物理实验

一元线性问题中的实验标准差

成正维
(北京交通大学 物理系,北京 100044)

摘要:分析了用不同方法处理具有一元线性函数关系的物理实验数据的实验标准差.结果表明,在 $n\geqslant 4$ 时,用逐差法计算线性系数 b 的实验标准差明显小于简单平均值法,但是稍大于最小二乘法.

关键词:最小二乘法;逐差法;实验标准差

中图分类号:O 4-33 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-0712(2004)06-0035-02

1 引言

若两物理量 x,y 满足一元线性关系 $y=a+bx$,则可以通过一系列的 (x_i,y_i) 测量值求线性系数 b,进而求相关物理量.这是一类典型的物理问题.例如物理实验中用拉伸法测量弹性模量,用伏安法测电阻,用迈克耳孙干涉法测光波长等均属此类问题.

目前实验教学中采用多种方法处理一元线性问题的实验数据.近年来也有一些关于数据处理方法和误差评价的不同见解的文章[1,2]发表.本文从误差传递理论出发,对各种方法的实验标准差或方差(即实验标准差的平方)进行定量比较.

实验标准差是测量结果不确定度评定的依据,分析得到的实验标准差的结果可以反映物理量测量估计值的不确定度情况.

2 模型

首先对实验条件作如下假定:

1) x,y 是两物理量,y 的数学期望为

$$E(y)=a+bx \tag{1}$$

2) 物理量 x 的测量值 x_i 是准确的,或其不确定度远小于测量值 y_i 的不确定度.

3) y_i 服从正态分布且具有相同的实验标准差 σ,即 $y_i\sim N(a+bx_i,\sigma^2)$.

4) 实验中测量得到 N 组 (x_i,y_i) 数据,其中 x_i 按由小到大的顺序依次排列.为便于与逐差法比较,令 x_i 是以 δ 为间距变化的,N 是偶数.即

$$x_{i+1}-x_i=\delta \tag{2}$$

$$N=2n \quad (n\text{ 是正整数}) \tag{3}$$

现由符合上述 4 个条件的 N 组实验数据 (x_i,y_i) 求线性系数 b 及其实验标准差 $\sigma(b)$.

3 误差传递公式

函数 $f=f(y_1,y_2,\cdots,y_N)$,方差 $V(f)=\sigma^2(f)$ 的传递公式为[3]

$$V(f)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 V(y_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i<j}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\cdot \mathrm{Cov}(y_i,y_j) \tag{4}$$

其中 $\mathrm{Cov}(y_i,y_j)=E\{[y_i-E(y_i)][y_j-E(y_j)]\}$,称为协方差.若各 y_i 独立,协方差为零.传递公式简化为

$$V(f)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 V(y_i)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2\sigma^2 \tag{5}$$

4 几种方法的分析

4.1 邻差法(简单平均值法)

将任意两组相邻数据相减,得到 $y_{i+1}-y_i$ 和 $x_{i+1}-x_i$.则

$$b_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{y_{i+1}-y_i}{\delta}$$

b_i 是由相邻组数据得到的,所以我们可以称其为邻差法.b 的估计值即算术平均值:

$$\hat{b}=\bar{b}=\frac{1}{2n-1}\sum_{i=1}^{2n-1}b_i=\frac{1}{(2n-1)\delta}\sum_{i=1}^{2n-1}(y_{i+1}-y_i)=\frac{y_{2n}-y_1}{(2n-1)\delta} \tag{6}$$

式中得到最后一步是由于除两端点外,其他 y_i 在求和式中均出现两次,且符号相反,互相抵消.由上式

收稿日期:2003-06-16;**修回日期**:2003-12-30

作者简介:成正维(1951—),男,江苏泰兴人,北京交通大学物理系教授,主要从事物理实验教学研究.

可看出,$\hat{b}$ 只与端点数据 y_{2n} 和 y_1 有关,等价于用端点数据求平均值.所以这种方法就是简单平均值法.

y_{2n} 和 y_1 的标准差均为 σ,由传递公式(5)得到 b 的方差为

$$\sigma^2(b)=\frac{1}{(2n-1)^2}\frac{2\sigma^2}{\delta^2} \tag{7}$$

4.2 相邻分组法

由于上面方法中间项不起作用,有人提出一种新的数据处理方案.将相邻两数据分组,组内的偶次项减奇次项,得

$$b_i=\frac{y_{2i}-y_{2i-1}}{x_{2i}-x_{2i-1}}=\frac{y_{2i}-y_{2i-1}}{\delta}$$

对 b_i 求和不会抵消任何项. b 的估计值为

$$\hat{b}=\frac{1}{n\delta}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i}-y_{2i-1}) \tag{8}$$

由传递公式得 b 的方差为

$$\sigma^2(b)=\frac{1}{n}\frac{2\sigma^2}{\delta^2} \tag{9}$$

与式(7)比较知道,与预期结果相反,这种数据处理方法既不比简单平均值法方便,也不能减小实验标准差.

4.3 逐差法

物理实验中广泛使用的处理这类问题的方法之一是逐差法,将前 n 组数据作为一组,后 n 组数据为另一组.两组相对应的项相减,得到

$$b_i=\frac{y_{n+i}-y_i}{n\delta}$$

其估计值为

$$\hat{b}=\frac{1}{n^2\delta}\sum_{i=1}^{n}(y_{n+i}-y_i) \tag{10}$$

实验标准差的平方

$$\sigma^2(b)=\frac{1}{n^3}\frac{2\sigma^2}{\delta^2} \tag{11}$$

4.4 最小二乘法

对于线性问题,用最小二乘法求得的系数 $\hat{a}$,$\hat{b}$ 是 a,b 的真值的无偏估计值.根据数理统计的理论可以得到:

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \tag{12}$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x} \tag{13}$$

b 的方差为

$$\sigma^2(b)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \tag{14}$$

由于 $\bar{x}=x_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\delta$,$x_i=x_1+(i-1)\delta$,所以 $x_i-\bar{x}=\left(i-n-\frac{1}{2}\right)\delta$,代入到式(14),化简后得到

$$\sigma^2(b)=\frac{1}{2\sum_{i=1}^{2n}\left(i-n-\frac{1}{2}\right)^2}\frac{2\sigma^2}{\delta^2}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2}\frac{2\sigma^2}{\delta^2} \tag{15}$$

5 讨论

由式(7)、(9)、(11)、(15)可知,各种方法在 δ 不变时,随着 n 的增加实验标准差都是减小的.由于实验中 x 的变化有一定的允许范围 Δ,在 Δ 固定的前提下,增加 n 会引起 δ 的减小,而 δ 减小又会导致实验标准差增加,所以真正有意义的是在 Δ 不变的条件下进行的比较.若使 $\Delta=(2n-1)\delta$ 为最大允许值并保持不变,则可以得到:

简单平均值法:$\sigma^2(b)=\frac{2\sigma^2}{\Delta^2}$;

相邻分组法:$\sigma^2(b)=\frac{(2n-1)^2}{n}\frac{2\sigma^2}{\Delta^2}$;

逐差法:$\sigma^2(b)=\frac{(2n-1)^2}{n^3}\frac{2\sigma^2}{\Delta^2}$;

最小二乘法:$\sigma^2(b)=\frac{(2n-1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2}\frac{2\sigma^2}{\Delta^2}$.

我们可将上面4式写成统一形式:$\sigma^2(b)=k(n)\frac{2\sigma^2}{\Delta^2}$,不同方法具有不同的系数 $k(n)$.

由此可以看出,当 Δ 确定时有如下结果:

简单平均值法中,b 的实验标准差确定.由于该方法中只有两端数据起作用,这一结果是必然的.

相邻分组法中,当 n 增加时导致 δ 减小,总效果是 b 的实验标准差增大.所以这种方法是不可取的.

用简单平均值法、逐差法和最小二乘法分别处理数据,得到的 $k(n)$ 的变化曲线如图1所示.

图示结果表明,除了 $n=1$ 时(此时各种方法等价),各种情况下均是最小二乘法的 k 值最小,因而实验标准差也最小.在 $n\geqslant4$ 时,逐差法比简单平均法有明显优势,但是仍稍逊于最小二乘法.

逐差法计算比最小二乘法简单.在对结果准确度要求不高的情况下,逐差法是物理实验处理数据时经常使用的一种方法.现在,电子计算机已得到广

(下转53页)

Measuring index of refraction of transparent medium with linear CCD

HUA Shi-qun
(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: According to the traverse deviation of light caused by passing through a transparent medium plate of even thickness, a new method of measuring index of refraction of transparent medium by means of CCD and computer is proposed. This method uses linear array CCD characteristic with high resolution capacity and has certain practical value and application prospect.

Key words: CCD; transparent medium; index of refraction

(上接 36 页)

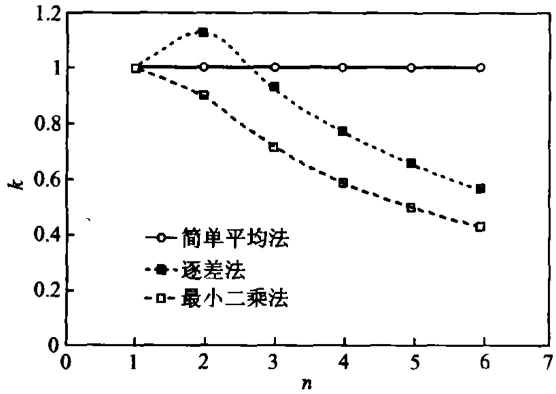

图 1　不同方法 $k(n)$ 随 n 变化关系

泛应用,一般科学计算器上都具有线性回归的计算功能,Oringe、Excel 等应用程序使得计算大为简化.与逐差法相比,最小二乘法还有一些其他的优点,比如可以计算系数 a 的估计值,不要求实验数据是偶数及 x_i 等间隔分布等.所以如有可能,应尽量避免使用逐差法,而由最小二乘法代之.

综上,在设计实验参数时,应在条件许可的情况下 Δ 取尽可能大的值,然后根据对不确定度(或实验标准差)的要求选取适当的 n 进行测量,最后用最小二乘法处理数据.

参考文献:

[1] 陈西园,焦志伟,单明.线性函数的逐差法处理[J].计量技术,2001,1.45~46.

[2] 杨卫群.逐差法不科学[J].大学物理实验,2001,14(2).46~48.

[3] 朱永生.实验物理中的概率和统计[M].北京:科学出版社,1991.67~73.

Analysis on experimental standard deviation of one-dimensional linear problem

CHENG Zheng-wei
(Department of Physics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Experimental standard deviation of one-dimensional linear problem is analyzed. It shows that when $n \geqslant 4$, the experimental standard deviation of linear factor b get by successive differential method is much less than simple average method, but is a little greater than least square method.

Key words: least square method; successive differential method; experimental standard deviation