

# 探究 CD 气垫船低摩擦持续时间的因素

朱允铨，郭学菲，余润雪，张雪峰

**摘要：**采用光学放大法来测量 CD 气垫船的悬浮时间，并改变四个相关参量：气球直径，出气小孔直径，系统质量，以及 CD 外径进行探究，得出该 4 个参量与悬浮时间的关系，再用近似推导得出悬浮时间的理论公式。将两者所得结果进行比较，能较好符合。

**关键词：**光学放大法；流量；垫升高度；压强分布；层流区；湍流区

## 1 引言

广义的气垫船是利用高压空气在船底和水面（或地面）间形成气垫，使船体全部或部分垫升，从而大大减小船体航行时的阻力，实现高速航行的船。气垫是用鼓风机将空气压入船底，由船底周围的刚性侧壁等限制气体逸出而形成的。

将一张 CD 光盘和一个充满气的气球通过一根管子连接制成 CD 气垫船。其减小阻力的原理是由于气球会将内部空气从 CD 中央的小孔喷出，在 CD 底部形成高压空气层，将 CD 整体垫升，大大减小 CD 运动时所受到的阻力。本文将研究相关参量如何影响“低摩擦”状态持续的时间。

## 2 实验部分

整个实验装置的设计如下图所示，在 CD 的中央贴上中间开有小孔（直径范围为 0.1-0.5mm）硬质塑料片（可从一些商品的外包装上获得），在塑料片上用 3M 电气绝缘胶带黏上具有一定厚度（5.0-6.0cm），且截面积为 3.5cm\*3.5cm 的海绵垫（可从一些家电的保护壳上获得），在海绵垫中央开一小孔（约 0.8cm）容许一支空心笔管通过并且不漏气，在笔管上部用细线扎紧一支气球（从城隍庙购得，在未充气，弹性良好的情况下测得其直径为 4.5-5.0cm）并使其尽可能的成为球形（将接近与矩形的部分全部扎入，只保留上部接近球形的部分如图 1）。通过粗略实验，推测与 CD 低摩擦持续时间有关的参量分别是每次浮起前给予气球的初态直径  $D$ ，出气小孔的直径  $d$ ，CD 盘的尺寸（外半径），以及整个系统的质量。通过更换不同孔径的塑料片，更改不同尺寸大小的 CD，在海绵垫上均匀叠加光盘改变质量，用夹板测量气球直径并用无油静音空压机 YB-WWJ60（在压强为 0.5Mpa 的情况下）冲缓慢入空气，并通过冲入量的大小来改变其直径。通过以上方式来改变与低摩擦持续时间有关的参量进行探究。

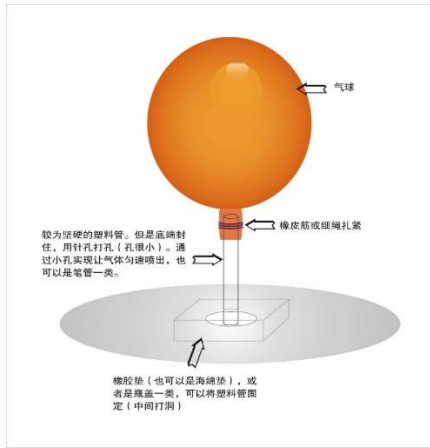


图 1

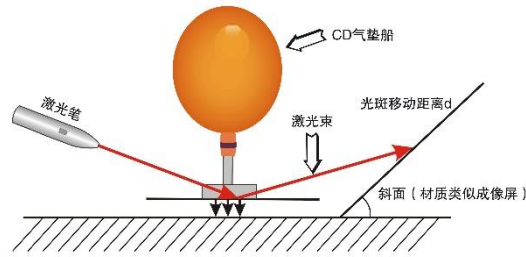


图 2

实验方法(光学放大法)的设计如图 2 所示, 一束斜射而来的激光被 CD 的反射面反射到一斜面上形成一光斑, 当 CD 被垫升起一微小的高度时光斑会随之移动, 由于几何关系, 当调整该斜面的倾角小于  $30^\circ$  时, 该微小高度会被放大至肉眼可观测的程度, 则可通过观察光斑移动情况判断 CD 是否处于低摩擦的状态, 用实验室的秒表测量记录其持续时间。

### 3 实验结果和讨论

先测量气球内部气压与直径的关系, 如下图所示

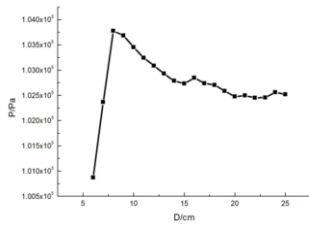


图 3a

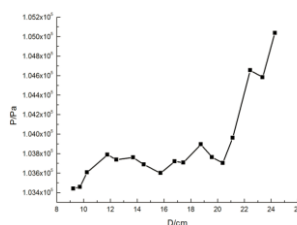


图 3b

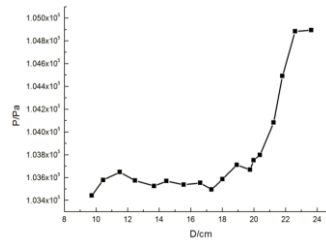


图 3c

图 3a, 3b, 3c 分别是对同一气球进行多次充放气(每次冲到直径为 24cm)所测量得到的压强与直径的关系, 纵轴为压强, 横轴为直径。图中 a 对气球冲放 5 次, b 为 20 次, c 为 60 次, 可以看出, 随着充放气次数的增加气球内部气压在一定范围内与直径(8-22cm 内)无关, 可以近似看成一常数(虽然有一定波动, 但看纵轴的气压值就可以发现, 这样的波动对于大气压而言几乎是可以忽略的约为 1% 不到), 接下的实验也将在这一个范围内进行, 因此可以用常数代替气球内部气压的经验公式。

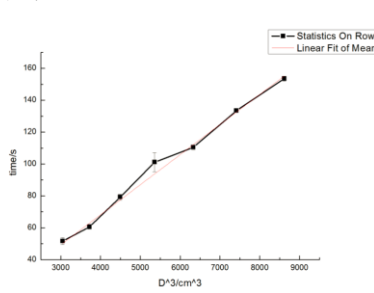


图 4a

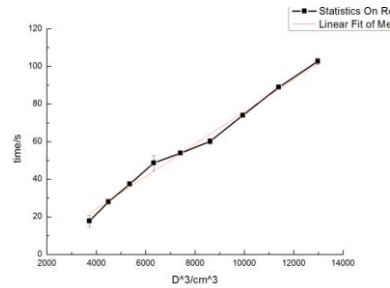


图 4b

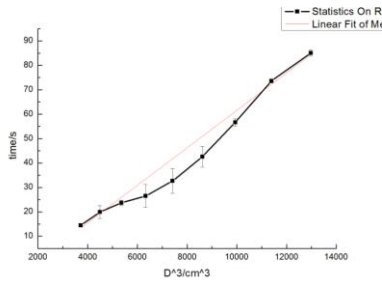


图 4c

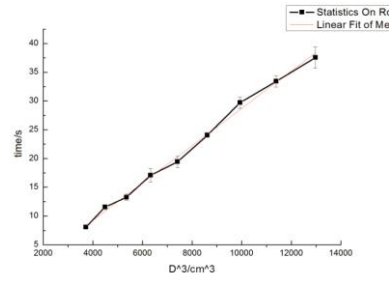


图 4d

图 4a, 4b, 4c, 4d 所探究的是气球的初态直径  $D$  与悬浮时间  $t$  的关系，图中的纵轴为悬浮时间，横轴为气球初态直径的 3 次方，四幅图分别对应了 4 个不同的出气小孔的直径其中 4a 的  $d=0.12\text{cm}$ ，4b 的  $d=0.25\text{cm}$ ，4c 的  $d=0.31\text{cm}$ ，4d 的  $d=0.40\text{cm}$ 。从中可以看出悬浮时间  $t$  与气球初态直径的 3 次方  $D^3$  近似成正比。这表明悬浮时间  $t$  是和气球的初态直径近似成正比的。

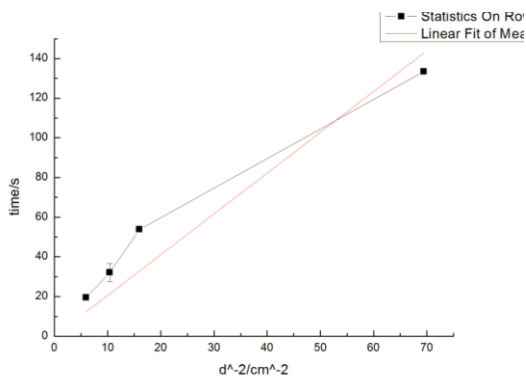


图 5

图 5 探究的是悬浮时间  $t$  与出气小孔孔径大小  $d$  的关系，图中的纵轴为悬浮时间  $t$ ，横轴为出气小孔直径的平方倒数  $1/d^2$ ，从图 5 可以看出悬浮时间  $t$  与出气小孔直径的平方倒数  $1/d^2$  近似成线性关系。这表明悬浮时间  $t$  与出气小孔的面积近似成反比。

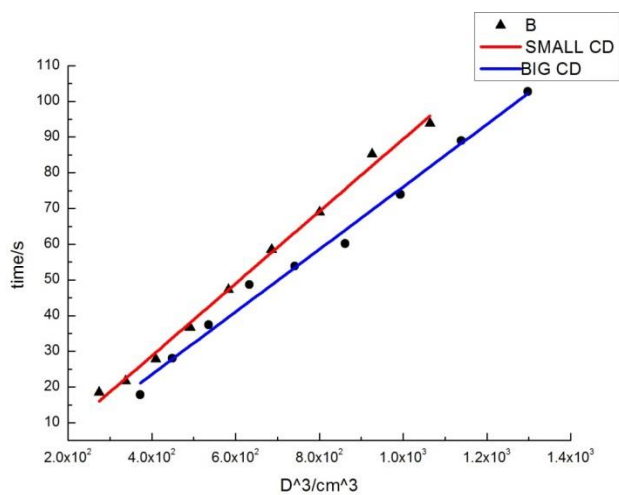


图 6

图 6 探究的是不同尺寸的 CD 所带来的影响，以不同尺寸的 CD 在悬浮时间  $t$  与气球初态直径 3 次方的关系图中的斜率作为研究对象，图中的纵轴为悬浮时

间，横轴为气球初态直径的 3 次方，出气小孔的直径  $d$  均为 0.25cm，系统质量大光盘为 24.38g，小光盘为 24.40g。蓝线对应外径大的光盘 (12.50cm)，红线对应外径小的光盘 (8.00cm)，从图中可以看出，光盘尺寸越大，在悬浮时间  $t$  与气球直径三次方  $D^3$  的  $t-D^3$  关系图中所拟合直线的斜率就越小，其所包含的物理意义是 CD 外径越大，在气球初态直径相同的情况下所悬浮的时间越长，流量与浮起的高度也越小。

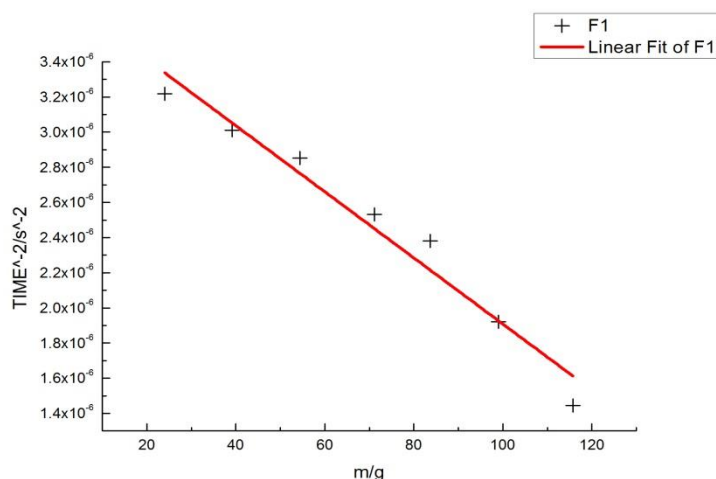


图 7

图 7 探究的是悬浮时间  $t$  与系统质量  $m$  的关系，图中纵轴为悬浮时间  $t$  的平方倒数  $1/t^2$ ，横轴是系统质量  $m$ ，根据拟合结果可以看出悬浮时间  $t$  的平方倒数  $1/t^2$  与系统质量成负线性相关。

在整个 CD 处于低摩擦的时间中可以观察到在斜面上的光斑的位置都是恒定的，直到将要停止低摩擦的状态时才观察到光斑的位置开始移动，这正好与在整个过程中 CD 浮起的高度是一常数，直到气球的直径减小至一常数时内部气压急剧减小，无法维持驱动流体流动所需要的压强差从而 CD 逐渐下沉，无法维持低摩擦状态的理论分析相符。

气球本身的物理性质十分复杂，即使是反复冲放多次的气球，虽然其内部的气压是一个常数，但是随着冲放次数的增多 (大于 80 次后)，该常数会有略微减小的趋势 (大约会逐渐下降 500Pa)，并且，当气球的直径超过 23.5cm 时，气球内部的气压随直径的增加会有上升的趋势，经分析这是因为每次充放气的直径范围不够大，导致气球在直径大于 23.5cm 时呈现出一定的弹性性质。为此，在实验中采用冲放 60 次的气球测五个数据点后就更换气球 (在气球冲放 60 到 65 次时气球的性质较为稳定理想)。

整个实验中可能导致误差的主要因素有：

1. 给定气球初态直径后在上浮后达到稳定之前浮起高度会有微小的波动 (体现在光斑的波动上)，这段时间 (约为 1s) 将会给时间测量带来误差
2. 出气小孔测量的误差
3. 测量时间在判断光斑停止移动时也会产生误差

## 4 理论部分

研究这个问题的理论模型中最重要的是研究 CD 气垫船底部气体的流动情况, 在每一点上气体的微观状态如何 (压强, 流速等)。那么, 我们就需要求解描述气体流动的内维尔-斯托克斯方程, 它的形式如下:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

这是一个较难求解的方程 (只有在极少数的情况中), 当惯性力相较于粘滞阻力而言可以忽略时, 内维尔-斯托克斯方程所描述的流体的流动是在一个低雷诺数情境下的, 这在很多相关领域中都有着应用。

接下来通过计算表明惯性力相较于粘滞阻力而言是可以忽略的。从而使低雷诺数的流动。

由前面所述, 在该问题的情境下雷诺数的计算方法为:

$$R^* = \frac{\text{inertia force}}{\text{viscous force}} = \frac{\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}}{\mu \Delta \vec{v}} \quad (2)$$

在该问题中可以通过 CD 盘的线度  $R_1$  来估算惯性力的大小, 通过整个装置浮起的高度  $h$  来估算粘滞力的大小, 并且利用  $R_1 \gg h$  的条件以及利用气体的平均流速  $U$ , 我们可以得到:

$$R^* = \frac{\rho U^2 / R_1}{\mu U / h^2} = \frac{U R_1}{\nu} \left( \frac{h}{R_1} \right)^2 \quad (3)$$

该式中已用  $\nu = \mu / \rho$  来代表运动粘度 (kinematic viscosity), 在室温和大气压的情况下, 应有  $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ 。根据计算可得, 雷诺数  $R^*$  的值约为 0.72, 当  $h$  趋向于 0 时, 雷诺数也趋向于 0。并且由于气体在稳定是已经是定常流动的状态, 因此  $\partial \vec{v} / \partial t$  这一项为零。那么此时, 内维尔-斯托克斯方程就被近似为了斯托克斯方程。

首先给出斯托克斯方程的形式:

$$-\nabla P + \mu \Delta \vec{v} = 0 \quad (4)$$

并且再将气体近似呈不可压缩流体, 则有

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5)$$

将斯托克斯方程在柱坐标系中写出, 并利用近似条件, 可以推得

$$\frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} = \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \vec{e}_r \quad (6)$$

由于气体流动分布的对称性, 速度只有径向分量, 等式左边前后两项均为 0, 故可以解得:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} z^2 + Az + B \quad (7)$$

利用气体流动的边界条件  $v_r(z=0) = 0$  和  $v_r(z=h) = 0$ , 我们可以解得:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} (z^2 - hz) \quad (8)$$

8 式就是气体速度随半径及高度的分布。

既然得出了气体的速度分布, 那么就可以用它来求出气体的流量是多少, 以下将通过积分的形式求其的流量  $Q$ , 有:

$$Q = \iint \vec{v}_r \cdot d\vec{S} \quad (9)$$

对其积分后可得结果为：

$$Q = -\frac{\pi r}{6\mu} \frac{\partial P}{\partial r} h^3 \quad (10)$$

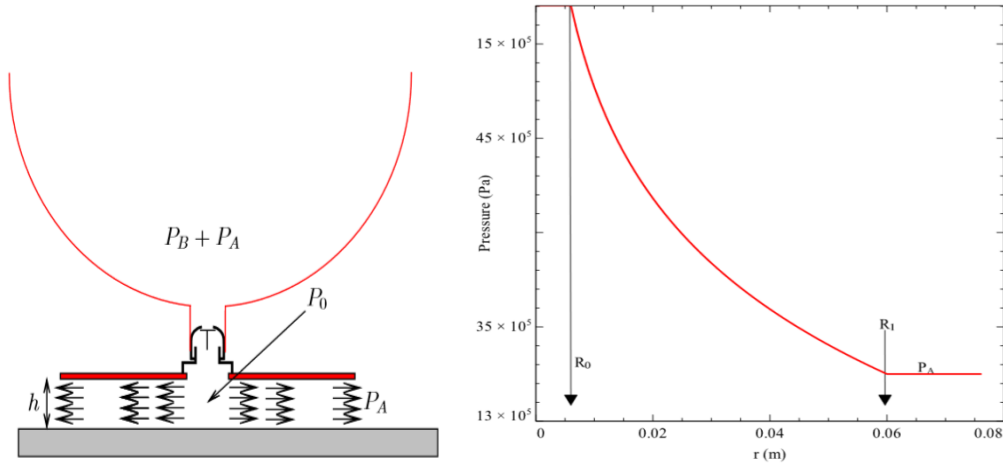
把  $Q$  作为常数，将其写成如下形式：

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3} \frac{1}{r} \quad (11)$$

对其积分，并考虑到在半径  $r = R_1$  处（即 CD 外半径处）压强  $P = P_A$ （为大气压），我们就可以得到压强随半径的分布表达式：

$$P(r) = P_A + \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) \quad (12)$$

在这里的压强分布由于有对称性，其只是  $r$  的函数，与高度和角度无关。



有了压强关于半径的表达式后，我们就可以通过 CD 上下表面的压强差通过积分来计算其所受到的浮力大小，并且在计算过程中我们认为 CD 底部靠近中央处距其为  $R_0$  的范围内压强是一个恒定的常数，因为这个  $R_0$  是一个较小的范围，即为：

$\frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$ ，那么就可以得到垫升力的表达式：

$$F = \int_{R_0}^{R_1} \delta P(r) 2\pi r dr + \pi R^2 \delta P(R_0) \quad (13)$$

其中  $\delta P(r) = P(r) - P_A$  为该点处 CD 盘底部气压与大气压的差值，将前面的式子代入之后可以算得总垫升力为：

$$F = \frac{3\mu Q}{h^3} (R_1^2 - R_0^2) \quad (14)$$

在该式中的  $R_0$  是一个较小的常数，当气体逐渐形成稳定的层流时可以达到，约为 2.5cm 左右。

通过该式可以看出，在系统质量不发生变化的情况下，处于低摩擦时气体流出光盘的流量与系统垫升高度 3 次方的比值应是一个常数。

那么接下来计算悬浮时间的理论公式，在计算过程中用到了气球中的气压是一常数（不随直径的改变而改变）这一条件，这是之前实验所测量得到的结果。既然气球中的气压是一常数，那么在 CD 盘底部形成稳定的层流之后（在  $R_0$  之

外), 在悬浮过程中的每一时刻气体流动的状态应该都是相同的。整个系统应该处在如下的状态中:

1. 垫升的高度恒定并且唯一, 不随时间变化
2. CD 底部的压强分布不随时间变化
3. CD 底部气体在层流处的流速分布不随时间变化
4. 整个过程中的流量不随时间变化

只要证明了第一点, 根据前面的方程推导对于其它 3 点是显然的。

对第一点, 用反证法, 假设当  $h$  升高了一点以后 CD 整体依然可以达到一个稳定的状态, 那么由于高度提升, 流量也会相应的增大, 并且在半径相同处的雷诺数也相应增大, 那么 CD 底部靠近中央处的恒定压强区就会变大, 即  $R_0$  会增大, 由于粘滞力的作用, 需要维持 CD 底部  $R_0$  到  $R_1$  处气体的稳定流动必须提供一个压强差, 由于  $R_0$  和流量的增大, 相应的, 维持流动所需的压强也相应增大, 那么在恒定压强区的压强也相应增大, 这样一来反而会得出因为气球与出气孔处的压强差减小而得出流量减小的矛盾结论。因此当系统的质量以及 CD 盘的尺寸被确定时, 浮起的高度有且仅有一个值。

既然流量不随时间变化, 那么从流量的角度出发, 如果能计算出流量的大小, 并且知道了气球内气体的总量, 就可以算出低摩擦持续时间的长短 (在这里补充一下: 当气球的直径不断减小到某一常数时 (通过测量该量约为 5-6cm), 这时气球再放气, 内部的气压会急剧减小, 这时虽然也能将 CD 垫升, 但是持续的时间非常短, 实验中测得约为 1-2 秒, 因此在时间的理论分析中可以将这一项作为常数加入总的时间表达式中)

由此, 来推导低摩擦持续时间与各种相关参量的定量表达式, 方便起见, 将气球的直径缩小到常数的数值记为  $D_0$ , 所推导的低摩擦持续时间就是气球从初始直径  $D$  减小到  $D_0$  所经历的时间。

在 CD 底部, 由于有着流体粘滞力的作用, 因此在 CD 底部伯努利方程不再成立 (见图中的 A 区), 但对于粘滞流体的动力学方程来说, 当粘滞系数较小且边界较大时, 边界层的厚度就很小, 从而流动的绝大部分是在边界层以外, 与无粘滞的流动的差别很小, 可以近似成理想流体来处理。在该问题中, 由于在气球内部的边界较大, 因此可将气球中气体的流动近似处理成理想流体的流动, 满足伯努利方程的成立条件, 于是可以取一从气球内部到出气孔附近的流管, 对其写出伯努利方程, 有:

$$P_2 = \frac{1}{2} \rho v^2 + P_1 \quad (15)$$

在 15 式中  $P_1$  为 CD 底部小孔处的压强,  $P_2$  为气球中的压强,  $v$  为气体在接近小孔处的速率, 即为在小孔处喷出的速率。那么对于气体的流量  $Q$ , 则有:

$$Q = vs \quad (16)$$

式中  $s$  为出气孔的截面积。

既然流量在整个悬浮过程中不变, 因此可以推得气球体积变化的微分关系:

$$\frac{dv}{dt} = -Q \quad (17)$$

将流量的表达式算出, 带入其中可以得到:

$$\frac{dv}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_2 - P_1} s dt \quad (18)$$

求解该微分方程并带入初态条件后可以得到气球体积  $V$  与时间  $t$  的关系:

$$V = V_0 - \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_2 - P_1} st \quad (19)$$

式中 $V_0$ 为 CD 浮起前气球的初态体积

将 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ 的条件带入, (D 为气球的直径)有:

$$\frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{1}{6}\pi D_0^3 - \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_2 - P_1} st \quad (20)$$

整理可得:

$$t = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{\rho}{2s}} \frac{1}{\sqrt{P_2 - P_1}} (D^3 - D_0^3) \quad (21)$$

由前面的推导, 对式中的 $P_1$ , 应有:

$$P_1 = P_A + \frac{6\mu Q}{\pi h^3} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) \quad (22)$$

通过 21 式可以很清晰的看出相关参量与悬浮时间  $t$  的函数关系, 即  $t$  与出气孔的截面积成反比, 与气球初态直径的 3 次方成正比, 通过进一步的推导还可以还可以得到:

1. 时间平方的倒数与系统的质量呈负线性相关。
- 即

$$\frac{1}{t^2} = Am + B \quad (23)$$

式中 A 小于零。

2. 较大的 CD 盘  $t-D^3$  图的斜率小些。

## 5 结论

通过实验结果得到的结论是

- 1) 孔径: 维持低摩擦状态的时间  $t$  与放气孔孔径的平方近似成反比。
- 2) 气球直径:  $t$  与气球直径的三次方近似成正比。
- 3) CD 盘大小: 较大的 CD 盘  $t-D^3$  图的斜率小些。
- 4) 悬浮时间的平方倒数与系统质量成负线性相关。
- 5) 实验结论与理论推导符合较好。

## 参考文献

- 【1】梁昆淼. 理论力学【M】施毅. 第四版. 北京. 高等教育出版社, 2009. 7
- 【2】金尚年 理论力学【M】马永利 第二版. 北京. 高等教育出版社. 2002. 7
- 【3】C. de Izarra and G. de Izarra. Stokes equation in a toy CD hovercraft. Eur. J. Phys. 32, 89-99 (2011),
- 【4】. B. Gates. A crude theory of hovercraft performance at zero tilt (Min. Aviation C.P. No. 608, 1962),