

基于亥姆霍兹共振及 Phyphox 的声速测量

摘要： 本实验基于 Phyphox 软件，研究了两种不同容器中的亥姆霍兹共振现象，测量了共振频率与瓶体容积间的关系，验证了亥姆霍兹共振频率公式并分析了其适用范围。实验实现了声速的低成本、简易测量，测量相对误差 3%。

一、引言：

亥姆霍兹共振指容器中的空气共振现象。该概念在 19 世纪由亥姆霍兹提出。当空气在容器开口处流动时，可引起容器内部的空气发生共振，并发出具有特定频率的声音。能发生亥姆霍兹共振的容器称为亥姆霍兹共振腔，一般分为腔体及颈部两部分^[1]。

亥姆霍兹共振腔在生活中十分常见，在声学、乐器中也有广泛的应用。在瓶中加水时，声音频率随水量增加而升高；一些哨子是亥姆霍兹共振腔；吉他的琴身以及音孔也构成了亥姆霍兹共振腔；扬声器中常用到音箱的亥姆霍兹共振效应来增强低频声音的响应。另一方面，亥姆霍兹共振所遵循的微分方程与电振荡在形式上完全相同，二者遵循某些共同规律^[2]。对亥姆霍兹共振的了解也有助于理解电路中的共振现象。

本实验基于亥姆霍兹共振腔的原理，利用生活中常见的玻璃瓶和手机测量了共振频率与腔体体积的关系，进而实现了声速的简易测量，同时分析容器形状的影响，分析亥姆霍兹共振频率公式的适用范围。

二、实验原理：

2.1 亥姆霍兹共振

亥姆霍兹共振腔为开口的容器，由横截面积为 S ，长度为 l 的颈部与体积为 V_0 的腔体组成，如图 1 所示。

假设共振腔的线度远小于声波波长，颈部的体积远小于腔体，且共振腔是刚性的，腔内气体的疏密过程不会传递到腔外。在此条件下，我们将共振腔的空气分为两部分：颈内空气与腔内空气。发生共振时，颈内空气在颈内上下振动，类似于活塞；活塞向下运动

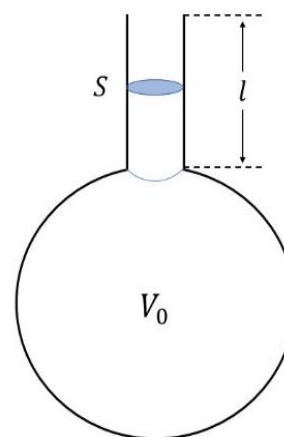


图 1 亥姆霍兹共振腔

时,腔内空气被压缩,压强增大,将活塞推出;活塞向上运动时,腔内空气膨胀,压强减小,活塞被外界大气推入腔体,循环往复。腔内空气起弹簧振子中弹簧的作用。

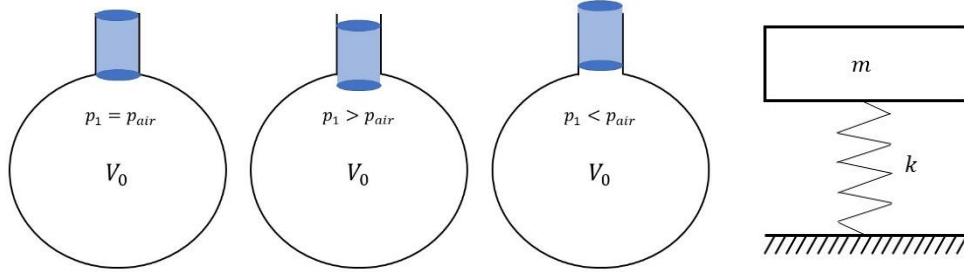


图 2 振动示意图

设颈内空气质量为 m ,空气密度 ρ ,有 $m = \rho Sl$ 。假设腔内空气的膨胀/压缩过程是绝热的,有:

$$pV^\gamma = \text{const.} = p_0V_0^\gamma \quad (1)$$

设颈内空气的位移为 x ,向下为正方向。位移 x 时腔内压强的增加量为 p_x ,则:

$$(p_0 + p_x)(V_0 - xS)^\gamma = p_0V_0^\gamma \quad (2)$$

将左式对 x 展开至一次项并化简得:

$$p_x = \frac{p_0 S \gamma}{V_0} x \quad (3)$$

颈内空气的运动方程为:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = -\frac{p_x S}{\rho Sl} = -\frac{\gamma S p_0}{\rho l V_0} x \quad (4)$$

考虑到声速为 $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho}$,得颈内空气的振动频率为:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{V_0 l}} \quad (5)$$

受外界声压 $p = p_n e^{i\omega t}$ 驱动时,可以证明,空气的体积速度 U 满足积分微分方程:

$$M\dot{U} + RU + \frac{1}{C} \int U dt = p_n e^{i\omega t} \quad (6)$$

其中 M 、 R 、 C 分别称为声质量、声阻及声容,对应电路中的电感、电阻及电容,该方程与电路中的振动方程具有相同形式^[2]。其中声阻在实际声学系统中体现为振动能量的耗散,例如空气与管壁的摩擦,空气向外辐射声波等。(5)式中的共振频率为忽略了耗散效应下的频率。

2.2 声速测量及有效长度修正

由(5)可知,亥姆霍兹共振周期与腔体体积的平方根呈线性关系,即

$$T = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{l}{S}} \sqrt{V_0} \quad (7)$$

其中 c 为声速， l 、 S 分别为颈部长度及横截面积， V_0 为腔体体积。通过在腔体中加水改变腔体的体积，并利用手机 Phyphox 软件测量对应的共振声音频率，即可得到共振周期-体积关系。对振动周期-腔体体积平方根关系进行线性拟合得到斜率，并结合腔体测量数据，即可根据（7）式计算空气中的声速，实现声速的简易测量。

在上述推导中，我们假设颈内空气在腔内空气的作用下做简谐振动，忽略了颈部附近空气的作用。在实际情况中，颈部上、下均有空气伴随着颈内空气同时振动，同时向外辐射声波。空气柱的有效长度大于颈部本身的长度。对于圆柱形颈部，有效长度的经验公式为^[1]：

$$l' = l + 2\Delta l \quad (8)$$

其中 $\Delta l \in [0.79r, 0.85r]$ ， r 为颈部半径， Δl 数值与共振腔开口形状相关。本实验采用瓶身对应系数为 $\Delta l = 0.85r$ 。

三、实验装置及过程：

实验使用两个形状不同的瓶子（如图 3 所示）作为亥姆霍兹共振腔，在共振腔中加入水以改变腔体体积，用嘴吹奏激发腔内空气共振，利用手机 Phyphox 软件对共振发声进行快速傅里叶变换（FFT）并得到共振频率，随后进行拟合，计算得到声速。

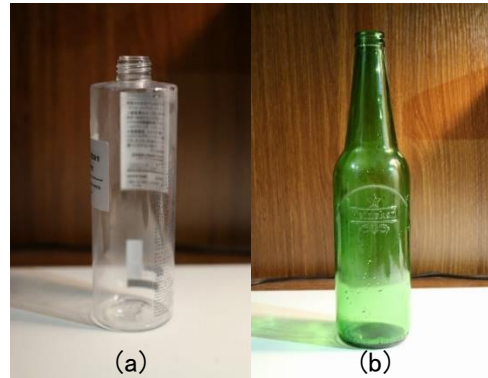


图 3 实验用亥姆霍兹共振腔

首先，对瓶身尺寸进行测量。用游标卡尺测量瓶口内径；将尺子插入瓶中直至瓶颈下端，在尺上标记瓶口位置，取出尺子后测量尺子以间接测量瓶颈长度；用注水法间接测量瓶子容积。

接着，在容器中加入不同量的水并激发共振，粗略观察水量与共振频率的关系并估计适宜的测量范围。实验采用吹奏的方式激发腔体共振，水量较大时激发难度大，难以进行数据测量。

随后，根据选择好的测量范围，在共振腔中加入不同体积的水，用嘴吹奏共振腔激发共振，测量并绘制周期-体积平方根曲线。在同体积下采集五组数据；每

组数据需重新加水，避免水量不精确引起的误差。每测量一组数据后，记录环境温度。

四、实验结果及分析：

4.1 共振腔测量数据

实验所用瓶身测量数据见表 1。

表 1 共振腔测量数据

	总容积/ml	瓶颈容积/ml	瓶颈内径/mm	瓶颈高度/mm
a 瓶	420 ± 5	4.27 ± 0.05	8.62 ± 0.02	18.3 ± 0.1
b 瓶	550 ± 5	60 ± 5	14.0 ± 0.5 (均值)	97 ± 1

如图 3 所示，b 瓶瓶颈较长，且呈圆锥状，横截面积不一，表中所列为内径的平均值。实验采用注水法间接测量了 b 瓶瓶颈部分的容积，并结合瓶口内径及瓶颈高度计算得内径的平均值，记录于表中。

4.2 改变水量，测绘 $T \sim \sqrt{V}$ 曲线并计算声速

表 2 a 瓶共振数据

V/ml	120 ± 5	170 ± 5	220 ± 5	270 ± 5	320 ± 5	370 ± 5	420 ± 5
f/Hz	381.09	331.23	298.25	267.78	238.98	223.19	215.45

以 50ml 为间隔，在不同水量的条件下分别测量 a 瓶的共振频率，测量数据见表 2。 $T \sim \sqrt{V}$ 曲线如图 4 所示，线性拟合结果为：

$$T = k\sqrt{V} + b, \text{ 其中 } k = (2.23 \pm 0.09) \times 10^{-4}, \quad b = (1.3 \pm 1.4) \times 10^{-4}$$

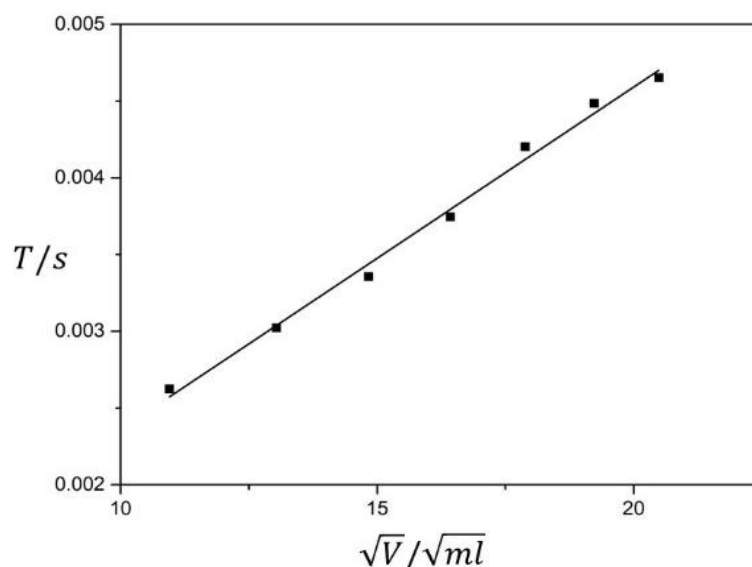


图 4 a 瓶 $T \sim \sqrt{V}$ 关系

由 (7) 式计算得声速测量值为: $c_1 = 334 \pm 15 \text{ m/s}$ 。室温为 $\tau = 23 \text{ }^\circ\text{C}$, 声速理论值 $c_0 = 345.12 \text{ m/s}$, 测量值偏小, 相对误差 3%。在测量精度范围内, 可认为直线通过原点, 共振周期正比于体积的平方根。

类似地, 以 50ml 为间隔测量 b 瓶共振数据, $T \sim \sqrt{V}$ 曲线如图 5 所示。前两个数据点对应腔体体积过小, 共振效应受影响, 舍弃。拟合结果为:

$$T = k'\sqrt{V} + b', \text{ 其中 } k' = (2.9 \pm 0.1) \times 10^{-4}, \quad b' = (-1 \pm 2) \times 10^{-4}$$

由 (7) 式计算得声速测量值为:
 $c_2 = 303 \pm 24 \text{ m/s}$ 。室温为 $\tau = 23 \text{ }^\circ\text{C}$, 声速理论值 $c_0 = 345.12 \text{ m/s}$, 测量值偏小, 相对误差 12%。在测量精度范围内, 可认为直线通过原点, 共振周期正比于体积的平方根。

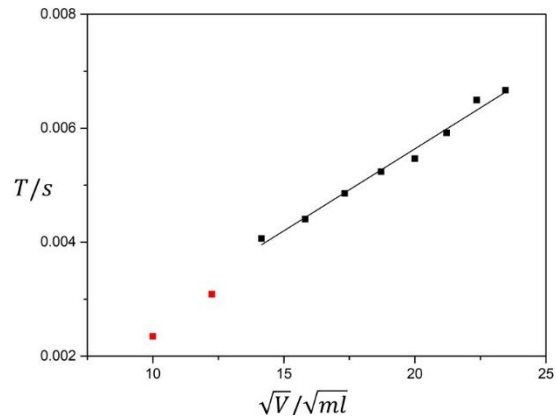


图 5 b 瓶 $T \sim \sqrt{V}$ 关系

4.3 结果分析

a) 实验结果小结

对两个形状不同的共振腔, $T \sim \sqrt{V}$ 均呈现线性关系, 声速测量值分别为: $c_1 = 334 \pm 15 \text{ m/s}$, $c_2 = 303 \pm 24 \text{ m/s}$, 测量值均偏小, 相对误差分别为 3% 和 12%。亥姆霍兹共振较好地描述了 a 瓶的空气共振情况, 而 b 瓶声速测量值与理论值差距较大。

b) 共振腔腔壁的影响

亥姆霍兹共振腔假设腔体为刚性的, 即腔内空气的振动不导致腔体及腔外空气的振动。但实际情况中, 腔体非刚性的, 腔内空气在压缩/膨胀过程中同时带动颈内空气及腔壁振动, 构成耦合振动系统。体系总机械能在颈内空气与腔壁之间分配, 因而颈内空气机械能降低, 振动频率降低, 振动周期增大, 导致声速测量值偏小。

另一方面, 对耦合振动系统而言, 当两体质量差距很大时, 可近似认为较重的物体不运动, 而轻物体做单体简谐运动。对共振腔而言, 两体分别为颈内空气及腔体, 腔体质量远大于颈内空气的质量, 其振动的影响可忽略不

计。a 瓶瓶身由轻薄的塑料制成，因而腔壁振动的影响较大。实验中手持 a 瓶并激发共振时，可明显感受到瓶体振动。而 a 瓶测量结果较为精确，腔壁对亥姆霍兹共振频率的影响较小，在本实验误差范围内可忽略。

c) 阻尼的影响

声学振动体系中，声音的辐射以及空气与腔壁的摩擦均导致能量的耗散，起阻尼振动中阻尼的作用。对有阻尼的受迫振动，其共振频率为：

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (9)$$

其中 ω_0 为本征频率。阻尼使共振频率减小，振动周期增大，导致声速测量值偏小。

d) 共振腔形状的影响

对 a 瓶，由图 3 (a) 及瓶身测量数据可知，其形状较好地满足了亥姆霍兹共振的假设，颈部容积为 $v = 4.27 \pm 0.05ml$ ，远小于腔体容积，且颈部与腔体有明显的分界。

对 b 瓶，其形状不符合亥姆霍兹共振的要求。其颈部容积约为 $60ml$ ，不满足远小于腔体体积（ $490ml$ ）的要求；另一方面其颈部与腔体间无明显分界。考虑到腔壁及阻尼对声速测量的影响较小，形状应为导致 b 瓶声速测量值偏小的主要因素。对 b 瓶，其颈部以较大的斜率平滑地过渡至腔体，瓶体内空气振动的模式复杂，无法用颈内空气柱的弹簧振子模型简单描述，空气共振的弹簧振子模型不适用。

另一方面，a 瓶和 b 瓶中空气共振的周期 T 与腔体体积的平方根 \sqrt{V} 均成正比，(7) 式在某种程度上有效。可通过分析瓶内气体流动情况，对 (7) 式中与形状相关的系数进行进一步修正，修正方法有待进一步探讨。尽管亥姆霍兹共振不适用于所有容器，但其物理图像简单清晰，对理解一般容器中的空气共振现象仍有很大帮助。

五、实验结论：

本实验研究了两种瓶体的亥姆霍兹共振效应，测量了共振周期—腔体体积关系。腔体满足亥姆霍兹共振条件时，利用腔体共振及手机 Phyphox 软件，实现了

对声速的简易测量。测得 23℃ 下，空气中声速 $c = 334 \pm 15 \text{ m/s}$ ，相对误差 3%。实验分析了腔壁振动、阻尼及腔体形状对共振的影响，腔体形状对腔体中的空气共振是否符合亥姆霍兹共振起关键作用。

六、参考文献：

- [1] Lawrence E. & Frey, & Austin R Kinsler. *Fundamentals of Acoustics*, 4th Edition[M], Wiley, 1999. 284-285
- [2] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础. 第 2 版[M]. 南京大学出版社, 2001. 126-129