Mathematica 模拟热传导问题

麻一州 20307110130

June 2024

目录

Table of Contents

热传导方程

- 对各向异性的导热介质，热流 $G = -\kappa \nabla T$，因此热传导方程写作
$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$
- 然而，对于各向异性的导热介质，热流与温梯度方向不平行，热流需要写为 $G_a = -\kappa^{ab} \nabla_b T$，其中 κ^{ab} 是一个对称二阶张量（在 D 维即 $D \times D$ 矩阵），因此热传导方程需要写作
$$\rho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_a \cdot (\kappa^{ab} \nabla_b T)$$
- 由谱定理，对称二阶实张量可以由正交变换对角化，不同特征值通常不相等。

谱定理

当一个矩阵 A 是厄密矩阵（对于实矩阵，即对称矩阵），则这个矩阵可由酉变换（对于实矩阵，即正交变换）对角化，且所有特征值均为实数，特征向量正交。

二维各向异性导热介质

- 此处我们考虑二维导热介质，令热导率为

$$\begin{bmatrix} 1-l & l \\ l & 1-l \end{bmatrix}$$

其中 $l \in [0,1]$.

- 容易得到两个特征值分别为 1 和 $1-2l$。
- 当 $l < 0.5$ 时，κ 的两个本征值都为正；当 $l > 0.5$ 时，κ 的一个本征值为正，另一个本征值为负，会违反热力学第二定律。在数值模拟中，$l > 0.5$ 时的热传导演化会出现非常有趣的行为。

- 热传导方程一般无法解析求解，因此我们采用数值解的方法。

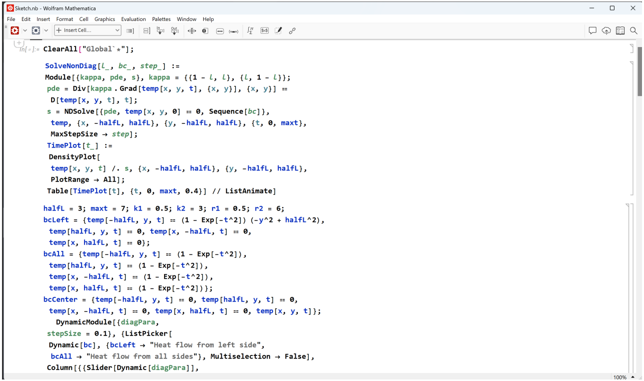
Table of Contents

什么是 Mathematica？

Idea

收集造好的轮子，减少后人造轮子的痛苦。

- Mathematica 看起来长啥样？




```
ClearAll["Global`*"];

SolveNonDiag[l_, bc_, step_] :=
 Module[{kappa, pde, s}, kappa = {{1 - l, l}, {l, 1 - l}};
  pde = Div[kappa . Grad[temp[x, y, t], {x, y}], {x, y}] ==
    D[temp[x, y, t], t];
  s = NDSolve[{pde, temp[x, y, 0] == 0, Sequence[bc]},
    temp, {x, -halfL, halfL}, {y, -halfL, halfL}, {t, 0, maxt},
    MaxStepSize → step];
  TimePlot[t_] :=
   DensityPlot[
    temp[x, y, t] /. s, {x, -halfL, halfL}, {y, -halfL, halfL},
    PlotRange → All];
  Table[TimePlot[t], {t, 0, maxt, 0.4}] // ListAnimate]

halfL = 3; maxt = 7; k1 = 0.5; k2 = 3; r1 = 0.5; r2 = 6;
bcLeft = {temp[-halfL, y, t] == (1 - Exp[-t^2]) (-y^2 + halfL^2),
   temp[halfL, y, t] == 0, temp[x, -halfL, t] == 0,
   temp[x, halfL, t] == 0};
bcAll = {temp[-halfL, y, t] == (1 - Exp[-t^2]),
   temp[halfL, y, t] == (1 - Exp[-t^2]),
   temp[x, -halfL, t] == (1 - Exp[-t^2]),
   temp[x, halfL, t] == (1 - Exp[-t^2])};
bcCenter = {temp[-halfL, y, t] == 0, temp[halfL, y, t] == 0,
   temp[x, -halfL, t] == 0, temp[x, halfL, t] == 0, temp[x, y, t]};
  DynamicModule[{diagPara,
  stepSize = 0.1}, {ListPicker[
   Dynamic[bc], {bcLeft → "Heat flow from left side",
    bcAll → "Heat flow from all sides"}, Multiselection → False],
  Column[{{Slider[Dynamic[diagPara]],
```

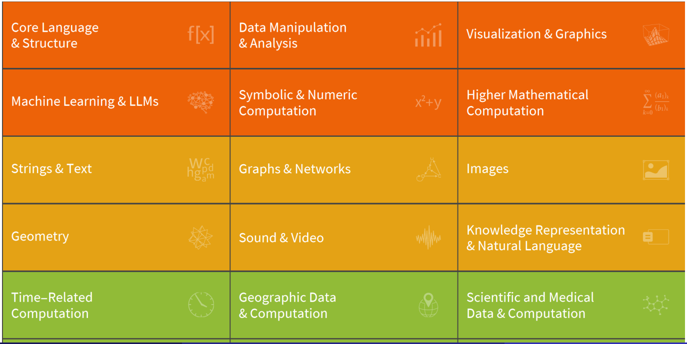
- Mathematica 可以干什么？
- 一句话，啥都能干。

Mathematica 为何独特？

- 脚本语言，调试方便

- 符号化计算
- 符号微积分，符号解偏微分方程，符号化简，…

- 巨量内置函数
- 数值解偏微分方程，画图，字符处理，图像处理，机器学习，教你画中国地图，…



- 内置函数：NDSolve
- 给定偏微分方程、求解区域和边界条件，即可进行数值解。

```
s = NDSolve[{pde, Sequence[bc], temp[x, y, 0] == 0}, temp,
 Element[{x, y}, Annulus[{0, 0}, {r1, r2}]], {t, 0, maxt},
 MaxStepSize → step];
```

- 求解原理：有限元方法
- 思想：将偏微分方程离散化

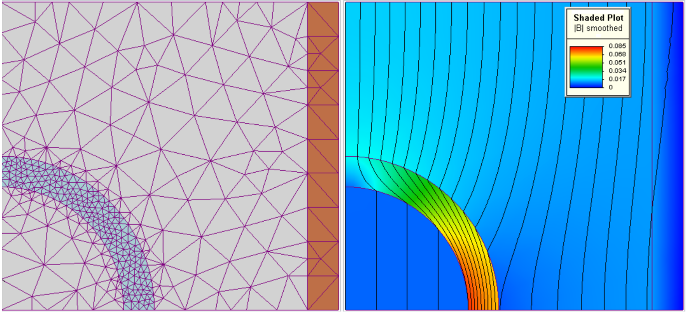


Table of Contents

正方形区域

可选边界条件：

1. 初始温度为零，热量从左侧流入，其余三条边的温度恒为零
2. 初始温度为零，热量从所有边界同时流入

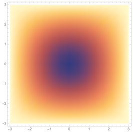
热导率张量为

$$\begin{bmatrix} 1-l & l \\ l & 1-l \end{bmatrix}$$

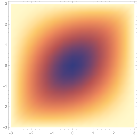
取不同的 l，观察求解结果变化。

正方形区域求解结果

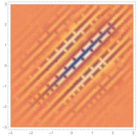
- 当 $l = 0$ 时，热传导过程各向同性。



- 当 $0 < l < 0.5$ 时，热传导过程出现各向异性，而两个主轴对应于热传导矩阵的两个特征向量。



- 当 $l > 0.5$ 时，偏微分方程变得不稳定，数值误差很大。



圆环状区域

可选边界条件：

1. 初始温度为零，热量从内侧流入，外侧的温度恒为零
2. 初始温度为零，热量从外侧流入，内侧的温度恒为零

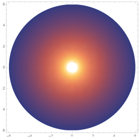
热导率张量为

$$\begin{bmatrix} 1-l & l \\ l & 1-l \end{bmatrix}$$

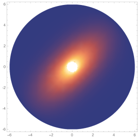
取不同的 l，观察求解结果变化。

圆环区域求解结果

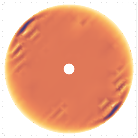
- 当 $l = 0$ 时，热传导过程各向同性。



- 当 $0 < l < 0.5$ 时，热传导过程出现各向异性，而两个主轴对应于热传导矩阵的两个特征向量。



- 当 $l > 0.5$ 时，偏微分方程变得不稳定，数值误差很大。



感谢聆听！