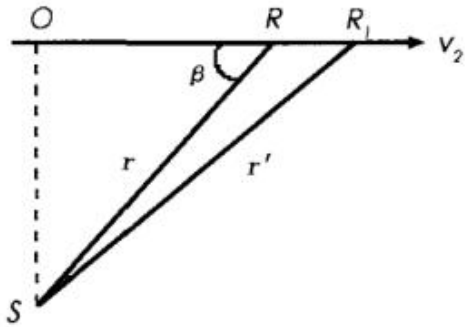
将如此的几何关系代入观察者感受到的周期式子中, 得到: $T = T_0 \left[1 + \frac{v_s (v_s T_0 + 2r \cos \alpha)}{2rv} \right]$

在 $v_s T_0 \ll r$ 的条件下, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 只要移动声源的运动速率 v_s 与声速的传播速度 v 大小相当, 那么可以得到 $T \approx T_0$, 也就没有横向多普勒效应。当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 一般来说 $2r \cos \alpha \gg v_s T_0$, 那么观察者感受到的频率应该是 $f' = f[1 + \frac{v_s \cos \alpha}{v}]^{-1}$ 。

2. 观察者移动, 声源不动

假设固定声源发出的频率为 f , 周期为 T , 位于 S 点处。而观察者的运动方式如下图所示, 在过 O 点的直线上以不变的速率 v_0 运动, R 为波源在 t 时刻的位置, R_1 为波源在 $t + T_0$ 时刻的位置, 设观察者在 R 和 R_1 处分别接收到来自 S 点的声音信号, 则这两个声音信号的时间应该是 $t_1 = t + \frac{r}{v}, t_2 = t + T_0 + \frac{r'}{v}$, 那么观察者所感受到的周期应该是

$$T = t_2 - t_1 = t + T_0 + \frac{r'}{v} - (t + \frac{r}{v}) = T_0 + \frac{r' - r}{v}。$$



从图中不难发现 $r'^2 - r^2 = (v_0 T_0)^2 + 2rv_0 T_0 \cos \beta$, 在 $v_0 T_0 \ll r$ 的条件下, 通过二项式展开得到: $r' = r[1 + \frac{v_0 T_0 (v_0 T_0 + 2r \cos \beta)}{2r^2}]$ 。

将如此的几何关系代入观察者感受到的周期式子中, 得到: $T = T_0[1 - \frac{v_0 (v_0 T_0 + 2r \cos \beta)}{2rv}]$

在 $v_0 T_0 \ll r$ 的条件下, 当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时, 只要观察者的运动速率 v_0 与声速的传播速度 v 大小相当, 那么可以得到 $T \approx T_0$, 也就没有横向多普勒效应。当 $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 一般来说

$2r \cos \beta \gg v_0 T_0$, 那么观察者感受到的频率应该是 $f' = f[1 - \frac{v_0 \cos \beta}{v}]^{-1}$ 。

综上所述, 我们可以得到复杂多普勒效应的综合表达式:

$$f' = f \frac{v + v_0 \cos \beta}{v + v_s \cos \alpha}$$

相关实验设计：

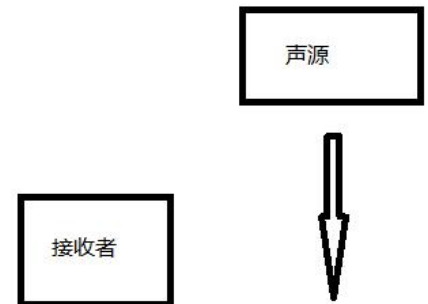
利用多普勒效应测量空气阻力的实验：

实验器材：

两台装有 Phyphox 软件的手机，一卷皮尺。

实验步骤：

1. 将两台装有 Phyphox 软件的手机放置在一起，其中一台作为声源，发出频率为 500Hz 的声音信号，另外一台作为 500Hz 声音信号的接收端。
2. 将作为声源的手机放置于作为接收端手机竖直向上距离为 1m 的位置静止，同时打开两部手机中的 Phyphox 软件。
3. 放开作为声源的那一部手机，让其自由下落，直至其落到接收端手机所处的平面，关闭两台手机中的 Phyphox 软件。



实验原理的介绍：

根据多普勒效应，接收端收到的声音信号的频率和声源运动的速率有关，所以在声源在下落的过程中，每当在声源下落时发出的声音信号就会被接收端所接收到，从而该时刻声源的速度也就被接收端记录下来。

根据理论计算可以知道声源的速度关系为 $v = gt$ ， g 为当地的重力加速度，但因为空气阻力的存在，声源下落的真实速度关系可能并不是这样的，如果空气阻力在下落的过程中一直保持是一个常数 C ，那么声源的速度关系为 $v = (g - \frac{C}{m}) t$ ，而如果空气阻力在下落的过程中

不能保持是一个常数，且还和当时下落物体的速度有关，也即 $f = C + kv$ ，那么此时声

源的速度关系为 $v = \frac{mg - C}{kt + m} t$ 。

故如果我们能得到声源下落时接收端收到的频率的变化，也就可以知道声源下落时的速度随时间的变化，也最终能得到声源下落时收到的空气阻力随时间的变化。

实验多次后遇到的困难：

1. 由于手机软件精度有限，有些细节数据可能软件都测不出，导致该实验会出现巨大的误差。

理论上来说，在声源下降的过程中速度最大为 $\sqrt{2gs}$ ，代入现实条件， $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ ， $s \approx 1\text{m}$ ，

那么最大速度的理论值为 $v \approx 4.43\text{m/s}$ 。我们就算最大的速度为 5m/s ，那么声源发出的 500Hz 的频率经过简单多普勒效应得到的是 507.46Hz （靠近声源运动），这约为 7Hz 左右的频率差值对 Phyphox 软件来说是较为艰巨的任务。

2. 环境噪音在这个实验中会成为一个很大的干扰项。人的呼吸声和动作发出的声音都会对

接收端的信号有影响，导致干扰了整个实验的结果。比如人如果轻微抖动手机，抑或是移动一个很小的距离，拿起手机，甚至轻轻地呼吸，都会对最终的数据采集产生影响。

3. 由于手机所能摆放的高度有限，所以真实下落的时间约为 $0.45s$ ，时间其实非常的短，而随后手机会狠狠地砸到接收端所在的平面，发出一定的声响，这个声响往往会产生一个巨大的干扰声音信号被记录下来。

4. 由于摆放的原因，很难做到释放手机时，能竖直的下落，也就使得下落的过程手机的速度可能不能用简单的关系进行讨论。且由于手机的形状还是不可忽略的，手机本身很难看成一个理想质点来进行研究。

以上困难还在寻求克服中。