

快速电子的动量与动能的相对论验证

唐昊 光科学与工程系 06300720346

【摘要】 使用快速电子的动量与动能的关系验证了相对论下的动量-能量关系，比较了等效磁场法和均匀磁场法的差异，并对实验误差的产生原因进行了一些讨论。

【关键词】 相对论；动量-能量关系；快速电子法；等效磁场；均匀磁场

经典力学把时间和空间看作是彼此无关的，把时间和空间的基本属性也看作与物质的运动没有任何关系而是绝对的、永远不变的。这就是所谓经典力学中的“绝对时间”和“绝对空间”的观点，也称作牛顿绝对时空观。但是，随着物理学的发展，特别是20世纪初叶就已发现一些现象与经典力学的一些概念和定律相抵触，牛顿的绝对时空观和建立在这一基础上的经典力学开始陷入了无法解决的困境。

在这种情况下，1905年爱因斯坦提出了狭义相对论。这一理论描述了一种新的时空观，认为时间和空间是相互联系的，而且时间的流逝和空间的延拓也与物质和运动有不可分割的联系。

本实验利用半圆聚焦 β 磁谱仪，通过测定快速电子的动量值和动能值，来验证动量和动能之间的相对论关系。

【实验原理】

按照爱因斯坦的狭义相对论，在洛伦兹变换下，静止质量为 m_0 、速度为 v 的质点，其动量应为

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} v = mv \quad (1)$$

式中 $m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}$ ， $\beta = v/c$ 。相对论能量 E 为

$$E = mc^2 \quad (2)$$

这就是著名的质能关系。 mc^2 是运动物体的总能量，物体静止时的能量 $E_0 = m_0c^2$ 称为静止能量，两者之差为物体的动能 E_k ，即

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \quad (3)$$

当 $\beta \ll 1$ 时，式(3)可展开为

$$E_k = m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - m_0c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0} \quad (4)$$

式(4)就是经典力学中的动量-能量关系。

由式(1)和(2)可得

$$E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \quad (5)$$

这就是狭义相对论的动量和能量关系。而动能与动量的关系为

$$E_k = E - E_0 = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \quad (6)$$

这就是需要验证的狭义相对论的动量-能量关系。

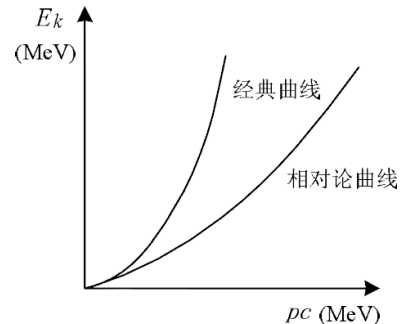


图1 $pc - E_k$ 曲线

【实验装置】

实验装置主要由以下部分组成：半圆聚焦 β 磁谱仪、 β 放射源 ^{90}Sr — ^{90}Y 、定标用 γ 放射源 ^{137}Cs 源和 ^{60}Co 源、 NaI (T1) 闪烁探头、数据处理计算机软件、高压电源、放大器、多道脉冲幅度分析器。

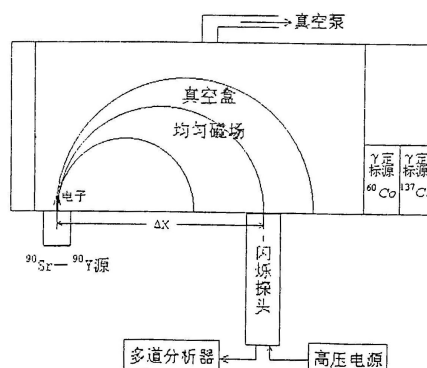


图2 实验基本结构示意图

β 源射出的高速 β 粒子经准直后垂直射入一均匀磁场中，粒子因受到与运动方向垂直的洛伦兹力的作用而作圆周运动。如果不考虑其在空气中的能量损失（一般情况下为小量），则粒子具有恒定的动量数值而仅仅是方向不断变化。设均匀磁场的磁感应强度为 B ，电子的速度为 v ，由于 $v \perp B$ ，故电子受到的洛伦兹力 $f \perp v$ ，有

$$f = evB = mv^2 / R \quad (7)$$

式中 e 为电子电荷， $R = \Delta x / 2$ 为电子运动轨道的半径，所以

$$p = mv = \frac{1}{2} eB\Delta x \quad (8)$$

式(8)是本实验测量电子动量的依据。 B 为磁感应强度， Δx 为源与能量探测器的间距，电子的动能 E_k 可用闪烁晶体探测器与多道分析器组成的能谱仪测得，闪烁能谱仪可用 ^{137}Cs 源和 ^{60}Co 源进行定标。

β 源射出的 β^- 粒子具有连续的能量分布，因此移动探测器在不同位置，就可测得一组不同的能量与对应的动量值，这样就可以用实验方法验证相对论动能与动量的对应关系式(6)，并与经典关系式(7)进行比较。

由于 β^- 粒子与物质的相互作用，因此对其损失的能量进行必要的修正十分重要。能量损失主要在 β^- 粒子穿过铝膜⁽¹⁾时和有机塑料膜⁽²⁾时，因此才用线性插值法加以修正，修正能量对应表参见《近代物理实验补充讲义》31页。

【实验结果】

探测器高压选择588V

实验数据及计算结果如下表，其中能量已进行过修正

(1) 定标

放射源	道数 CH	对应能量 E/MeV
^{137}Cs	87	0.184
	315	0.662
^{60}Co	552	1.170
	634	1.330

表1 定标能量与对应道数

(1) NaI (T1) 晶体的铝膜密封层，厚度为220 μm ，其中200 μm 为 NaI (T1) 晶体的铝膜密封层厚度，20 μm 为反射层的铝膜厚度，能量损失主要由韧致辐射造成。

(2) 封装真空室的有机塑料薄膜，实验表明封装真空室的有机塑料薄膜对 β^- 存在一定的能量吸收，尤其对小于0.4MeV的 β^- 粒子吸收近0.02MeV。

(2) β^- 能谱

编号	CH	E/MeV	Δx /cm	计数
1	142	0.421	18.3	2011
2	259	0.645	20.7	1949
3	374	0.885	23.2	1719
4	492	1.132	25.7	1354
5	611	1.382	28.2	899
6	722	1.617	30.7	647
7	842	1.869	33.2	290
8	956	2.110	35.7	505

表2 β^- 能谱测量结果

编号	pct 相对论理论值	等效磁场		均匀磁场	
		pc	相对误差/%	pc	相对误差/%
1	0.779	0.778	0.2	0.787	0.9
2	1.037	1.010	2.6	1.014	2.2
3	1.299	1.250	3.8	1.251	3.7
4	1.562	1.491	4.5	1.488	4.7
5	1.823	1.739	4.6	1.725	5.4
6	2.066	1.979	4.2	1.962	5.0
7	2.325	2.220	4.5	2.199	5.4
8	2.571	2.459	4.4	2.435	5.3

表3 等效磁场法和均匀磁场法计算的pc值及其误差

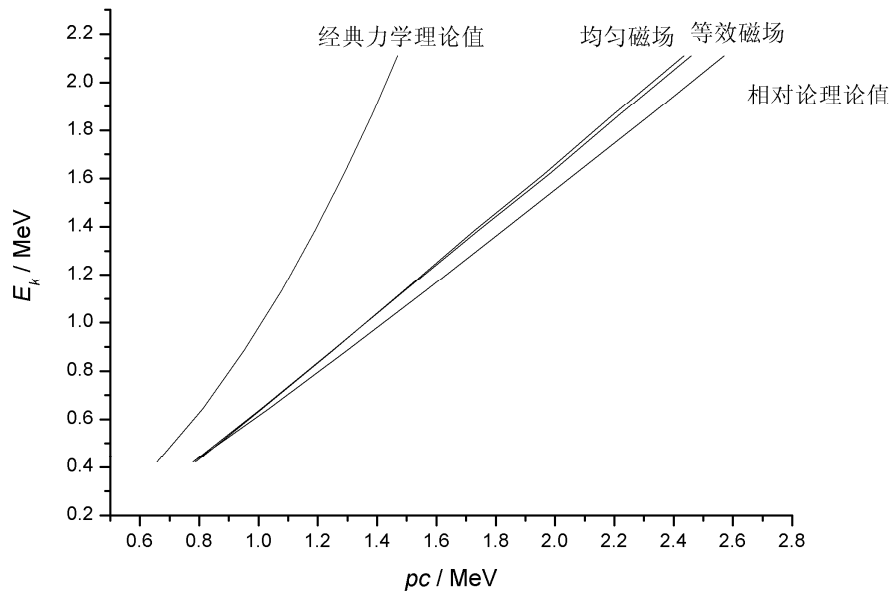


图2 实验得出的 $pc - E_k$ 曲线

【实验讨论与小结】

1. 等效磁场的优越性

从拟合的数据中可以发现，相较均匀磁场法，等效磁场法更接近相对论的理论值。从实验装置的结构上看，实际的磁场并不完全符合均匀磁场的要求。实验使用的磁场是由永磁材料制成，整个磁板由小磁铁棒拼接而成，再整体充磁。各小磁铁棒的边界效应会使磁场不十

分均匀，直接用式（8）来求动量将产生一定的系统误差，所以必须用更合理的方式来表述动量与 Δx 的关系，即等效磁场法。

如图3所示，设粒子的真实径迹为 aob ，位移 ds 与 Y 的夹角为 θ ，则 ds 在 X 轴上的投影为 $\sin\theta \cdot ds$ ，显然有

$$\Delta x = \int_0^{\theta_1} \sin\theta \cdot ds \approx \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot ds \quad (9)$$

又因为 $ds = R \cdot d\theta$ 以及 $R = p/eB$ ，其中 R 和 B 分别为 ds 出的曲率半径和磁感应强度，则有

$$\Delta x = \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot \frac{p}{eB} \cdot d\theta = \frac{p}{e} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{B} \cdot d\theta \quad (10)$$

所以有

$$p = \frac{e\Delta x}{\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{B} d\theta} = \frac{1}{2} \bar{B} e \Delta x \quad \left(\text{其中 } \frac{1}{\bar{B}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{B} d\theta \right) \quad (11)$$

若把 $\frac{1}{\bar{B}}$ 看作 $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{B} d\theta / \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta$ ，则 $\frac{1}{\bar{B}}$ 为粒子在整个路径上的磁感应强度的倒数以所处位置处的位移与 Y 轴夹角的正弦为权重的加权平均值。显然， \bar{B} 相当于均匀磁场情形下 $p = \frac{1}{2} eB\Delta x$ 中的磁感应强度 B ，即求出 \bar{B} 就能更为确切地表述 p 与 Δx 的关系，进而准确地确定粒子的动量值。

实际计算中还需要把求积分进一步简化为求级数和，即可把画在磁场分布图上直径为的 Δx 半圆弧作 N 等分（间距 10 mm 左右），依次读出第 i 段位移所在处的磁感应强度 B_i ，再注意到 $\theta_i = \frac{\pi}{N}(i-1)$ 以及 $\Delta\theta_i = \frac{\pi}{N}$ ，则可以得到

$$\frac{1}{\bar{B}} \approx \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta'}{B'} d\theta' \approx \frac{1}{2} \frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N \sin\left[\frac{\pi}{N}(i-1)\right] / B_i$$

所以

$$p = \frac{Ne\Delta x}{\pi \sum_{i=1}^N \sin\left[\frac{\pi}{N}(i-1)\right] / B_i} \quad (12)$$

这样的计算显然更符合实际实验中的磁场，比只用一个磁感应强度平均值来替代整个磁场要准确。

2. 空气对实验的影响

β^- 粒子在空气中损失的能量主要是由于非弹性碰撞（即电离和激发）和韧致辐射2种，但在空气中，电子能量在几十 MeV 以下还是以电离为主。本实验仅用机械泵制造真空环境，并不能提供很高的真空度，又 β^- 粒子的最大能量不超过 2.2 MeV ，故绝大部分的能量损失是由于 β^- 粒子电离了空气中的分子。实验时而电子这部分能量损失并没有被修正，因此实验中 pc 值小于理论值可能是电子能量在空气中损失造成的。

3. 实验数据精度的影响

在定标以及测量时，应等待有较高的计数率。当计数达到 10000 时误差方为 1% ，可见计数的大小对实验的精确有很大的影响。从实验结果的相对误差来看，误差比较集中在电子能量较高处，联系实验数据中每组数据的计数，随着电子能量的增高，计数相应地降低，误差就显著了。高能量的电子数量少，所以必须用极长的测量时间才能获得令人信服的计数。电子能量最高的一组数据我们用了—个中午的时间进行测量，计数仅有 505 ，仍与 10000 相差甚

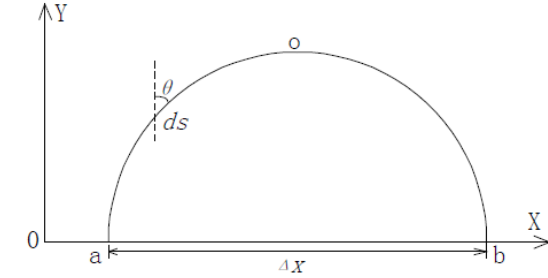


图3

远。显然在现有的条件和限制下，我们无法获得如此大的计数，误差便在所难免了。

【致谢】

指导老师王煜，实验合作伙伴蔡亦平

【参考文献】

《近代物理实验补充讲义》 复旦大学物理教学实验中心