

# 沙粒振动的仓室效应实验报告

**摘要：**本文介绍了颗粒系统的定义，颗粒材料的性质，对颗粒材料的研究的历史，耗散结构的定义，介绍了沙粒振动的仓室效应及其机制，通过搭建了一个实验，得出了初步实验结论。

**关键词：**颗粒 沙粒 振动 仓室效应 实验

## 一、引言：

颗粒材料是一种非常特殊的软物质，通常被认为是直径在  $10\mu\text{m}$  到  $3\text{mm}$  之间的小颗粒，这些小颗粒可以按照表 1 分类。颗粒系统是非线性的，能量耗散的，换句话说就是在一个不停交换能量和熵的环境中，颗粒材料是远离热力学平衡态的一个稳定而开放的系统。

表 1 颗粒大小分类<sup>[1]</sup>

颗粒直径	$0.1-1\mu\text{m}$	$1-10\mu\text{m}$	$10-100\mu\text{m}$	$0.1-3\text{mm}$	$3-10\text{mm}$
	非常细的粉末	很细的粉末	颗粒粉末	颗粒固体	破碎的固体
分类	←————— 粉末		—————→	←—— 颗粒材料 ——→	
	←————— 通常的工作范围 —————→				

干燥的颗粒材料由小的离散固体成分组成，例如沙子、小石头、雪花、盐、米粒、药片、奶粉、发泡胶等等。颗粒材料在农业、制药业、食品工业和其它工业上很重要，因为它与储运粮食、种子、药片、矿物、化学试剂等等有密切关系。它们的个体行为是众所周知的，但是上万上亿个个体聚集后的行为还没有被良好地了解。然而对颗粒材料良好的了解极其重要，这对于减少交通堵塞问题，对于球场或剧院火灾中的疏散问题，对于减少由某些颗粒相关的自然现象如沙尘暴或泥石流等带来的灾难都有非常重要的意义。

耗散结构是指一个远离平衡状态的开放系统，由于不断和外环境交换能量物质和熵而能继续维持平衡的结构，对这种结构的研究，解释了自然界许多以前无法解释的现象。以前的物理理论认为，只有能量最低时，系统最稳定，否则系统将消耗能量，产生熵，而使系统不稳定。耗散结构理论认为在高能量的情况下，开放系统也可以维持稳定。例如生物体，以前按照热力学定律，是一种极不稳定的结构，不断地产生熵而应自行解体，但实际是反而能不断自我完善。其实生物体是一种开放结构，不断从环境中吸收能量和物质，而向环境放出熵，因而能以破坏环境的方式保持自身系统的稳定。

热力学第二定律可以被描述为假定在一个密闭的系统中，熵永远不会减少。Maxwell 想到应该有个能够减少熵的能量控制机制。他假设在两个相同的仓室之间有个小“门”，这个“门”由一个“妖”控制着，仓室中的空气分子作无规则热运动时会向门上撞击，“门”可以选择性的将速度较快的分子放入一格，而较慢的分子放入另一格，这样，其中的一格就会比另外一格温度高。这个“妖”被称为“Maxwell 妖”，它实际上并不存在于分子系统中，但是它存在于生物体中。根据耗散结构理论，像生物体那样开放的系统能够吸收能量和物质，然后将它们的熵释放到环境中，在这个意义上，Maxwell 妖是耗散结构的一个雏形，而颗粒系统是一个典型的耗散系统。<sup>[1]</sup>

## 二、实验原理：

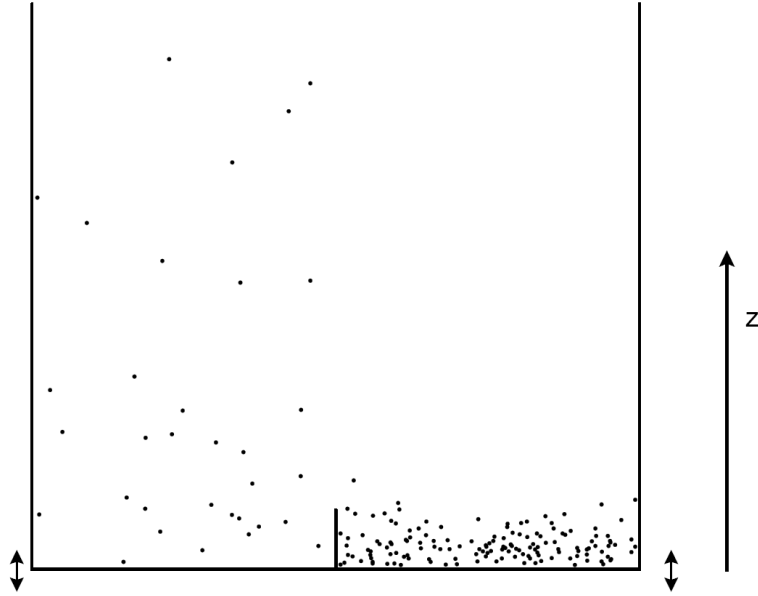


图 1 两仓室实验模型

如图1，一个有一定尺寸的箱子被分成大小相等的两格，中间被一个隔板隔开，其中一格里面放有一定直径和数量的沙粒。当这个箱子被固定在一个激振器上时，在一定振幅和频率下，沙粒将会均匀分布到两格中；在另一个振幅或频率下，沙粒将会全部集聚到一格中。

为了解释这个现象，J. Eggers<sup>[1]</sup>假设了一个流量函数模型，清晰地由此文给出<sup>[2][3]</sup>。想像一个如上节所述的容器装了小米粒，垂直振动的容器被施加了频率为 $f$ 和振幅为 $a$ 的锯齿信号，这样米粒就流体化了。容器中间隔板高 $h$ 。下面的流量函数推导过程中，假定米粒是无摩擦的球体，这样只有法向的碰撞恢复才对耗散有贡献。进一步的，假定任何对容器壁和容器底（一路延伸到无穷远）的碰撞都是完全弹性的。

另外假定仓室中的耗散颗粒气体永远处于一个稳定态，没有宏观流量，那么热力学方程<sup>[4]</sup>可简化为

$$\nabla p = -\rho m g \mathbf{e}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = I. \quad (1)$$

第一个方程是动量守恒，其中 $p$ 是压强， $\rho$ 是颗粒的数量密度，其它参数是颗粒质量 $m$ ，重力加速度 $g$ 和垂直方向单位向量 $\mathbf{e}_z$ 。第二个方程中， $\mathbf{J}$ 和 $I$ 分别是热流量和单位体积的能量耗散速率，代表系统内部的能量平衡。对容器体积 $V$ 积分时，得到了Gauss定理

$$\int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_V I dV \quad \text{或者} \quad Q_{\text{in}} = Q_{\text{diss}} \quad (2)$$

其中 $\partial V$ 表示容器边界，也就是容器壁和容器底部。由于假定了容器壁和容器底部不是耗散的，对左边积分的唯一贡献源于容器底部的能量输入速率（ $Q_{\text{in}}$ ）。右边积分可以解释为由非弹性碰撞引起的容器的总耗散速率，左边积分应该被右边积分平衡。

对稀疏的颗粒气体使用理想气体定律  $p = m\rho T$ ，其中 $T$ 是颗粒温度，定义为三分之一的系统内部速度波动量，那么方程(1)可以被积分，结果为

$$\rho(z) = \frac{g N_k}{\Omega T(z)} \exp\left\{-\int_0^z \frac{g}{T(\zeta)} d\zeta\right\} \quad (3)$$

这里 $N_k$ 是仓室内颗粒总数， $\Omega$ 是仓室的底面积。这里推导流量函数的一个关键的假设是气体温度恒定不变。对于稀疏气体，这符合分子动力学模拟的结果，包括距离底部一点点的一个小区域，在这个区域内能量输入导致一个逻辑上的温度升高。在这个假设下，方程(3)这个积分的计算的结果是气压高度分布

$$\rho(z) = \frac{gN_k}{\Omega T} \exp\left\{-\frac{gz}{T}\right\} \quad (4)$$

要把温度写作关于 $N_k$ 的函数，我们首先要用 $N_k$ 和 $T$ 表示 $Q_{\text{in}}$ 和 $Q_{\text{diss}}$ 。

标准的方法是假设速度是一个本地的Maxwell-Boltzmann分布，计算两个速度分别为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的颗粒在 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 碰撞的概率，对总体求平均，对容器体积积分，得到

$$Q_{\text{diss}} = 4 \frac{\sqrt{\pi}}{\Omega} mgr^2 N_k^2 (1-e^2) \sqrt{T} \quad (5)$$

对于底部的能量输入，一个类似的过程得到

$$Q_{\text{in}} = 2mgN_k af \left(1 + \frac{2af}{\sqrt{\pi T}}\right) \approx 2mgN_k af \quad (6)$$

因为稀疏颗粒气体中颗粒的典型速度（ $\sqrt{T}$ ）必须要比底部速度（ $2af$ ）大。解方程(5)和方程(6)，我们最终可以用容器内的颗粒数量来表示温度：

$$T = \frac{\Omega^2 a^2 f^2}{4\pi(1-e^2)^2 r^4 N_k^2} \quad (7)$$

我们用 $n_k$ 来表示某仓室里的颗粒数量相对于统一分布时的比例，显然有 $n_k = \frac{N_k}{N_{\text{av}}}$ ，其中

$N_k$ 是第 $k$ 个仓室中的颗粒数量，还有 $N_{\text{av}} = \frac{N_{\text{tot}}}{K}$ ，其中 $N_{\text{tot}}$ 是 $K$ 仓室体系内的颗粒总数。那么现在

在仓室内的流量（用每秒颗粒数表示）可以通过把以下参数相乘得到：在高度 $h$ 以小缝法向的平均速度（ $\sqrt{\frac{2T}{\pi}}$ ）向容器壁移动的小颗粒的密度（ $\frac{\rho(z)}{2}$ ），还有小缝的面积（ $S$ ），即

$$F(n_k) = \frac{\rho(z)}{2} \sqrt{\frac{2T}{\pi}} S, \text{ 或者,}$$

$$F(n_k) = An_k^2 \exp(-Bn_k^2) \quad (8)$$

其中

$$A = \sqrt{2}(1-e^2)^2 \frac{gr^2 S}{\Omega^2 af} \quad (9)$$

和与维度无关的驱动参数

$$B = \frac{4}{\pi} \frac{gh}{(af)^2} (1-e^2)^2 \left(\frac{\pi r^2 N_{\text{av}}}{\Omega}\right)^2 \quad (10)$$

第 $k$ 个仓室中的颗粒变化的时间速率 $\frac{dn_k}{dt}$ 由从相邻的两格仓室的流入量减去从这个仓室的流出量给出：

$$\frac{dn_k}{dt} = F(n_{k-1}) - 2F(n_k) + F(n_{k+1}) \quad (11)$$

其中  $k = 1, \dots, K$ 。为了简单起见，我们使用循环边界条件  $n_{K+1} = n_1$ 。对方程(11)的数值计算<sup>[5][6]</sup>给出了 $n_k$ 的分叉，如图2所示。以下计算过程摘自文献[5]。

把式(8)代入式(11)，设 $N=2$ ，我们得到

$$\frac{dn_1}{dt} = -An_1^2 e^{-4Bn_1^2} + A(1-n_1)^2 e^{-4B(1-n_1)^2}. \quad (12)$$

平衡态时  $\frac{dn_1}{dt} = 0$ ，于是我们可以得到 $n_1$ 和 $B$ 之间的关系

$$\frac{n_1^2}{(1-n_1)^2} = e^{4Bn_1^2 - 4B(1-n_1)^2}. \quad (13)$$

当  $n_1 \neq 0.5$  时，我们可以把方程(13)简化成

$$B = \frac{-\ln\left(\frac{1}{n_1} - 1\right)^2}{4(1-2n_1)}. \quad (14)$$

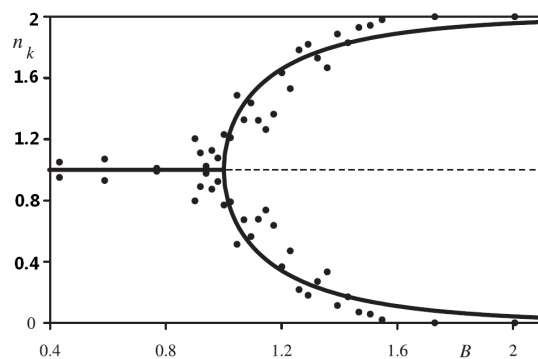
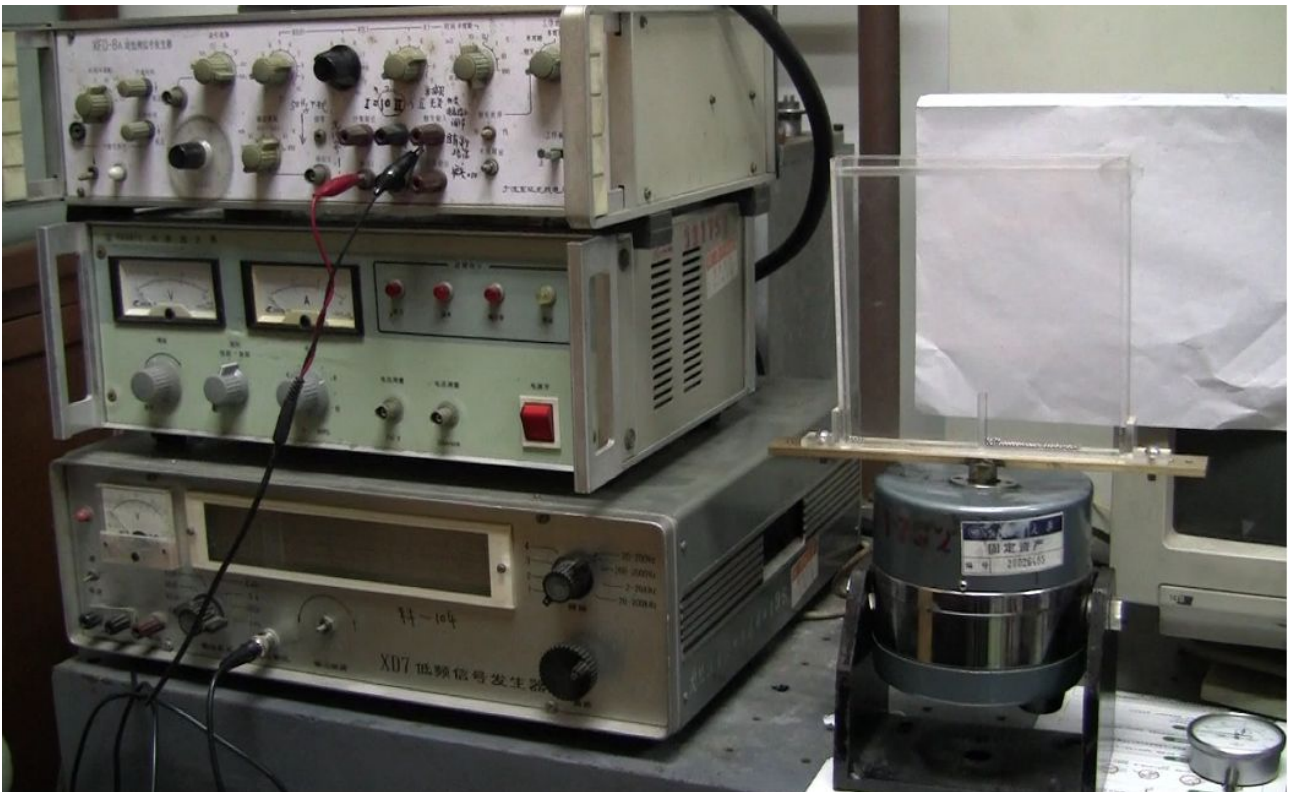


图2 两仓室系统 ( $k = 1, 2$ ) 的分叉图。实线代表稳定态，虚线代表不稳定的流量模型的均衡态。小点是实验测得的数据。可以看到，两种情况下，均匀分布的状态与集聚到一侧的状态之间的过渡可以通过一个像叉子一样的分叉发生。<sup>[3]</sup>

这张图以及文献[5][6]显示了，当  $B < 1$  时（频率更高，因为  $B \sim 1/f^2$ ）只有一个稳定的平衡态，叫做统一态或均匀分布状态，当  $B > 1$  时（频率比某个临界值低时），对称被打破，将会有有一个不对称的动态的平衡态——集聚到一侧的动作发生。在这种方式下，耗散开放系统的熵减少了。

### 三、实验器材：



XFD-8A超低频信号发生器：频率范围0.001~100000Hz

XD7低频信号发生器：频率范围18~200000Hz

YE5871功率放大器

激振器

塑料仓室：2仓室，底面积每仓室 $760 \times 75 \text{mm}^2$ ，中间隔板高30mm宽5mm，仓室高154mm

小钢球：直径2mm

摄像机

#### 四、实验内容：

1. 设计两仓室实验装置的模型，画出三视图并交付专业人员制作。
2. 根据式(10)和仪器参数粗略计算 $B$ ，适当调整 $N_{\text{tot}}$ （钢球数量）、 $a$ （振幅）和 $f$ （频率）使得 $B$ 大约在1左右。
3. 调整实验仪器的水平。在功率放大器中将增益归零，选择高阻抗和适当的电流限值，然后打开仪器电源。
4. 改变 $N_{\text{tot}}$ 、 $a$ 和 $f$ 使 $B$ 值变化，观察现象并摄像：
  - 4.1. 将钢球全部置于左边仓室内，调高频率使 $B < 1$ ，观察现象并摄像。
  - 4.2. 将钢球全部置于右边仓室内，调高频率使 $B < 1$ ，观察现象并摄像。
  - 4.3. 将钢球平均置于两边仓室内，其中左边略多，调低频率使 $B > 1$ ，观察现象并摄像。
  - 4.4. 将钢球平均置于两边仓室内，其中右边略多，调低频率使 $B > 1$ ，观察现象并摄像。

#### 五、注意事项：

低频信号发生器的最大振幅有限，如果振幅不够就采用超低频信号发生器。

功率放大器一旦红色故障灯亮，必须立即关闭放大器电源查找原因，待解决后重新打开电源。

功率放大器的阻抗一定要设置成高阻抗，否则输出的电流信号幅度不稳定，造成激振器振动不稳定。

功率放大器的电流限值不能设置得太小。

## 六、实验结论：

根据式(10)，在小球数量一定的情况下，影响实验结果的参数只有一个 $B$ 。实验结果也是如此。

影响 $B$ 的参数： $a$ （振幅）， $f$ （频率）。

这里振幅没有用专门的仪器来测量，我的方法是固定振幅，然后用最直观的目测法：黄铜底板本来有上下两条边界，距离为黄铜板的厚度6.0mm，振动时由两条边界刚好变为三条边界时，振幅即为黄铜板的厚度的一半3.0mm。

实验仪器相关参数如下： $h=30.0\text{mm}$ ， $r=1.0\text{mm}$ ， $\Omega=2\times 7.5\times 76.0\text{mm}^2$ ，钢球之间的碰撞恢复系数 $e=0.56$ ，将这些参数代入式(10)得

$$B = \frac{4 \cdot 9.80665 \text{m/s}^2 \times 30.0 \text{mm}}{\pi (af)^2} (1 - 0.56^2)^2 \left( \frac{\pi \times (1.0 \text{mm})^2 N_{\text{av}}}{2 \times 7.5 \times 76 \text{mm}^2} \right)^2 = 1.34028 \left( \frac{N_{\text{av}}}{af} \right)^2 \text{mm}^2 / \text{s}^2$$

对步骤4.1~4.4，我分别取了以下参数，结果见图。

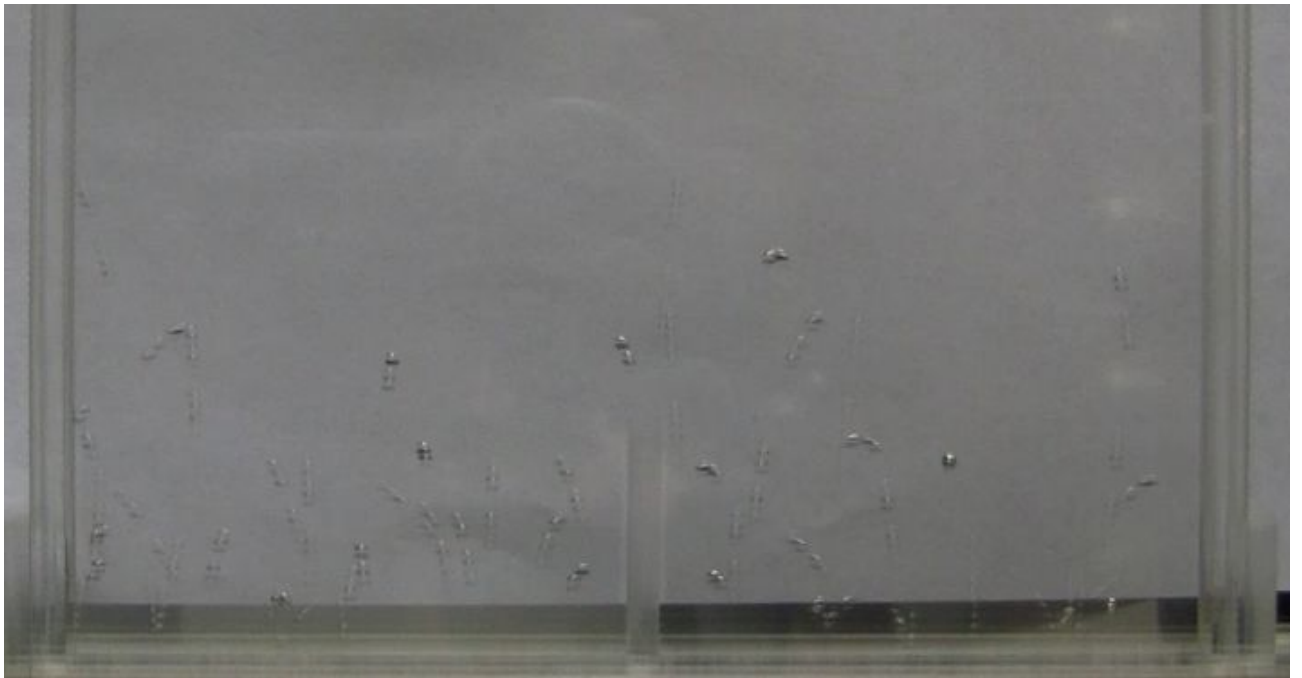


图1  $N_{\text{左}}=80$ ， $N_{\text{右}}=0$ ， $a=3.0\text{mm}$ ， $f=33.3\text{Hz}$ ， $B=0.215$ ，经过10秒后达到平衡态。



图2  $N_{\text{左}}=0$ ,  $N_{\text{右}}=80$ ,  $a=3.0\text{mm}$ ,  $f=33.3\text{Hz}$ ,  $B=0.215$ , 经过10秒后达到平衡态。

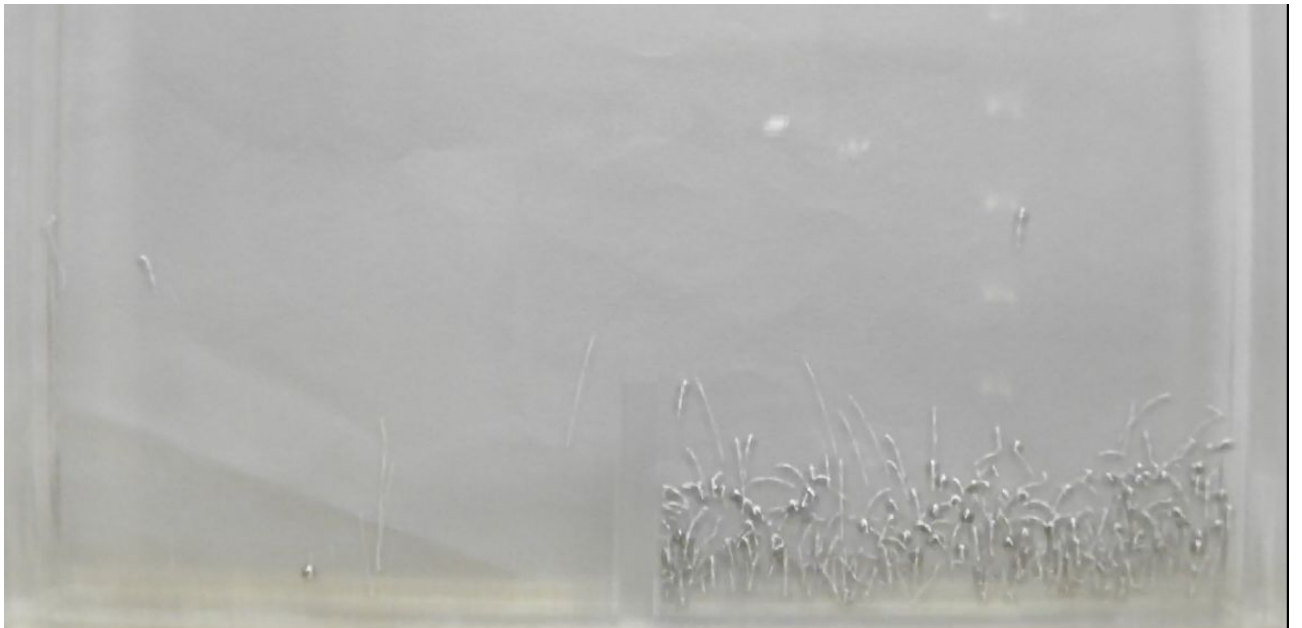


图3  $N_{\text{左}}=88$ ,  $N_{\text{右}}=112$ ,  $a=3.0\text{mm}$ ,  $f=20.0\text{Hz}$ ,  $B=3.72$ , 经过55秒后达到平衡态。

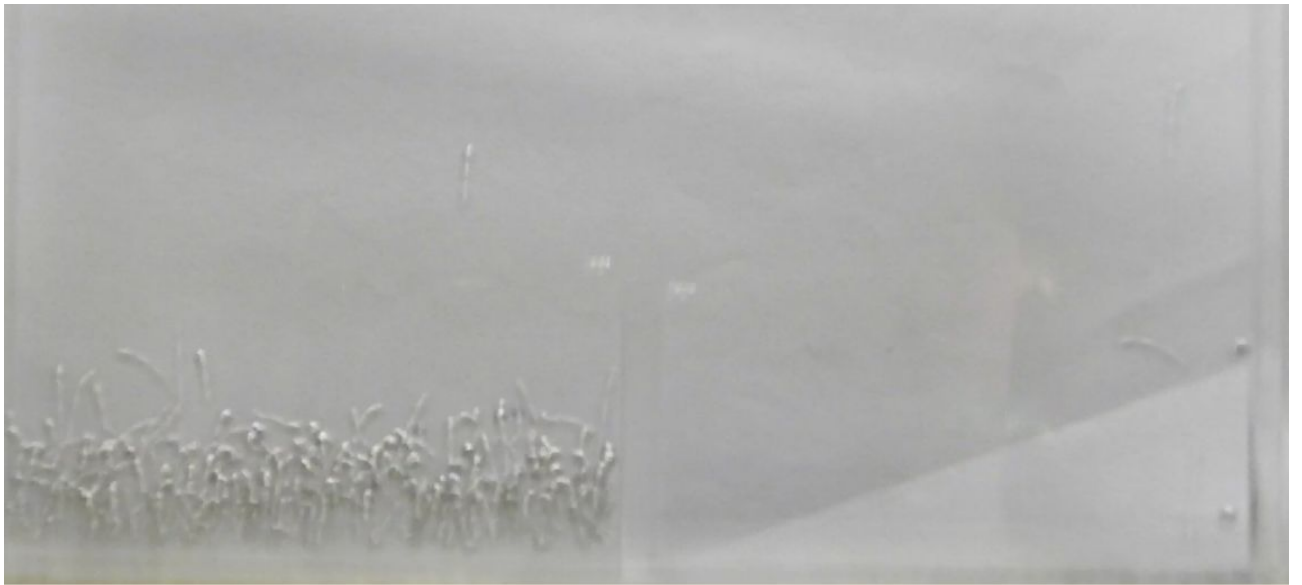


图4  $N_{左}=100$ ,  $N_{右}=100$ ,  $a=3.0\text{mm}$ ,  $f=20.0\text{Hz}$ ,  $B=3.72$ , 经过50秒后达到平衡态。

因此, 这个实验验证了当 $B>1$ 时会由平均分布趋向集聚分布到小球较多的一侧, 当 $B<1$ 时会由集聚分布趋向平均分布。

#### 参考文献:

- [1] J. Eggers, Sand as Maxwell's Demon, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5322 (1999).
- [2] Devaraj van der Meer, Ko van der Weele, Peter Reimann and Detlef Lohse, *J. Stat. Mech.* **7**, 07021(2007).
- [3] K. van der Weele, D. van der Meer, M. Versluis and D. Lohse, *Europhys. Lett.* **53**, 328 (2001).
- [4] Brey J J, Ruiz-Montero M J and Moreno F, *Phys. Rev. E* **63** 061305 (2001), 以及参考文献.
- [5] 周晓颖, 复旦大学本科毕业论文 (2011)
- [6] 俞颀翔, Balance equation in compartmentalization of granular material, 复旦大学学位论文 (2011)