基础物理实验

绪　论

第一节 物理实验的重要性

物理学是一门实验科学，特别是普通物理，更与实验密不可分。在物理学的发展过程中，实验是决定性的因素。发现新的物理现象，寻找物理规律，验证物理定律等等，都只能依靠实验。离开了实验，物理理论就会苍白无力，就会成为"无源之水，无本之木"，不可能得到发展。

正是 16 世纪伟大的实验物理学家伽利略，用他出色的实验工作把古代对物理现象的一些观察和研究引上了当代物理学的科学道路，使物理学发生了革命性的变化。力学中的许多基本定律，如自由落体定律、惯性定律等，都是由伽利略通过实验发现和总结出来的。电磁学的研究，也是从库仑发明扭秤并用来测量电荷之间的作用力开始的。

牛顿对理论和实验的关系阐述得很明白。他在 1672 年给奥尔登堡的信中说："探求事物属性的准确方法是从实验中把他们推导出来。考察我的理论的方法就在于考虑我所提出的实验是否确实证明了这个理论；或者提出新的实验去验证这个理论。"事实上，牛顿提出过许多理论，其中，万有引力定律被海王星的发现和哈雷彗星的准确观测等实践所证明；而他关于光的本性的学说却被杨氏干涉实验和许多衍射实验所推翻。

经典物理学的基本定律几乎全部是实验结果的总结与推广。在十九世纪以前，没有纯粹的理论物理学家。所有物理学家，包括对物理理论的发展有重大贡献的牛顿、菲涅耳、麦克斯韦等，都亲自从事实验工作。近代物理的发展则是从所谓"两朵乌云"和"三大发现"开始的。前者是指当时经典物理学无法解释的两个实验结果，即黑体辐射实验和迈克耳孙－莫雷实验；后者是指在实验室中发现了 X 光、放射性和电子。由于物理学的发展越来越深入、越来越复杂，而人的精力有限，才有了以理论研究为主和以实验研究为主的分工，出现了"理论物理学家"。然而，即使理论物理学家也绝对不能离开物理实验。爱因斯坦无疑是最著名的理论物理学家，而他获得诺贝尔奖是因为他正确解释了光电效应的实验；他当初提出的相对论是以"光速不变"的假设为基础的，只是经过长期大量的实验后，相对论才成为一个被人们普遍接受的理论。

总之，物理学的理论来源于物理实验又必须最终由物理实验来验证。因此，要从事物理学的研究，必须掌握物理实验的基本功。正因为如此，我国物理学界的前辈们对物理实验都十分重视。创办复旦大学物理系的王福山先生亲自从一个弹簧开始筹措实验仪器设备，为建立物理教学实验室倾注了大量的心血；创办清华大学物理系的叶企孙先生对李政道这样优秀的学生，仍规定："理论课可以免上，只参加考试；但实验不能免，每个必做。"

物理实验不仅对于物理学的研究工作极其重要，对于物理学在其它学科的应用也十分重要。当代物理学的发展已使我们的世界发生了惊人的改变，而这些改变正是物理学在各行各业中应用的结果。

电子物理、电子工程、光源工程、光科学信息工程等系科都显然是以物理学为基础的，当然有大量物理学的应用；在材料科学中，各种材料的物性测试、许多新材料的发现（如 C_{60}、高温超导材料等）和新材料制备方法的研究（如离子束注入、激光蒸发等），都离不开物理的应用；在化学中，从光谱分析到量子化学、从放射性测量到激光分离同位素，也无不是物理的应用；在生物学的发展史中，离不开各类显微镜（光学显微镜、电子显微镜、X 光显微镜、原子力显微镜）的贡献，近代生命科学更离不开物理学，DNA 的双螺旋结构就是美国遗传学家和英国物理学家共同建立并为 X 光衍射实验所证实的，而对 DNA 的操纵、切割、重组也都需要实验物理学家的帮助；在医学中，从 X 光透视、B 超诊断、CT 诊断、核磁共振诊断到各种理疗手段，包括放射性治疗、激光治疗、γ 刀等等都是物理学的应用。物理学正在渗透到各个学科领域，而这种渗透无不与实验密切相关。显然，实验正是从物理基础理论到其它学科广泛应用之间的桥梁。只有真正掌握了物理实验的基本功，才能顺利地把物理原理应用到各其它学科而产生质的飞跃。

综上所述，要研究与发展物理学，要把物理理论应用到各行各业的实际中去，都必须重视物理实验，学好物理实验。

然而，对物理实验的重要性却往往被忽视。中国社会长期以来重理论轻实践的错误观念至今仍有影响。杨振宁先生 1982 年在《光明日报》上发表"谈人才培养"的文章语重心长地指出："象我这样

有了一点名气的人也有不好的影响。在国内有许多青年人都希望搞我这一行（指搞理论），但是，象我这样的人，中国目前不是急需。要增加中国的社会生产力需要的是很多会动手的人。”另一位获诺贝尔物理学奖的华裔实验物理学家丁肇中先生则说：“我是一个做实验的工程师。希望通过我的得奖，能提高中国人对实验的认识。没有实验就没有现代科学技术。”据统计，1901 年以来，实验物理学家得诺贝尔奖的人数是理论物理学家人数的两倍；而近 30 年来，前者的人数超过后者的六倍以上。由此可见，物理实验的重要性正在越来越明显的被认识到。我们必须摒弃旧观念，解放思想，面对现实，摆正理论与实践的关系，才能真正造就高素质的有创新精神的一代新人，使我们中华民族能真正昂首屹立于世界先进民族之林。

第二节　物理实验课的要求

物理实验既然那么重要，怎样才能通过物理实验课教学使学生掌握物理实验的基本功，达到培养高素质创新人才的目的呢？概括起来，应通过物理实验课程达到以下三个基本要求：

1．在物理实验的基本知识、基本方法、基本技能方面得到严格而系统的训练，这是做好物理实验的基础。

a. 基本知识包括实验的原理、各类仪器的结构与工作机理、实验的误差分析与不确定度评定、实验结果的表述方法、如何对实验结果进行分析与判断等。

b. 基本方法包括如何根据实验目的和要求确定实验的思路与方案、如何选择和正确使用仪器、如何减少各类误差、如何采用一些特殊方法来获得通常难以获得的结果等。

c. 基本技能包括各种调节与测试技术（粗调、微调、准直、调零、读数、定标、……），真空技术（真空获得、维持、测量、应用……），电工技术（识别元件、焊接、排除故障、安全用电……），电子技术（微电流检测、弱信号放大……），传感器技术（力传感器、位移传感器、温度传感器、磁传感器、光传感器……），金工技术（机械制图及基本的车工和钳工技术等）以及查阅文献的能力、自学能力、协作共事的能力、总结归纳能力、口头表达能力等。

这三种基本训练有时可能会比较枯燥，却是完全必要的，它体现了最基本的实际动手能力，因而必须首先保证这一要求的实现。没有这种严格的基本训练，很难成为高素质的人才。

2．学习用实验方法研究物理现象、验证物理规律，加深对物理理论的理解和掌握，加强学生物理建模思维的培养，并在实践中提高发现问题、分析问题和解决问题的能力。

实验前，学生应明确该实验的物理模型及测量模型，了解在建立物理模型时用了哪些近似、假设，并对实验结果做出预期。比如，根据物理模型算出预期值或者查询到公认值或经验值。实验中，学生对测得的数据要学会如何判断，比较实验结果与预期结果是否相符？相符的话，说明实验达到了预期的目的；不符的话，要分析如何改进。是改进理论模型给出新的预期值，还是改进测量模型，

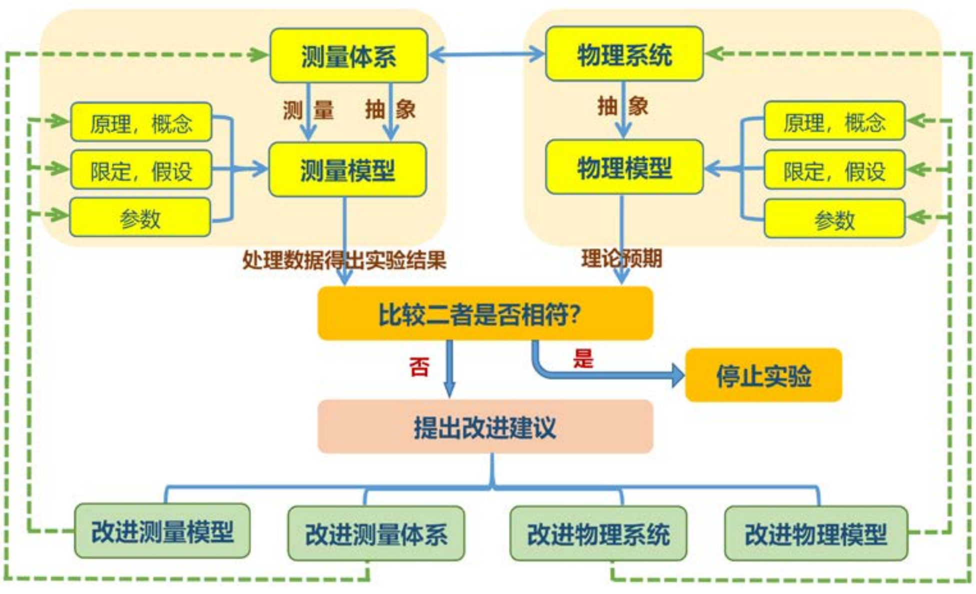


图 1 实验中物理建模的过程 [1]

再次实验获得新的测量结果。将新的预期值与实验结果（或原预期值与新的实验结果）进行比较，直到两者相符为止。如图 1 所示，这样一个模型建立、检测、修正的过程可以很好的培养学生发现、分析、解决问题的能力，也是将来从事科研工作所必备的技能。

在实验中往往会遇到一些意想不到的问题。这些问题虽然可能不是实验研究的主要对象，但也不应轻易放过。这常常是提高分析问题、解决问题能力的好机会。要注意观察、及时记录、认真分析，有必要时可以进行深入研究。实际上，科学史上不少重要发现都是在意想不到的情况下“偶然”出现的。

3．养成实事求是的科学态度和积极创新的科学精神。

这是在整个教学过程中都要贯彻的要求，而在物理实验教学中是特别重要的。因为物理学研究“物”之“理”，就是从“实事”中去求“是”，所以严肃认真的物理学工作者都坚持“实践是检验真理的唯一标准”。物理学中的“实践”主要就是物理实验，在物理实验课中最能培养实事求是、严谨踏实的科学态度。任何弄虚作假，篡改甚至伪造数据的行为都是绝对不能允许的，也是比较容易发现的。在物理实验课中，严格规定了记录数据不准用铅笔，不能用涂改液，误记或错记数据的更改要写明理由并经指导教师认可等，都是为了帮助学生养成实事求是的良好习惯。实际上，实验结果是什么就是什么，没有“好”、“坏”之分。与原来预想不一致的实验结果不仅不应随便舍弃，还应特别重视：它可能是某个新发现的开端。历史上许多新的物理理论都是由于旧理论无法解释某些实验现象而建立起来的。因此，实事求是的严谨态度与积极创新的科学作风是相联系的。在严谨的实验中才能发现真正的问题，而解决这些问题往往就需要坚韧不拔的毅力和积极创新的思维。实际上，只要认真去做实验，一定会发现许多问题，其中有些问题是教师也未必已经解决的。所以，实验室应当而且可以成为培养学生求实态度和创新精神的最好场所。

第三节　如何进行物理实验

一、预习

预习是上好实验课的基础和前提。没有预习，或许可以听好一堂理论课，但不可能完成好一堂实验课。预习的基本要求是仔细阅读教材，了解实验的目的和要求及所用到的原理、方法和仪器设备。一些实验有供预习的视频，学生可以在实验中心网站相应的实验页面找到链接。由于视频的更新需要时间，并不是每个视频内容都与目前的实验要求完全一样，学生还可以在每周二实验室开放的时间去实验室看一下实验的仪器设备状况。有些实验还需要翻阅参考书或查阅文献。通过预习，应对将做的实验有一个初步的大致了解，写好预习报告（包括实验目的、完成实验前应回答的问题、步骤、电路或光路图及数据表格等）。有些实验不要求另写正式报告的，预习报告就是正式报告了，要特别认真撰写。(按以下关于“实验报告”的要求写。）预习报告中，数据表格是很重要的。往往是真正理解了如何做实验才能画好这个表格。表格中要留有余地，以便有估计不到的情况发生时能够记录。直接测量的量和间接测量的量（由直接测量的量计算所得的量）在表格中要清楚地分开，不应混淆。

二、实验操作与记录

实验室与教室的最大区别就是实验室中有大量的仪器设备和实验材料。在不同的实验室中，还分别有大功率电源、自来水源、煤气、压缩空气以及放射性物质、激光、易燃易爆物品或其他有毒有害物品等。因此，进入实验室前必须详细了解并严格遵守实验室的各项规章制度。这些规章制度是为保护人身安全和仪器设备安全而规定的，违反了就可能酿成事故，这是必须首先牢记的。

做实验时，要胆大心细、严肃认真、一丝不苟。对于精密贵重的仪器或元件，特别要稳拿妥放，防止损坏。在电学实验中，必须经教师检查无误后才可接通电源。在使用任何仪器前，必须先看注意事项或说明书；在调节时，应先粗调后微调；在读数时，应先取大量程后取小量程；实验完成后，应整理好仪器设备，关好水电煤气等，方可离开实验室等等，这些都是一个实验工作者的基本素质，要成为良好的习惯。

实验记录是做实验的重要组成部分，它应全面真实反映实验的全过程，包括实验的主要步骤（必要时写明为什么要采取这样的步骤）、观察与测量的条件和情况以及观察到的现象和测量到的数据（为了清楚起见，数据常用表格来记录，制表方法详见第二章第三节）。不仅要记录与预想一致的数据和现象，更要记录与预想不一致的数据和现象。记录应尽量清晰、详尽。科学研究中的实验记录本是极其宝贵的资料，要长期保存，因此必须认真对待。

关于实验操作与记录，以下两点是要特别注意的：

（1）实验中，不仅要动手而且要动脑。做实验是为了学习从事科学研究工作的能力，学会某些

仪器设备的使用方法不仅是目的而更重要的是手段。只有在实验中认真动手积极动脑，才能触类旁通，掌握实验的真谛，学到从实践中发现问题、分析问题、解决问题的真功夫。其中，发现问题是解决问题的第一步，有所发现才能有所创造。因此，在实验过程中要十分注意各种实验现象。不仅是预先估计到的现象，要认真观察、仔细测量、工整记录；对于预先没有估计到的现象，也要注意观察和如实记录，以便进行分析和讨论。

（2）数据记录必须真实，决不可任意伪造或篡改。这是一个科学工作者的基本道德素养。教学实验与科学实验不同，在教学实验中，实验结果往往是预知的，或有公认值的。实验结果与公认值不一致的情况是经常会发生的。这种不一致的原因，不一定是因为学生操作的失误、概念理解不当或计算错误，它也可能是由于仪器设备不正常或环境等其他原因造成的。决不可认为实验结果与公认值越接近，就表明实验做得越好，得分也会越高；更不可为追求实验结果与公认值的一致而伪造或篡改实验记录。从学生学习的角度讲，过程比结果更重要。教师对学生的培养与评价，侧重于实验的态度与作风，以及发现、分析、解决问题的能力。

三、写实验报告

对于实验报告，过去有些同学往往只重视数据处理和得出实验结果，对于实验的记录、分析讨论和结论的撰写很不重视。这是很不对的。

写实验报告是培养实验研究人才的重要一环。

从事实验研究工作一般都需要有一个实验研究的记录本，用以记录实验条件、实验中发生的各种现象和数据，这是科学研究的宝贵资料，一般将长期保存在实验室中。为了养成良好的完整记录的习惯，从而学会从事实验研究工作的基本功，在实验报告中，要求详细记录实验条件、实验仪器、实验环境、实验现象和测量数据。

研究工作取得的成果，一般都要写成论文形式发表。为了训练这种对实验成果的文字表达能力，在实验报告中，要求用自己的语言简要地写明实验目的、实验内容和步骤，结合自己观察到的实验现象和获取的数据进行适当的讨论，并得出实验结论。

实验报告的内容主要应含有以下三方面：

（1）简要地阐明为什么和如何做实验。

这包括实验的目的、回答“实验前应回答的问题”和实验内容与步骤。写这些内容时，要尽量用自己的语言，不要从教材、书本或其它地方抄，篇幅应力求简短。通过回答“实验前应回答的问题”明确该实验的物理模型及测量模型，并且熟知在建立模型的过程中做了哪些简化及模型建立的条件。

（2）真实而全面地记录实验条件和实验过程中得到的全部信息。

实验条件包括实验的环境（室温、气压等与实验有关的外部条件）、所用的仪器设备（名称、型号、主要规格和编号等）、实验对象（样品名称、来源及其编号等）以及其它有关器材等。实验过程中要随时记下观察到的现象、发现的问题和自己产生的想法；特别当实际情况和预期不同时，要记下有何不同，分析为何不同。记录实验数据要认真、仔细，内容应以别人能看懂，自己若干年后也能看懂为标准；但不要把数据先记在草稿上再誊上去，更不要算好了再填上去；要培养清晰而整洁地记录原始数据的能力和习惯。

（3）认真地分析和解释实验结果，得出实验结论。

分析实验现象、处理实验数据，比较测量结果与预期结果是否相符？实验结果不是简单的测量结果，它应包括不确定度的评定、对测量结果与期望值的关系的讨论，实验误差的主要来源以及如何对测量模型和物理模型进行改进。实验结论则可以结合实验目的来写，在什么实验条件下得到了什么样的实验结果并对其给予评价。

最后，实验报告中还可谈谈做本实验的体会和对教师或教材的批评和建议。

参考文献

1. Jacob T. Stanley, Weifeng Su, and H. J. Lewandowski, Using lab notebooks to examine students' engagement in modeling in an upper-division electronics lab course, Physics Review Physics Education Research,13, 020127 (2017)

实验数据的处理

物理实验的目的是探寻和验证物理规律，而许多物理规律是用物理量之间的定量关系来表述的。在物理实验中可以获得大量的测量数据，这些数据必须经过认真地、正确地、有效地处理，才能得出合理的结论，从而把感性认识上升为理性认识，形成或验证物理规律。所以，数据处理是物理实验中一项极其重要的工作。本章将介绍一些最基本的数据处理方法，包括误差分析、不确定度评定、有效数字及作图拟合法等。

第一节 实验误差的分析

一个待测物理量的大小，在客观上应该有一个真实的数值，叫作“真值”。由于测量方法、测量仪器、测量条件及测量者的种种问题，实际测得的数值即测量值，只能是一个真值的近似值。测量值与真值之差称为误差。测量方法的考虑、测量仪器的选择、测量条件的确定、测量数据的处理等等都应在可能的范围内力求减少误差。

所谓测量，就是由测量者采取某种测量方法、用某种测量仪器将待测量与标准量进行比较。例如，为测量一个铁球的质量，可以用天平（测量仪器）把铁球（待测物）放在天平的一侧，把适量的砝码（其质量为标准量）放在另一侧，适当调节而使两侧平衡时（测量方法），即可得到待测物的质量，即待测量。由此可知，测量值并不等于真值，测量值存在误差的原因可能有以下三方面：测量仪器（及标准量）的问题、测量方法的问题、测量者的问题。现分述如下：

1．测量仪器及标准量的问题。

在许多情况下，测量仪器上的刻度（或数字显示）就代表了标准值，如米尺、温度计等。但是这种“标准量”也并非真正标准，它与真正的标准必有差距。例如，米尺端边会磨损、刻度有不均匀性或不够准确、在不同温度下米尺本身的长度有变化等。

2．测量方法的问题。

采用不同的测量方法可能会得到不同的测量结果，其影响是很明显的。例如，为了测量一块玻璃板的温度，用一般的温度计测量和用激光测量，其结果就往往不一样；为了测量重力加速度，用测单摆周期的方法或用自由落体的方法结果也可能会不同。

3．测量者的问题。

这方面的问题很多。首先是“估读”的不同。待测量位于标准量的某两刻度之间时，必须估读其数值，不同测量者的估读会有不同；这与测量者的位置、熟练程度及仪器所处的环境状况等有关。其次是“判断”的不同。例如，要测量干涉条纹间的距离，为确定何处是干涉条纹的中心位置（即光最亮处或最暗处），需要经验和判断能力。最后还有“误读”的可能，即测量者长期工作中难免犯错误，把数据读错也是很可能会发生的。

以上三方面的问题都会造成误差。其中第一个问题和第三个问题产生的误差大小与测量仪器、测量者、测量条件和测量次数有关，可以用一定的方法进行评定（第三个问题中的“误读”除外），这种评定的方法将在第二节详述。测量方法的问题则要进行定性分析以尽量避免或进行定量分析予以修正。

例如，要测量一块正在加热的平面玻璃的温度，无论用温度计或热电偶，放在玻璃板的任何一侧，都不可能测准，因为测温元件（温度计或热电偶）与待测元件（玻璃板）的受热与散热情况都不相同，它们的温度不可能相同。因此，可以改用激光测温的方法，它利用待测元件本身作为测温元件，从玻璃表面间反射光的干涉条纹变化来确定其温度变化，就可以避免因测温元件与待测元件的温度差而形成的误差。

又如，用单摆测量重力加速度的一般公式为

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \qquad (1)$$

式（1）中 T 为单摆周期，L 为摆长。这里忽略了单摆摆线的质量，忽略了单摆运动是非简谐振动，也忽略了空气阻力的影响等等。如要修正上述这些因素造成的误差，则要进行严格的计算和修正。如摆线质量为 μ，摆球半径为 r，质量为 m，则上述公式应修正为

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{L^2} - \frac{1}{6}\frac{\mu}{m}\right) \qquad (2)$$

摆动的幅角较大或空气的浮力与阻力的影响较大时还应作其它各种修正。

实验误差的分析是一项十分重要的工作，要考虑实际上可能对测量结果产生影响的各种因素，分析其影响的大小。任何实验都不要求把一切影响因素全部消除，这在经济上、时间上、精力上都将造成浪费，而实际上也是不可能做到的；只要达到一定的误差允许范围之内就行。而这种分析需要广博的基础知识、丰富的实践经验和高超的判断能力。这就要求我们在各种实验中认真思索，仔细考虑，以积累经验，丰富知识，提高分析判断能力。

第二节　实验不确定度的评定

一、不确定度评定的意义

如上所述，即使采用了正确的测量方法，由于测量仪器和测量者的问题，测量结果仍不可能是绝对准确的，它必然有不确定的成分。实际上，这种不确定的程度是可以用一种科学的、合理的、公认的方法来表征的，这就是“不确定度”的评定。在测量方法正确的情况下，不确定度愈小，表示测量结果愈可靠。反之，不确定度愈大，测量的质量愈低，它的可靠性愈差，使用价值就愈低。

不确定度必须正确评价。评价得过大，在实验中会怀疑结果的正确性而不能果断地作出判断，在生产中会因测量结果不能满足要求而需再投资，造成浪费；评价得过小，在实验中可能得出错误的结论；在生产中则产品质量不能保证，造成危害。

二、关于不确定度的一些基本概念和分类

不确定度的评定十分重要，但以往各国对不确定度的表示和评定却有不同的看法和规定，这无疑影响了国际间的交流和合作。1992 年，国际标准化组织（ISO）发布了具有指导性的文件《测量不确定度表达指南》（以下简称《指南》），为世界各国不确定度的统一奠定了基础。1993 年 ISO 和国际理论与应用物理联合会（IUPAP）等七个国际权威组织又联合发布了《指南》的修订版。从此，物理实验的不确定度评定有了国际公认的准则。《指南》对实验的测量不确定度有十分严格而详尽的论述。作为普通物理实验教学，只要求对不确定度的下述基本概念有初步的了解。

不确定度是表征测量结果具有分散性的一个参数，它是被测量的真值在某个量值范围内的一个评定。所谓“标准不确定度”是指以“标准偏差”表示的测量不确定度估计值，简称不确定度，常记为 u。（关于“标准偏差”的意义请阅《基础物理实验》第二章附录 1）

标准不确定度一般可分为以下三类：

1、A 类评定不确定度：在同一条件下多次测量，即由一系列观测结果的统计分析评定的不确定度，简称 A 类不确定度，常记为 u_A。

2、B 类评定不确定度：由非统计分析评定的不确定度，简称 B 类不确定度，常记为 u_B。。

3、合成标准不确定度：某测量值的 A 类与 B 类不确定度按一定规则算出的测量结果的标准不确定度，简称合成不确定度。

以下分别讨论如何进行不确定度的评定、合成、传递和表示。

三、标准不确定度的评定

1、A 类不确定度 u_A

在相同的条件下，对某物理量 x 作 n 次独立测量，得到的 x 值为 x_1，x_2，x_3，……x_n，于是平均值 $\overline{x}$ 为

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (3)$$

平均值 $\overline{x}$ 为 x 的最佳值，它的不确定度为

$$u_A(\overline{x})=t\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}} \qquad (4)$$

式（4）中的 t 就称为“t 因子”，它与测量次数和“置信概率”有关。（所谓“置信概率”是指真值落在 $\overline{x}\pm u(x)$ 范围内的概率。）t 因子的数值可以根据测量次数和置信概率查表得到，当测量次数较少或置信概率较高时，$t>1$；当测量次数 $n\geq 10$ 且置信概率为 68.3%时，$t\approx 1$；在大多数普通物理教学实验中，为了简便，一般就取 $t=1$。

2、B 类不确定度 u_B

若对某物理量 x 进行单次测量，那么 B 类不确定度由测量不确定度 $u_{B1}(x)$和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$两部分组成。

测量不确定度 $u_{B1}(x)$ 是由估读引起的，通常取仪器分度值 d 的 1/10 或 1/5，有时也取 1/2，视具体情况而定；特殊情况下，可取 $u_{B1}=d$，甚至更大。例如用分度值为 1mm 的米尺测量物体长度时，在较好地消除视差的情况下，测量不确定度可取仪器分度值的 1/10，即 $u_{B1}(x)$=1mm×0.1=0.1mm；但在示波器上读电压值时，如果荧光线条较宽、且可能有微小抖动，则测量不确定度可取仪器分度值的 1/2，若分度值为 0.2V，那么测量不确定度 $u_{B1}(x)$=0.2V×0.5=0.1V。又如，用肉眼观察远处物体成象的方法粗测透镜的焦距，虽然所用钢尺的分度值只有 1mm，但此时测量不确定度 $u_{B1}(x)$可取数毫米，甚至更大。

仪器不确定度 $u_{B2}(x)$是由仪器本身的特性所决定的，它定为：

$$u_{B2}(x) = a/c \qquad (5)$$

其中，a 是仪器说明书上所标明的"最大误差"或"不确定度限值"，c 是一个与仪器不确定度 $u_{B2}(x)$的概率分布特性有关的常数，称为"置信因子"。仪器不确定度 $u_{B2}(x)$的概率分布通常有正态分布、均匀分布、三角形分布以及反正弦分布、两点分布等。对于正态分布、均匀分布和三角形分布，置信因子 c 分别取 3、$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{6}$。如果仪器说明书上只给出不确定度限值（即最大误差），却没有关于不确定度概率分布的信息，则一般可用均匀分布处理，即 $u_{B2}(x)=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$。

有些仪器说明书没有直接给出其不确定度限值，但给出了仪器的准确度等级，则其不确定度限值 a 需经计算才能得到。如指针式电表的不确定度限值等于其满量程值乘以等级，例如满量程为 10V 的指针式电压表，其等级为 1 级，则其不确定度限值 a＝10V×1％＝0.1V。又如电阻箱的不确定度限值等于示值乘以等级再加上零值电阻，由于电阻箱各档的等级是不同的，因此在计算时应分别计算，例如：常用的 ZX21 型电阻箱，其示值为 360.5Ω，零值电阻为 0.02Ω，则其不确定度限值

$$a＝(300×0.1\%＋60×0.2\%＋0×0.5\%＋0.5×5\%＋0.02)\Omega＝0.46\Omega。$$

四、标准不确定度的合成与传递

由正态分布、均匀分布和三角形分布所求得标准不确定度可以按以下规则进行合成与传递。

1、合成

（1）在相同条件下，对 x 进行多次测量时，待测量 x 的标准不确定度 $u(x)$由 A 类不确定度 $u_A(x)$和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$合成而得。即

$$u(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_{B2}^2(x)} \qquad (6)$$

其中，$u_{B2}(x)$的值由式（5）根据相应的概率分布进行估算。

（2）对待测量 x 进行单次测量时，待测量 x 的标准不确定度 $u(x)$由测量不确定度 $u_{B1}(x)$和仪器不确定度 $u_{B2}(x)$合成而得。即

$$u(x) = \sqrt{u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x)} \qquad (7)$$

对于单次测量，有时会因待测量的不同，其不确定度的计算也有所不同。例如用温度计测量温度时，温度的不确定度合成公式为上述的（7）式；而在长度测量中，长度值是两个位置读数 x_1 和 x_2 之差，其不确定度合成公式为 $u(x) = \sqrt{u_{B1}^2(x_1) + u_{B1}^2(x_2) + u_{B2}^2(x)}$。这是因为 x_1 和 x_2 在读数时都有测量不确定度，因此在计算合成不确定度时都要算入。

2、传递

在间接测量时，待测量（即复合量）是由直接测量的量通过计算而得的。若 $y=f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_N)$，且各 x_i 相互独立，则测量结果 y 的标准不确定度 $u(y)$的传递公式为：

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \qquad (8)$$

式中 $u(x_i)$是直接测量量 x_i 的不确定度，偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 表示 x_i 的不确定度对结果不确定度的影响系

数，由式（8）可以得到一些常用的不确定度传递公式如下：

对加减法：$y = x_1 \pm x_2$，则

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) \tag{9}$$

对乘除法：$y = x_1 \cdot x_2$，或 $y = {x_1}/{x_2}$，则

$$\left[\frac{u(y)}{y}\right]^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 \tag{10}$$

对乘方（或开方）：$y = x^n$，则

$$\left[\frac{u(y)}{y}\right]^2 = \left(n \cdot \frac{u(x)}{x}\right)^2 \tag{11}$$

五、不确定度的表示

由于不确定度 $u(x)$表示的是待测量 x 的真值在一定的置信概率下可能存在的范围，因而，测量结果常表示为$x \pm u(x)$，如：所测长度为（1.05 ± 0.02）cm。这是不确定度的一般表示法。

有时，以不确定度对于待测量的百分比来表示更能看出不确定度的相对大小，即把测量结果的不确定度表示为$\frac{u(x)}{x} \times 100\%$，如：所测长度为 1.05cm，相对不确定度 2%。这是不确定度的百分比表示法。

除了以上两种常用的不确定度表示法外，还有一种更为简略的表示法，叫做不确定度的有效数字表示法。所谓有效数字，是指一个数值中，从第一个非 0 数字算起的所有数字。例如，x=0.0035 中的 3 是第一个非 0 数字，因此 x 有两位有效数字：3 和 5，小数点前后的三个 0 都是表示数量级的，不是有效数字。又如，x=3.500 有四位有效数字 3，5，0，0 都是有效数字，其中的两个 0 虽然对该数的大小并无意义，但它却表示这个数的准确程度可达小数点后的第三位，即 x 的值约在 3.495 和 3.504 之间，它与 x=3.5 是显然不同的，后者表示小数点后的第一位数（即 5）就是可疑的，不确定的。测量最后结果的不确定度，一般只取一位有效数字，而测量结果的末位有效数字应与不确定度的有效数字对齐，即测量结果的末位有效数字是不确定的。(特殊情况下，不确定度的有效数字可取两位，即测量值的末两位有效数字都是不确定的。）这样，根据测量值的不确定度，可以决定测量值的有效数字。

在计算数据时，当有效数字位数确定后，须将多余的数字舍去，被舍去的数字基本上按照四舍五入规则，但遇到被舍数字恰为“50”或只有“5”一位数字时，则“5”有时入，有时不入，应使有效数字末位保持为偶数。这样可使舍和入的机会均等，从而避免在处理较多数据时因入比舍多而带来的问题。

例如：经计算所得的长度值为 x=3.54825m， 若不确定度为 0.0003m， 则应取测量值的结果为 x=3.5482m；若不确定度为 0.002m， 则应取测量值的结果为 x=3.548m；若不确定度为 0.05m， 则应取测量值的结果为 x=3.55m；若不确定度为 0.1m， 则应取测量值的结果为 x=3.5m（如以毫米为单位，则应写成 3.5×10^3mm，绝不可写成 3500mm）。这样，从测量值的有效数字，就可大约知道它的不确定度，这就是不确定度的有效数字表示法。显然，这只是一种简略的表示法，在严格的定量实验中，应采用不确定度的一般表示法或百分比表示法。

虽然测量最后结果的不确定度，一般只取一位有效数字，但在运算过程中，不确定度一般要取两位或更多，中间过程测量值的有效数字也应适当多取一些，以免过早舍入，造成不合理的结果。

有效数字的运算有一定的规则，最简单和常用的规则是：

当两个数相加减时，有效数字的位数应对齐；当两个数相乘除时，有效数字的位数应与有效数字少的一致。

例如:

x=1.832m（共有 4 位有效数字，末位在小数点后第 3 位），

y=1.69m（共有 3 位有效数字，末位在小数点后第 2 位），

则：x+y=3.52m （末位取小数点后第 2 位）； x-y=0.14m （末位取小数点后第 2 位）；

xy=3.10mm²（共取 3 位有效数字）； x/y=1.08（共取 3 位有效数字）。

六、实例

用电子天平测得一个圆柱体的质量 M=80.36g；电子天平的最小指示值为 0.01g；不确定度限值为 0.02g。用钢尺测量该圆柱体的高度 $H=H_2-H_1$，其中，H_1=4.00cm，H_2=19.32cm；钢尺的分度值为 0.1cm，估读 1/5 分度；不确定度限值为 0.01cm。用游标卡尺测量该圆柱体的直径 D（数据如下表所示）；游标卡尺的分度值为 0.002cm；不确定度限值为 0.002cm。

D / cm	2.014	2.020	2.016	2.020	2.018
	2.018	2.020	2.022	2.016	2.020

试根据上述数据，计算该圆柱体的密度及其不确定度。

解：（1）圆柱体的质量 $M=80.36\text{g}$

$$u(M)=\sqrt{(u_{B1}(M))^2+(u_{B2}(M))^2}=\sqrt{(0.01)^2+\left(0.02/\sqrt{3}\right)^2}\ \text{g}=0.015\text{g}$$

（2）圆柱体的高 $H=H_2-H_1=(19.32-4.00)\text{cm}=15.32\text{cm}$

$$u(H)=\sqrt{2\cdot(u_{B1}(H))^2+(u_{B2}(H))^2}=\sqrt{2\cdot(0.02)^2+\left(0.01/\sqrt{3}\right)^2}\ \text{cm}=0.029\text{cm}$$

（3）圆柱体的直径的平均值 $\overline{D}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}D_i=2.0184\text{cm}$

$$u_A(\overline{D})=\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(D_i-\overline{D})^2\Big/10\times(10-1)}=0.00078\text{cm}$$

$$u(\overline{D})=\sqrt{(u_A(\overline{D}))^2+(u_{B2}(\overline{D}))^2}=\sqrt{(0.00078)^2+\left(0.002/\sqrt{3}\right)^2}\ \text{cm}=0.0014\text{cm}$$

（4）根据上述数据计算材料的密度ρ。

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{4M}{\pi D^2H}=\frac{4\times80.36}{3.1416\times(2.0184)^2\times15.32}\ \mathbf{g/cm^3}=1.6394\ \mathbf{g/cm^3}$$

$$\frac{u(\rho)}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{u(M)}{M}\right)^2+\left(2\cdot\frac{u(D)}{D}\right)^2+\left(\frac{u(H)}{H}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.015}{80.36}\right)^2+\left(2\cdot\frac{0.0014}{2.0184}\right)^2+\left(\frac{0.029}{15.32}\right)^2}=0.24\%$$

$$u(\rho)=\frac{u(\rho)}{\rho}\times\rho=0.24\%\times1.6394\ \mathbf{g/cm^3}=0.004\ \mathbf{g/cm^3}$$

$$\therefore\ \rho\pm u(\rho)=(1.639\pm0.004)\ \text{g/cm}^3=(1.639\pm0.004)\times10^3\ \text{kg/m}^3$$

第三节 制表、作图与拟合

一、制表

在物理实验的测量和计算中，常要将数据记录在表格中，便于整理、计算、作图或拟合。

制表一般应注意如下事项：（参见例表）

例表：测量一个圆柱体样品的密度。

测量次数	1	2	3	4	5	平均值
直径 D / cm						
长度左端 h_1 / cm						—
长度右端 h_2 / cm						—
长度 $h=h_1-h_2$ / cm						

样品的质量 M =________________g。

$$\rho = \frac{4M}{\pi \bar{D}^2 h} = \underline{\qquad\qquad\qquad}。$$

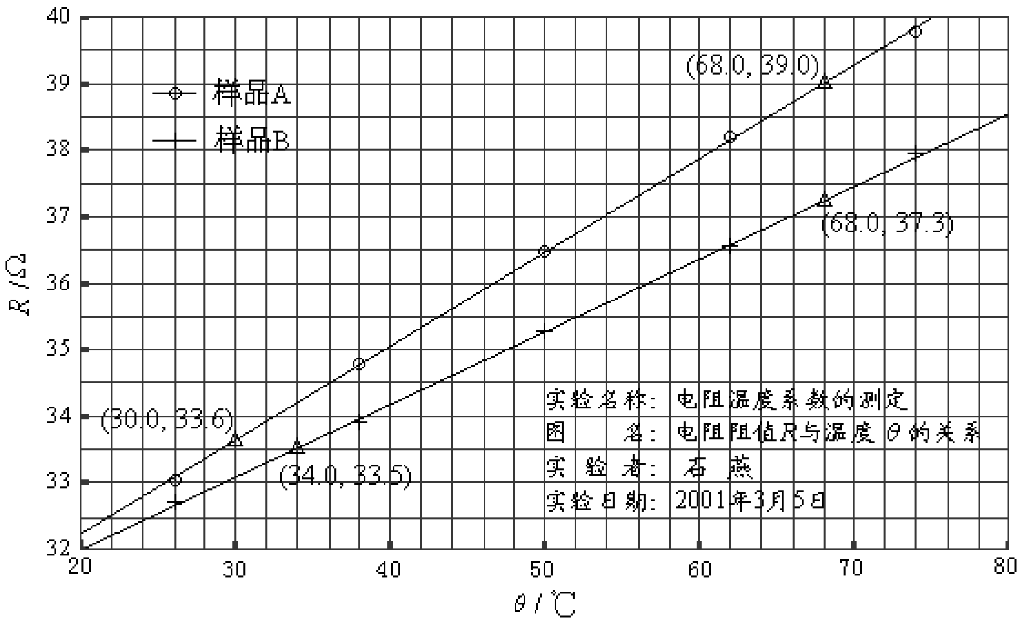
室温 T_r =___________℃；湿度 η =___________%。

1. 制表前，应先明确实验中要测哪些物理量？哪些是直接读出的、哪些是通过计算得出的？哪些物理量宜先测、哪些物理量宜后测？哪些物理量只要测一次、哪些物理量要多次测量求平均？（多次测量时，一般应在 10 次以上；但因课时有限，可取 5 次。）
2. 制表时，应合理安排各待测物理量在表格中的位置。一般可先列直接读出量、再列计算得出量；先列先测量、后列后测量；让自变量与因变量在表中一一对应。如果预先可以确定自变量的变化范围和取值，则可按自变量的值由小到大或由大到小在表中预先写好。
3. 任一物理量都是数值与单位的合成，在表格中常用物理量与单位的比值来表示，如例表的第一列所示，其中 D / cm 表示物理量 D 的单位是 cm，依此类推。注意：物理量的符号应用*斜体*书写，单位的符号则用正体书写，以示区别（在用计算机打印时，更应严格遵守此规定）。
4. 表中各符号所代表的意义都应有相应的说明(如例表中的直径、长度等，但不一定写在表格中)。
5. 不同的物理量之间应用线条加以区分，如例表中各横线所示。物理量与数据之间也应用线条加以区分，如例表中第 1 竖线所示。
6. 测量量与计算量应明确区分，如例表中第 6、7 竖线所示。计算量应注明计算公式（不一定写在表格中）。
7. 为了清楚说明表的意义，必要时还应加上一个表名。

二、作图

在物理实验中，常为了清晰地看到物理量之间的定性关系，或方便地比较不同的物理特性，需要用作图法来直观地显示物理量之间的关系，有时作直线图，有时还要作曲线图。作图法是研究

例　图



物理量之间变化规律的重要手段。对于作图一般应遵守如下规则：

1. 作图用纸一般应采用标准坐标纸。图纸的大小应能反映物理量的有效数字；作图区域应占图纸的一半以上。
2. 取自变量为横坐标（向右增大）；取因变量为纵坐标（向上增大）。画出纵、横坐标轴，并与图纸上印的线条密切重合，但坐标轴不一定取图纸所印标格的边线，坐标轴的标度值不一定从零开始。
3. 根据自变量（及因变量）的最低值与最高值，选取合适的作图比例，应取图纸上的 1 格所表示的原数据的量值变化为 1、2、5 等数（或它们的十进倍率）。
4. 每隔相同距离，沿轴画一垂直于轴的短线（称为标度线），并在其附近注以标度值。标度值的位数不必取实验数据中的全部有效数字位数，例如 2.50 只标 2.5 即可。（一般在各坐标轴上可标 5～10 个标度值。）
5. 对每一坐标轴，要标明物理量的名称及单位符号。（标注的方法与表格相同）
6. 数据点要用端正的“＋”或“⊙”等符号来表示。数据点应在符号的中心，符号的大小应相当于不确定度的大小；但为简单起见，也可统一取 2～3mm。在一张图纸上作多条曲线时，不同的数据组应使用不同的符号来表示数据点，并在图中适当位置说明不同符号的不同意义。求斜率时取点的符号应采用有别于这些数据点的符号，例如用正三角形“△”，并在其旁标以坐标（坐标值应正确写出有效数字）；求斜率时所取点的位置应靠近直线的两端，为计算方便起见，可选取横坐标为整数。
7. 拟合直线或曲线的线条务必匀、细、光滑。不通过图线的数据点应匀称地分布在图线的两侧，且尽量靠近图线。
8. 在实验报告的图纸中，应写上实验名称、图名、姓名、日期。图纸上的中英文字及数字等均需书写端正。

以上规则是针对用手工作图的。当然也可以借助计算机作图，则有些规则（如数据点在符号的中心，线条匀、细、光滑，书写端正等）是自动满足的。虽然计算机可以任意取比例，使曲线（或直线）充满图纸，但实验作图时不宜采用这种方法。两标度线间的量值变化仍应取 1、2、5 及其十进倍率等为佳，因为只有这样，才易于使用者读图。

三、拟合

若两物理量 x、y 满足线性关系，并由实验等精度地测得一组数据（x_i，y_i；i=1,2,……,n），如何作出一条能最佳地符合所得数据的直线，以反映上述两变量间的线性关系呢？除了用作图法进行拟合外，常用的还有最小二乘法。

最小二乘法认为：若最佳拟合的直线为 $y = f(x)$，则所测各 y_i 值与拟合直线上相应的各估计值 $\hat{y}_i = f(x_i)$ 之间的偏差的平方和为最小，即

$$s = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \to \min \text{（极小）} \qquad (1)$$

因为测量总是有不确定度存在，所以在 x_i 和 y_i 中都含有不确定度。为讨论简便起见，不妨假设各 x_i 值是准确的，而所有的不确定度都只联系着 y_i。这样，如由 $\hat{y}_i = f(x_i)$ 所确定的值与实际测得值 y_i 之间的偏差平方和最小，也就表示最小二乘法所拟合的直线是最佳的。

一般，可将直线方程表示为： $y = kx + b$

其中 k 是待定直线的斜率；b 是待定直线的 y 轴截距。如果设法确定这两个参数，该直线也就确定了，所以解决直线拟合的问题也就变成由所给实验数据组（x_i，y_i）来确定 k、b 的过程。将上式代入（1）式得：

$$s(k,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - kx_i - b\right)^2 \to \min \qquad (2)$$

所求的 k 和 b 应是下列方程组的解。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial k} = -2\sum (y_i - kx_i - b)x_i = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = -2\sum (y_i - kx_i - b) = 0 \end{cases}$$

其中 Σ 表示对 i 从 1 到 n 求和。将上式展开，消去未知数 b，可得：

$$k = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} \qquad (3)$$

$$\text{式中}\begin{cases} l_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum (x_i y_i) - \dfrac{1}{n}\sum x_i \sum y_i \\ l_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum {x_i}^2 - \dfrac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2 \end{cases} \qquad (4)$$

将求得的 k 值代入方程组，可得：

$$b = \bar{y} - k\bar{x} \qquad (5)$$

至此，所需拟合的直线方程 $y = kx + b$ 就被唯一地确定了。

由最终结果不难得到，最佳配置的直线必然通过（ $\bar{x}$，$\bar{y}$ ）这一点。因此在作图拟合直线时，拟合的直线必须通过该点。

为了检验拟合直线是否有意义，在数学上引入相关系数 r，它表示两变量之间的函数关系与线性函数的符合程度，具体定义为：

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} \cdot l_{yy}}} \qquad (6)$$

式中 l_{yy} 的计算方法与 l_{xx} 类似。相关系数 r 有效数字一般保留到第一个不为 9 的数，r 的值越接近 1，表示 x 和 y 的线性关系越好；若 r 近于 0，就可以认为 x 和 y 之间不存在线性关系。

在物理实验中，相当多的情况是所测的两个物理量 x、y 之间的关系符合某种曲线方程，而非直线方程。这时，可对曲线方程作一些变换，引入新的变量，从而将不少曲线拟合的问题转化为直线拟合问题。

如曲线方程为 $y = ax^k$ ，可将等式两边取自然对数，得 $\ln y = k\ln x + \ln a$ 。再令 $Y = \ln y$，

$X = \ln x$，$b = \ln a$，即可将幂函数转化成线性函数 $Y = kX + b$。

又如曲线方程为 $y = ae^{kx}$，同样可将等式两边取自然对数，得 $\ln y = kx + \ln a$。再令 $Y = \ln y$，$b = \ln a$，即可将指数函数转化成线性函数 $Y = kx + b$。

现在许多计算器中有最小二乘法的直线拟合功能。只要输入 x 和 y 的数据组，即可得出斜率 k、截距 b 和相关系数 r；还可类似求得幂函数和指数函数中的 k 和 a。在实验的数据处理中，可利用计算器的这些功能，不必进行繁琐的计算。

注意：（1）用最小二乘法计算斜率 k 和截距 b 时，不宜用有效数字的运算法则计算中间过程，否则会有较大的计算误差引入。提倡用计算器计算，将所显示的数值均记录下来为佳。（2）如果 y 和 x 的相关性好，可以粗略考虑 b 的有效位数的最后一位与 y 的有效数字最后一位对齐，k 的有效数字与 y_n-y_1 和 x_n-x_1 中有效位数较少的相同。（3）确定有效位数的可靠方法是计算 k 和 b 的不确定度。

直线拟合的不确定度估算：（以 $y = kx + b$ 为例）

斜率 k 和截距 b 是间接测量物理量，分别令测量数据的 A 类和 B 类不确定度分量中的一个分量为零，而求得另一个分量比较简单，最后将两个分量按直接测量的合成方法求出合成不确定度，这种方法被称为等效法。

可以证明，在假设只有 y_i 存在明显随机误差的条件下（且 y 的仪器不确定度远小于其 A 类不确定度），k 和 b 的不确定度分别为：

$$S_k = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}} \qquad (7)$$

$$S_b = S_k\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = S_y\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \qquad (8)$$

式中，S_y 是测量值 y_i 的标准偏差，即

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - kx_i - b)^2}{n-2}} \qquad (9)$$

根据上述公式即可算出各个系数（斜率 k 和截距 b）的不确定度值，初看上去计算似乎很麻烦，但是利用所列的数据表格，由表中求出的那些累加值Σ即可很容易算得。

最小二乘法应用举例

应用最小二乘法处理物理量的测量数据是相当繁琐的工作，容易出现差错。因此，工作时要十分细心和谨慎。为便于核对，常将各数据及计算结果首先表格化。

例：已知某铜棒的电阻与温度关系为：$R_t = R_0 + \alpha \cdot t$。实验测得 7 组数据（见表 1）如下：试用最小二乘法求出参量 R_0、α以及确定它们的误差。

表 1

t / ℃	19.10	25.10	30.10	36.00	40.00	45.10	50.10
R_t / Ω	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

此例中只有两个待定的参量 R_0 和α，为得到它们的最佳系数，所需要的数据有 n、$\sum x_i$、$\sum y_i$、$\sum x_i^2$、$\sum y_i^2$ 和 $\sum x_i y_i$ 六个累加数，为此在没有常用的科学型计算器时，通过列表计算的方式来进行，这对提高计算速度将会有极大的帮助（参见表 2），并使工作有条理与不易出错。其中表内双线右边的计算是为了确定 R_0 和α的误差项用的。

表 2

i	t/ °C (x_i)	R_t / Ω (y_i)	t×t (x^2_i)	R_t× R_t (y^2_i)	t×R_t (x_i y_i)	$R_{计算}$ / Ω	υ_i / Ω	υ_i^2×10^{-4}
1	19.10	76.30	364.81	5821.7	1457.3	76.26	+0.04	16
2	25.10	77.80	630.01	6052.8	1952.8	77.99	-0.19	361
3	30.10	79.75	906.01	6360.1	2400.5	79.43	+0.32	1024
4	36.00	80.80	1296.0	6528.6	2908.8	81.13	-0.33	1089
5	40.00	82.35	1600.0	6781.5	3294.0	82.28	+0.07	49
6	45.10	83.90	2034.0	7039.2	3783.9	83.75	+0.15	225
7	50.10	85.10	2510.0	7242.0	4263.5	85.19	-0.09	81
$n=$ 7	$\sum x_i=$ 245.50	$\sum y_i=$ 566.00	$\sum x_i^2=$ 9340.8	$\sum y_i^2=$ 45825.9	$\sum x_i y_i=$ 20060.8			$\sum \nu_i^2=$ 2845×10^{-4}

根据表 2 中所求得的数据，代入公式则可得：

$$\alpha = k = \frac{7\times 20060.8 - 245.50\times 566.00}{7\times 9340.8-(245.50)^2} = \frac{1472.6}{5115.35} = 0.28788\Omega/°C$$

$$R_0 = b = \frac{566.00}{7} - 0.28788\cdot\frac{245.50}{7} = 70.76078\Omega$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n}\sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2]\cdot[\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2]}} = \frac{20060.8 - \frac{245.50\times 566.00}{7}}{\sqrt{[9340.8-\frac{(245.50)^2}{7}]\times[(45825.9-\frac{(566.00)^2}{7})]}}$$

$$= k\times\sqrt{\frac{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2}} = 0.28788\times\sqrt{\frac{9340.8-\frac{(245.50)^2}{7}}{45825.9-\frac{(566.00)^2}{7}}} = 0.998$$

说明：电阻 R_t 与温度 t 的线性关系良好，所以取 R_0 的有效数字与 R 对齐，即 R_0＝70.76Ω；又因为 t_7 －t_1＝31.00°C，R_7－R_1＝8.80Ω，取 k 有效数字为以上两个差值中较少的位数 3 位，则 k＝0.288Ω/°C。由此可以得到电阻与温度的相关关系为：

$$R_t = 70.76 + 0.288t$$

分别计算 k 和 b 的不确定度，可得

$$S_y = S_{R_t} = \sqrt{\frac{\sum \nu_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{2845\times 10^{-4}}{7-2}} = 0.239(\Omega)$$

$$S_k = S_\alpha = \frac{S_y}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}} = \frac{0.239}{\sqrt{9340.8-\frac{(245.50)^2}{7}}} = 0.239\times 0.03699 = 0.0088(\Omega/°\text{C})$$

$$S_b = S_{R_0} = S_k\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = 0.0088\times\sqrt{\frac{9340.8}{7}} = 0.33(\Omega)$$

故 $R_0 = (70.76\pm 0.33)\Omega = (70.8\pm 0.3)\Omega$，

$\alpha = (0.2879\pm 0.009)\Omega/°C = (0.288\pm 0.009)\Omega/°C$

则 $R_t = 70.8 + 0.288t$

验证及比较最后的计算结果：

利用计算机软件（Origin 7.5）对上述实验数据进行线性拟合，结果如下：发现其斜率、截距及其标准偏差，以及测量值 y_i 的标准偏差与直接用所述公式进行计算的结果是完全一致的（仅讨论 A 类不确定度，而 B 类不确定度未考虑）。

$R_0 = (70.8 \pm 0.3)\Omega$

$\alpha = (0.288 \pm 0.009)\Omega / °C$

r=0.998

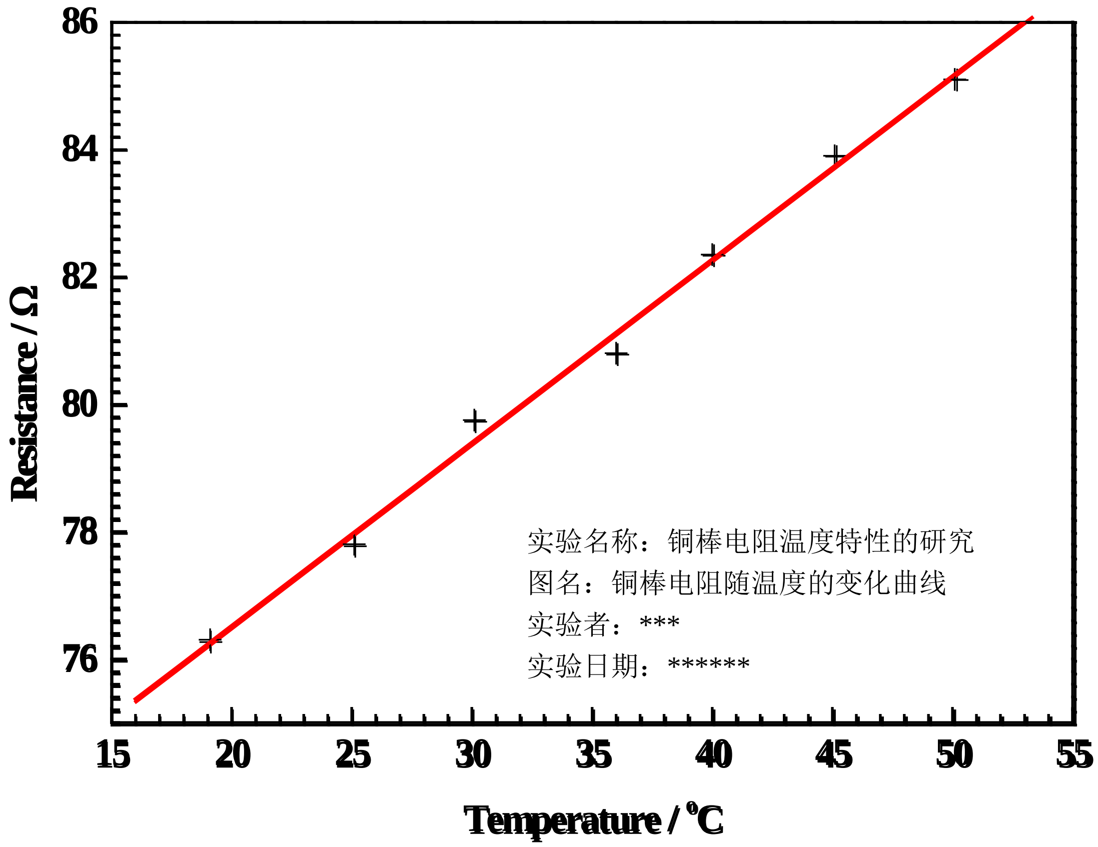


图 1 铜棒电阻随温度的变化曲线