非线性电路的实验研究

罗页，乐永康
复旦大学物理系

2009年6月17日

目录

1 非线性电路简介 **2**

2 非线性电路中元件的参数测量 **2**
2.1 测量电容电感 . . . 2
2.1.1 CR、LR串联谐振测量 . . . 2
2.1.2 精确测量电容 . . . 2
2.1.3 精确测量带铁芯的电感 . . . 3
2.2 非线性负阻 . . . 4
2.2.1 非线性负阻简介 . . . 4
2.2.2 方法一、外部信号扫描法 . . . 4
2.2.3 方法二、内置信号扫描法 . . . 5
2.2.4 ±15V电源对非线性负阻的影响 . . . 6

3 观察G分岔与C分岔 **7**
3.1 G分岔实验现象 . . . 7
3.2 C分岔与G分岔的异同 . . . 7

4 混沌演化与非线性负阻的工作状态 **8**

5 电路理论 **9**
5.1 线性代数回顾 . . . 9
5.2 分析蔡氏电路 . . . 10
5.2.1 中间区$|U_1| < E$ . . . 10
5.2.2 上下区$|U_1| > E$ . . . 10
5.3 理论分析G分岔演化过程 . . . 11

6 结束语 **11**

摘要

本实验对蔡氏电路的各个元件进行了精确测量，尤其是设计了测量非线性负阻新方法，同时也观察了G分岔和C分岔两种混沌演化，并进行了比较。此外，本实验对非线性负阻与混沌演化之间的关系进行了实验观察，并进行了理论分析。

关键词：混沌、蔡氏电路、非线性负阻测量方法

1　非线性电路简介

如果要用一个由普通元件（电阻、电感、电容等）构成的自治电路来产生混沌现象，必须满足一下三个条件[1]：

1. 至少有一个非线性元件。

2. 至少有一个用于耗散能量的电阻。

3. 至少有三个存储能量的元件。

蔡氏电路（Chua's circuit[1]）如图1，是一个符合上述条件的最简洁非线性电路，由华裔家蔡绍棠教授于1983年提出并实现。该电路通过内部参数的变化，能产生并直观地演示混沌现象。

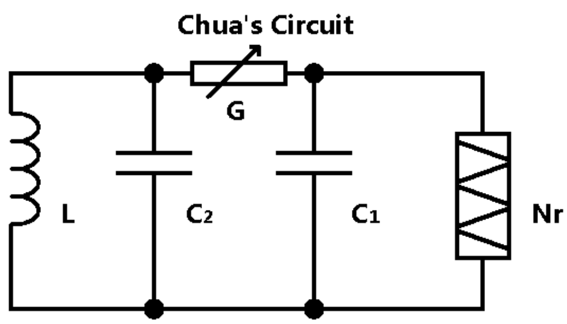

图 1: 蔡氏电路

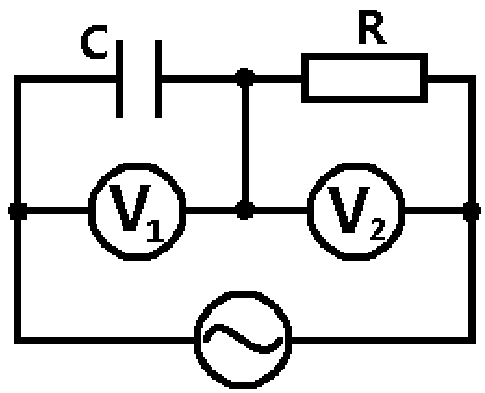

图 2: 串联谐振

2　非线性电路中元件的参数测量

为了实现对电路进行定量分析、数值模拟，需要精确测量电路中各个元件的参数。本电路中涉及到主要元件有电容C_1和C_2、电感L以及非线性负阻Nr，下面将一一列举测量。

2.1　测量电容电感

2.1.1　CR、LR串联谐振测量

CR或LR串联谐振能比较便捷地测量电容电感，是教学中经常使用的方法，其电路图如图2。

根据我们的蔡氏电路运行频率在2.7kHz附近，我们采用该频率的正弦交流信号测量，得到$L = 22.1\text{mH}$、$C_1 = 10.3\text{nF}$、$C_2 = 103\text{nF}$。

2.1.2　精确测量电容

本实验采用Agilent 4284A LCR测量仪对电容进行恒定电流的频率扫描（图3、图5）和恒定频率的电流扫描（图4、图6）两种测量，以获取它们在本实验电路中的工作参数。

电路中的电容C_1为标号为103，即10nF；C_2为标号为104，即100nF。精确测量得到$C_1 = 10.8\text{nF}$，$C_2 = 104\text{nF}$。

在本实验电路运行的频率区段和电流区段，电容值的变化都很小。虽然损耗电阻变化绝对数值较大，但是相对于C_1、C_2的容抗，在0.3%，其影响也完全可以忽略。

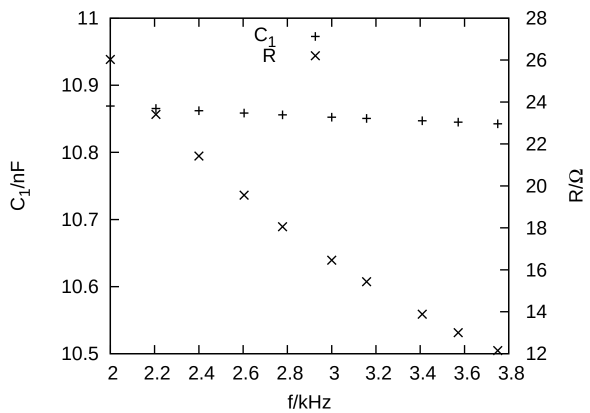

图 3: 恒定1mA电流，C_1和R随着频率的变化

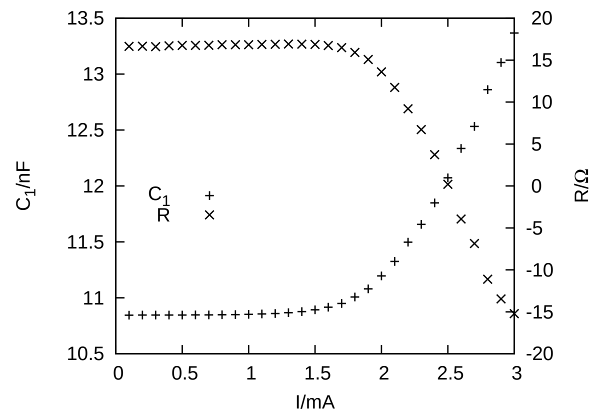

图 4: 恒定3kHz，C_1和R随着电流的变化

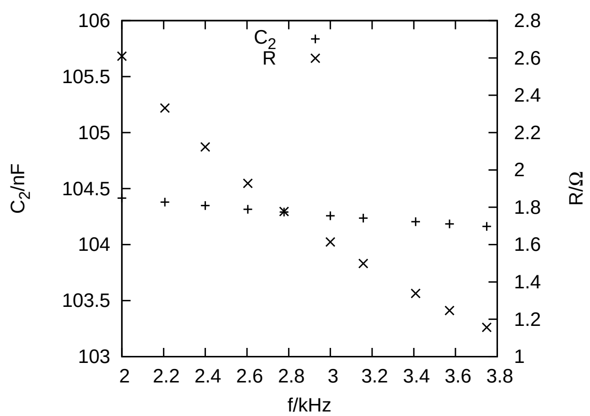

图 5: 恒定1mA电流，C_2和R随着频率的变化

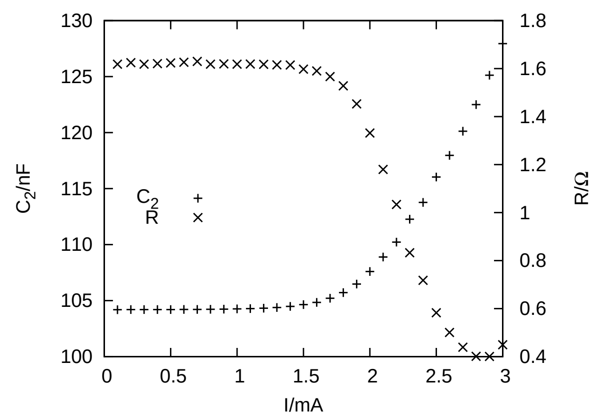

图 6: 恒定3kHz，C_2和R随着电流的变化

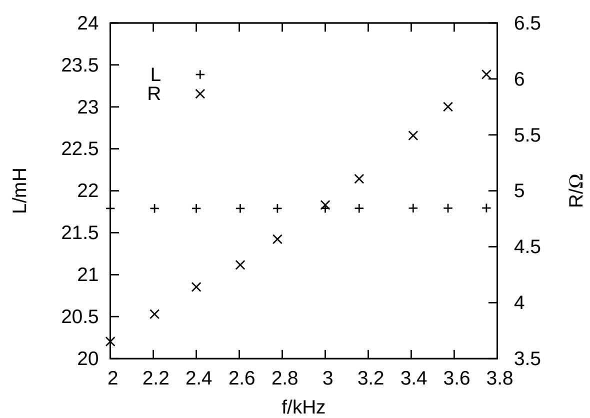

图 7: 恒定1mA电流，L和R随着频率的变化

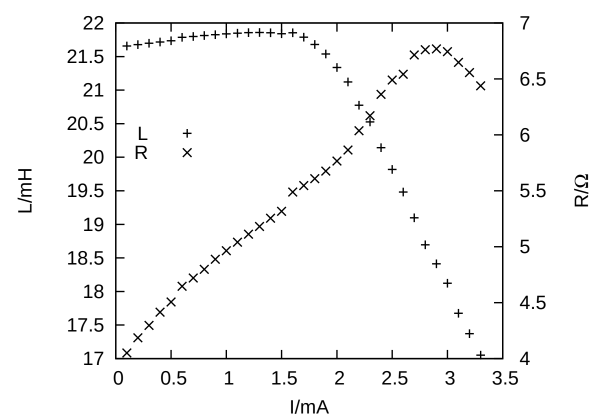

图 8: 恒定3kHz，L和R随着电流的变化

2.1.3 精确测量带铁芯的电感

电路中的电容为标称为20mH的电感，同样采用LCR测量仪测量，对其进行恒定电流的频率扫描和恒定频率的电流扫描，如图7和图8。

电感峰值$L_{max} = 21.8\text{mH}$。随电流，电感值缓升速降、损耗电阻先升后降。随频率，电感值和损耗电阻变化都不大。损耗电阻相对于感抗最大为1.6%可以忽略其影响。

电感值在混沌电路运行中波动比较大，如果直接将其取为一定值进行数值模拟，得到的混沌随G演化的区段会和真实的实验结果有一定偏差，但是不影响总体的演化趋势。

2.2 非线性负阻

2.2.1 非线性负阻简介

负阻不同与普通的电阻，其I-V特性曲线有负斜率区。本实验中使用的非线性负阻则是一种I-V特性曲线分段线性的负阻[2]，其理想的I-V特性曲线为图10，其结构如图9，由两个运算放大器配合6个电阻输入$\pm15V$电源构成。本电路中使用双运算放大器集成电路FL353N，电阻阻值如下：

$$R_1 = 3.3k\Omega$$
$$R_2 = R_3 = 22k\Omega$$
$$R_4 = 2.2k\Omega$$
$$R_5 = R_6 = 220\Omega$$

特性曲线上的斜率满足：

$$G_a = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4}$$
$$G_b = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}$$

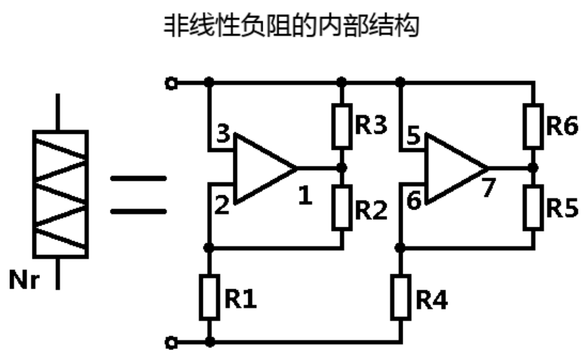

图 9: 非线性负阻

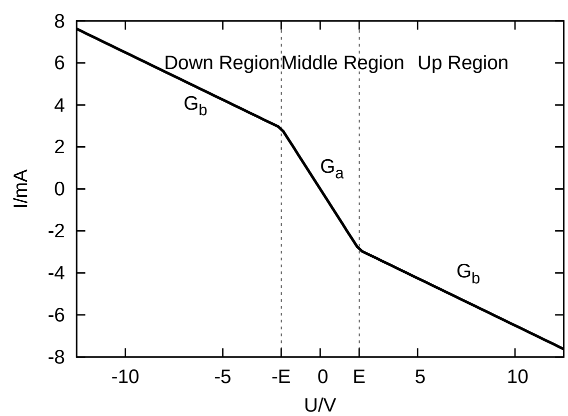

图 10: 理想非线性负阻的I-V特性

2.2.2 方法一、外部信号扫描法

实验中使用1kΩ定值电阻、示波器和信号发生器测量I-V特性，电路图如图14，示波器接李萨如图形，X接U_{Nr}，Y接U_R。由于Y轴数据实为定值电阻上的电压U_R，实际通过非线性负阻的电流应为$I = -U_R/R$，所以文中所有的I－V特性示波器截屏全部打开了示波器Y方向的反相功能。

我们在33Hz、500Hz、2kHz三个频率下分别测量了非线性负阻的I-V特性，数字示波器截屏处理后如图11、图12、图13。不同与理想的非线性负阻（图10）负阻区无限延伸，实测数据在负阻区的两侧还是存在正电阻区域，这是由于毕竟我们的负阻是由±15V电源供电，使得负阻输出的电压有限，超过限值之后，整个负阻就表现出普通电阻的性质了。好在正阻区基本处于电路工作时的电压范围之外，所以可以认为其影响极小。此外从三张图中可以看到，上升沿和下降沿的分裂随着频率的升高而增大。这是由于集成电路FL353N中的数字放大器自身的延迟导致的，频率越高振荡范围越大这一影响越明显。在我们的蔡氏电路中，信号的频率一般在2.7kHz，比2kHz更高，其I-V特性曲线的上升下降分裂应该会更加剧烈，这样我们就很难把它当作理想的非线性负阻（图10，上升下降沿不区分）来使用了，难道真的是这样吗？

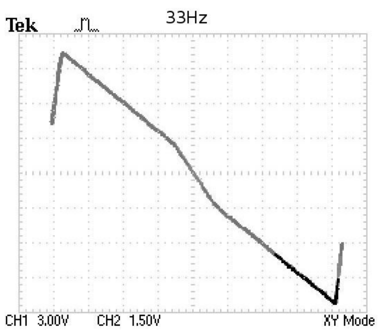

图 11: 33Hz扫描I-V特性

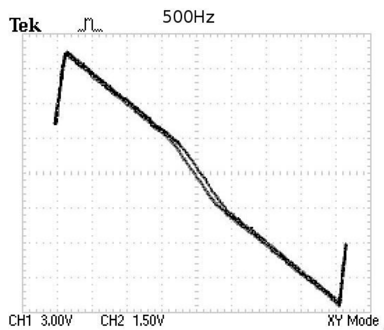

图 12: 500Hz扫描I-V特性

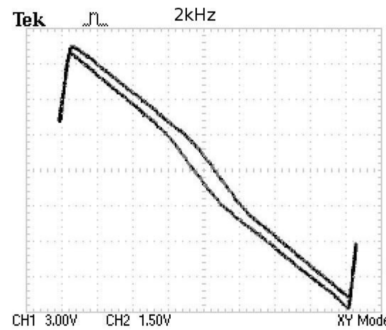

图 13: 2kHz扫描I-V特性

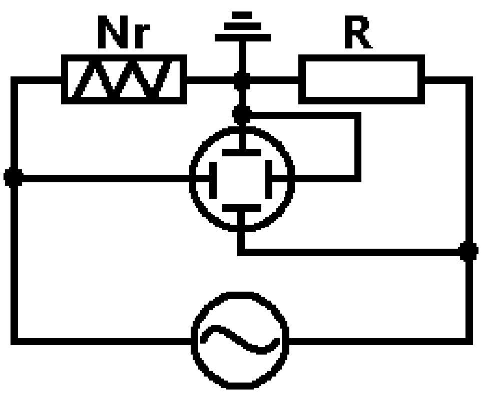

图 14: 外部信号扫描电路图

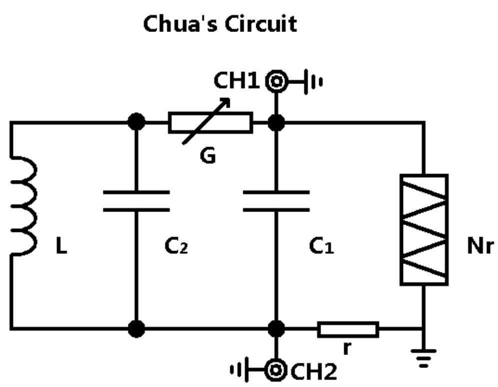

图 15: 内置信号扫描电路图

2.2.3 方法二、内置信号扫描法

我们采用了新的方法对非线性负阻重新进行测量，如图15。新方法只需要一个R=100Ω的电阻和示波器，利用蔡氏电路自身的振荡信号代替信号发生器，不仅所需仪器少，还更真实地反应非线性负阻在混沌电路中工作状态下的I-V特性。

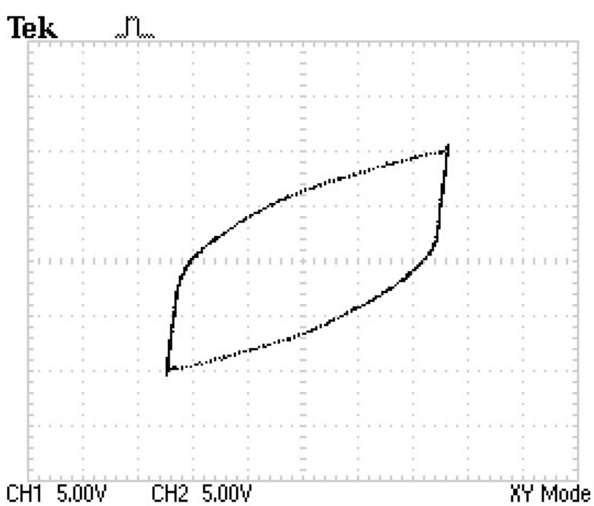

图 16: 扫描信号1相图

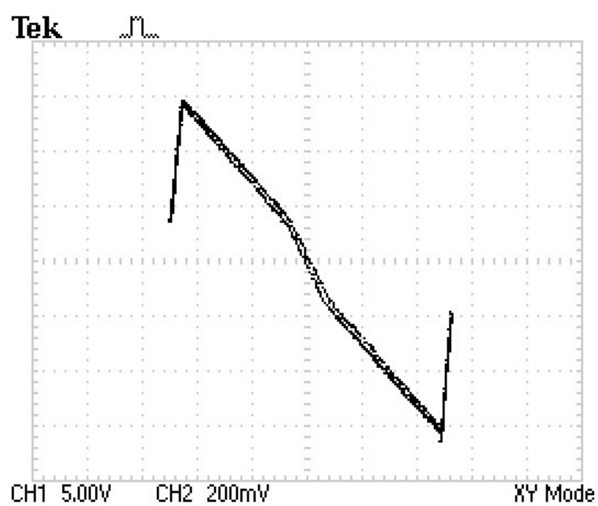

图 17: 扫描信号1测得的I-V特性

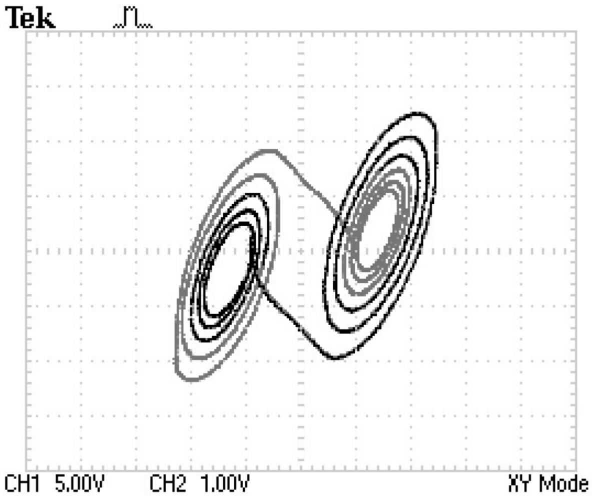

图 18: 扫描信号2相图

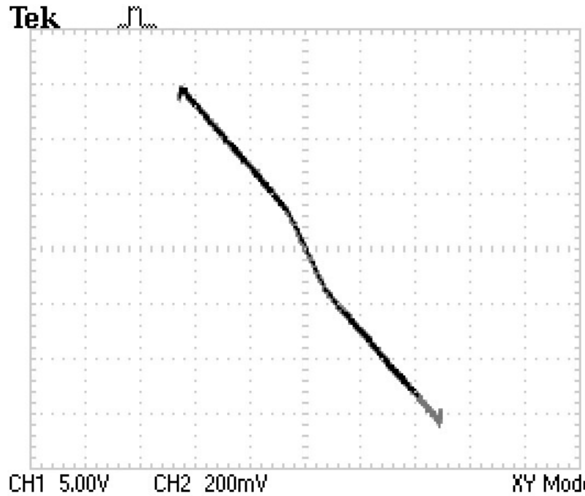

图 19: 扫描信号2测得的I-V特性

采用相图为图16的混沌信号，测得I-V特性图17中如方法二中的结果，同样可以看到分裂，但是程度小得多，这是由于改信号并不能用三角波或者正弦波等效造成。采用相图为图18的混沌信号，测得I-V特性图19中的上升沿下降沿分裂很少，可以认为重合。这是由于该信号和同周期正弦或三角波信号相比，大部分时间波动的幅度要小得多。我们在做数值模拟时关心的区域，电路中信号的特征和扫描信号二比较相似，所以完全可以放心地把非线性负阻看成是理想的。

2.2.4 ±15V电源对非线性负阻的影响

在+15V一端插入电阻R=500Ω，得到图20所示的非线性负阻。用万用表测得实际电源为-14.31V，+12.01V，在示波器上可看到不对称的双吸引子，如图21。

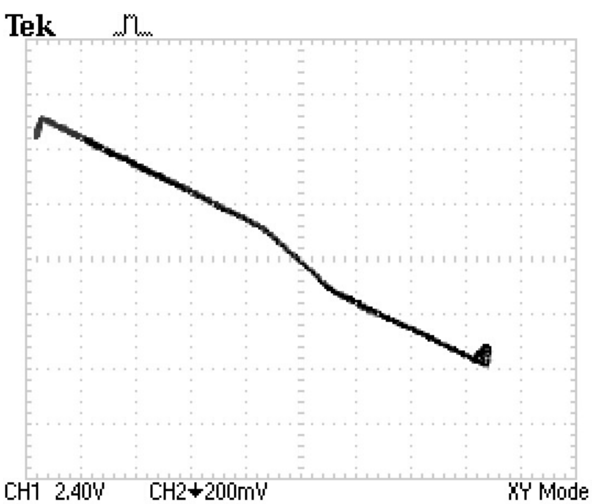

图 20: 不对称非线性负阻

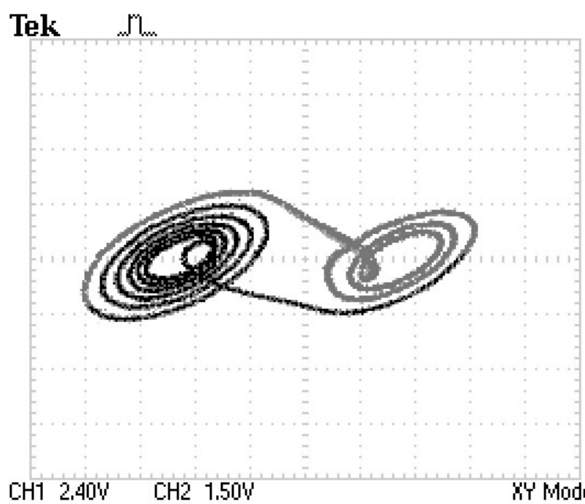

图 21: 不对称吸引子

3 观察G分岔与C分岔

3.1 G分岔实验现象

采用图22所示电路图，逐渐增大可调电阻1/G，示波器上$U_2 - U_1$相图变化如图23，经历了初始状态、双吸引子、奇异吸引子、阵发混沌、三周期、四周期、二周期、单周期八个状态，最后收缩到一个不动点。

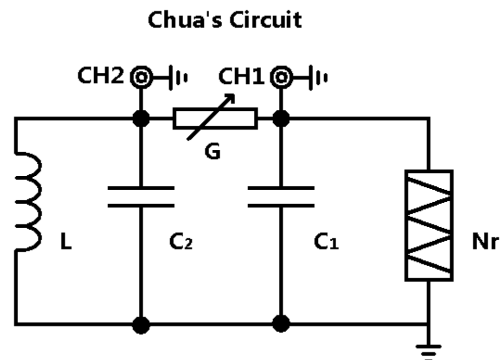

图 22: 观察G分岔电路图

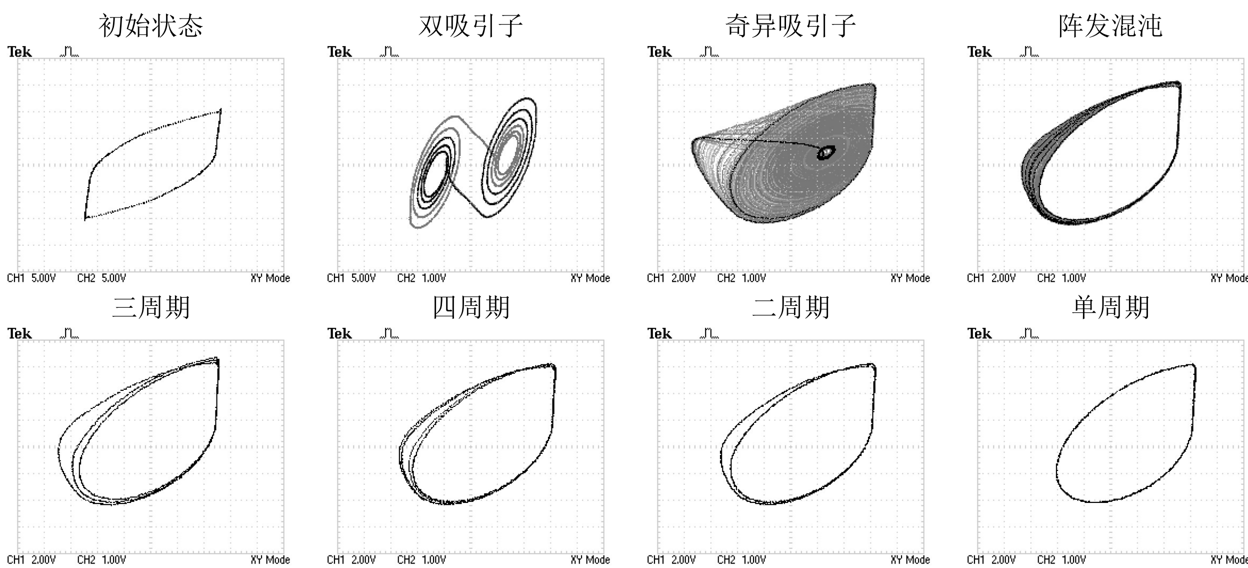

图 23: 逐渐增大1/G相图变化

3.2 C分岔与G分岔的异同

实验中将定值电容C_1，更换为可变电容+电容箱组合，使得C_1大范围可调。逐渐增大可调电容C_1的数值，示波器上$U_2 - U_1$相图也同样经历了如调节G相似的变化过程（图23），但是略有区别。

比较图24和图25，我们看到在调节C_1时，每个吸引子的幅度基本没有发生变化，而调节G过程中每个吸引子的幅度都在最1/G增大而增大。

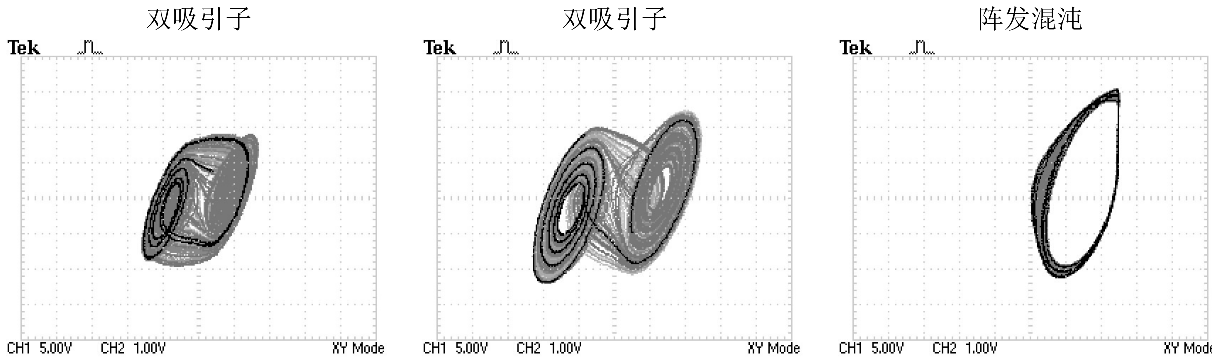

图 24: 逐渐增大可调电阻1/G相图变化

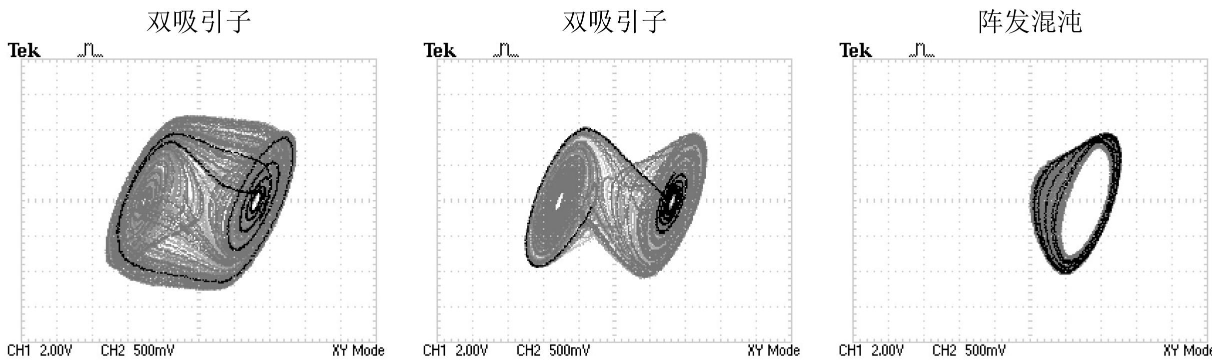

图 25: 逐渐增大可调电容C_1相图变化

4 混沌演化与非线性负阻的工作状态

由于整个电路中其它元件都为普通的线性元件，故非线性负阻是整个系统产生混沌现象的关键，所以为了更好的了解非线性负阻对电路的影响，我们做了这部分实验。如图26，把CH1、CH2接入示波器1，CH1、CH3示波器2，可在同时观察相图和非线性负阻的工作状况。随着1/G的逐渐增大，可以在两个示波器上看到混沌演化与非线性负阻的密切联系。

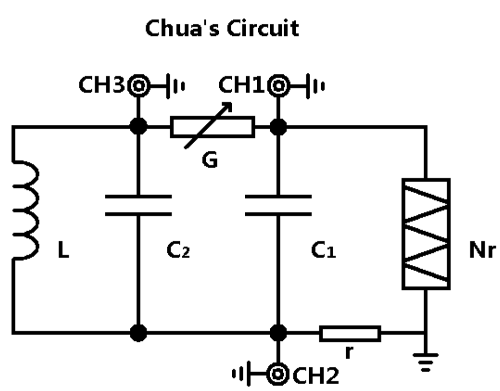

图 26: 混沌演化与非线性负阻的工作状态关系实验电路图

图27中可以看到，当相图上出现单吸引子的时候，非线性负阻工作在整个上区并且必须在左端点进入中

区，这样才能形成稳定的单周期图样；随着非线性负阻的工作区段向左延伸，相图由单周期展宽为多周期直到出现最极端的奇异吸引子，此时整个上区和中区都被占满；当非线性负阻工作区段继续向左进入下区，此时起，我们便能看到双吸引子甚至初始状态了。

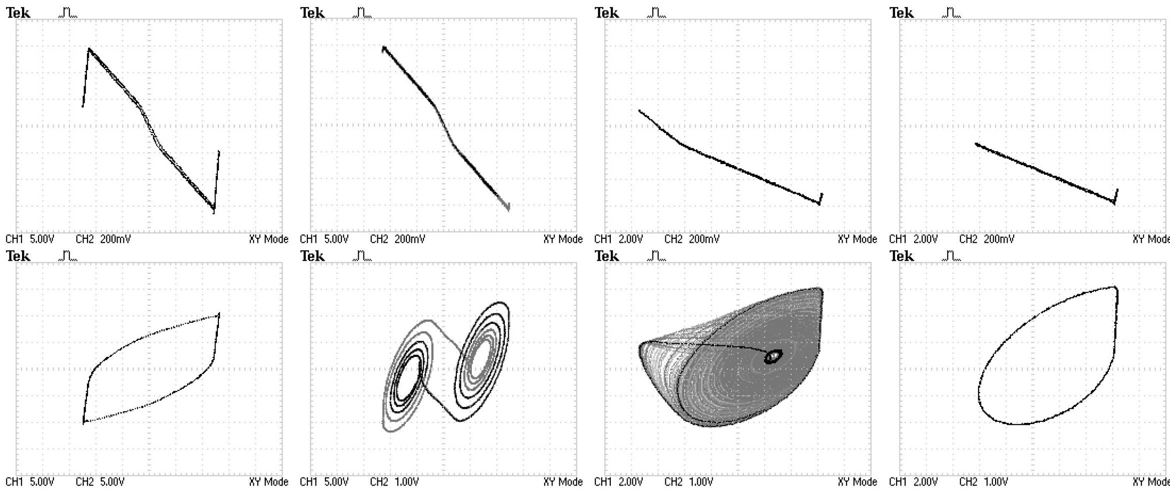

图 27: 混沌演化与非线性负阻的工作状态关系

5 电路理论

蔡氏电路的方程[3]：

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2\dfrac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -U_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中g为非线性负阻的I-V特性函数，如图。该特性的解析表达形式为：

$$g(U) = G_bU + \frac{G_b - G_a}{2}(|U - E| - |U + E|) \tag{2}$$

5.1 线性代数回顾

对于如下常微分方程：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \tag{3}$$

不动点满足：

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = 0 \tag{4}$$

即：

$$\mathbf{X}_Q = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{5}$$

如果$\mathbf{A}^{-1}$存在，我们可以在不动点附近把非线性方程线性化：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}\mathbf{x}(t) \tag{6}$$

这里J为将A线性化以后得到的雅可比矩阵。由于蔡氏电路的I-V特性g分段线性，故这里**J**即为不同区段相应的**A**即可。

线性化方程的本征值s满足：

$$|s\mathbf{I} - J| = 0 \tag{7}$$

如果**J**有三个不同的本征值λ_1、λ_2、λ_3，对应的本征矢量为$\vec{\xi_1}$、$\vec{\xi_2}$、$\vec{\xi_3}$，其解为：

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{\xi_1} + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{\xi_2} + c_3 e^{\lambda_3 t}\vec{\xi_3} \tag{8}$$

若**J**恰有一个实数本征值γ，一对共轭的本征值$\sigma \pm i\omega$，其解为 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{x}_c(t)$，其中

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_r(t) = C_r e^{\gamma t}\vec{\xi_\gamma} \\ &\mathbf{x}_c(t) = 2C_c e^{\sigma t}[cos(\omega t + \phi_c)\vec{\eta_r} - sin(\omega t + \phi_c)\vec{\eta_i}] \end{aligned} \tag{9}$$

式中，$\vec{\eta_r}$和$\vec{\eta_i}$是共轭本征矢量的实部和虚部。ϕ_c、C_r、C_c由初始状态决定。

综上，方程的解可以写成：

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_Q + \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{x}_c(t) \tag{10}$$

我们知道在一维情况下，$\dot{x}(t) = ax$。当$a < 0$，解随着时间是收敛的，而当$a > 0$，解是发散的。同理，$\mathbf{x}_r$当$\gamma < 0$解收敛；$\mathbf{x}_c$当$\sigma < 0$解收敛。

我们把实本征矢量标记为Er，把$\vec{\eta_r}$和$\vec{\eta_i}$张成的平面标记为Ec。由于Er与Ec线性独立，把任意**X**投影后，其分量在各自空间内演化，所以$\mathbf{X}(t)$不会穿越Ec平面。 Ec平面可由平衡点$\mathbf{X}_Q$和其法线方向确定。

5.2 分析蔡氏电路

有了上面的数学工具，我们就可以动手分析蔡氏电路的特性。非线性负阻的I-V特性曲线由三段折线构成，根据U_1的范围，可以分为$U_1 > E$、$U_1 < -E$、$|U_1| < E$三个区域考虑，而从对称性，可以将前两个区域合并处理。

5.2.1 中间区$|U_1| < E$

在中间区域$|U_1| < E$[2]：

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - G_a U_1 \\ C_2\dfrac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -U_2 \end{cases} \tag{11}$$

方程线性化，得到雅可比矩阵：

$$\mathbf{J_0} = \begin{bmatrix} -\dfrac{G+G_a}{C_1} & \dfrac{G}{C_1} & 0 \\ \dfrac{G}{C_2} & -\dfrac{G}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ 0 & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

不动点恰在原点，$P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\gamma > 0$，$\sigma < 0$。在E_c平面的分量螺旋向原点收缩，E_r方向分量离开原点。

5.2.2 上下区$|U_1| > E$

在上下区域$|U_1| > E$[2]：

$$\begin{cases} C_1\dfrac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - G_b U_1 - I' \\ C_2\dfrac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \\ L\dfrac{di_L}{dt} = -U_2 \end{cases} \tag{13}$$

在上区，$I'_{up}=(G_a-G_b)E$；在下区，$I'_{down}=(G_b-G_a)E$。

方程线性化，得到雅可比矩阵：

$$\mathbf{J}_{\pm}=\begin{bmatrix} -\frac{G+G_a}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\ \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

不动点：$P_{+}=\begin{bmatrix} \frac{(G_b-G_a)E}{G+G_b} \\ 0 \\ \frac{G(G_a-G_b)E}{G+G_b} \end{bmatrix}$，$P_{-}=\begin{bmatrix} \frac{(G_a-G_b)E}{G+G_b} \\ 0 \\ \frac{G(G_b-G_a)E}{G+G_b} \end{bmatrix}$

当满足$\frac{(G_a-G_b)E}{G+Gb}<-E$时，即$G_a<-G<G_b$如图28，$P_-$和$P_+$在两侧区域内，否则处于中间区域，为虚不动点。

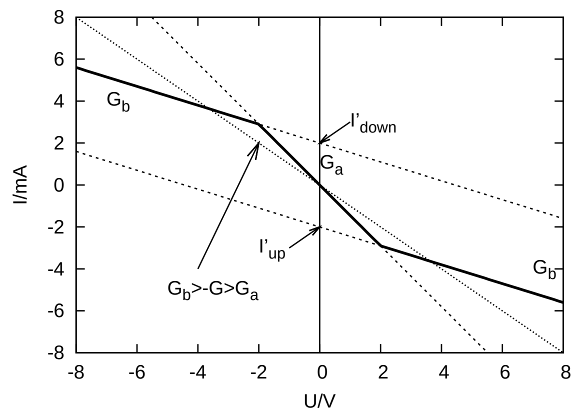

图 28: 存在不动点对G的要求

当$\gamma<0$，$\sigma>0$，在E_c平面的分量螺旋离开原点，E_r方向分量收缩到原点，所以P为不稳定不动点。当$\gamma<0$，$\sigma<0$，在E_c平面的分量螺旋收缩到原点，E_r方向分量收缩到原点，所以P为稳定不动点。

5.3 理论分析G分岔演化过程

1. 当R(1/G)大于2045Ω时，$P_{\pm}$为稳定不动点，而原点不稳定。所以在$P_{\pm}$之一看到亮斑。

2. 当R逐渐减小，在$1976\sim2045\Omega$范围，$P_{\pm}$变得不稳定，轨迹螺旋进入中间区，由于中间区的原点不稳定，又把轨迹推回进入的区域，从而形成一倍周期、二倍周期、阵发混沌等。始终无法穿越中间区的E_c平面。

3. 当R再减小，在$1638\sim1976\Omega$范围，由于上区进入中间区的螺旋衰减还来得及衰减就进入下区，之后从下区穿>越中间区进入上区，从而形成双吸引子。

6 结束语

本实验通过对电路元件的参数测量，尤其是对非线性负阻的细致测量，了解了蔡氏电路的基本特性，并进行了G分岔和C分岔的观察。在这个基础之上，本实验设计了新的电路用于测量非线性负阻、观察非线性负阻工作区段和混沌演化的关系，可用于测量、演示。此外，我们通过理论方法研究蔡氏电路的工作机理，对实验现象有了更进一步的认识。

参考文献

[1] *Chua's circuit*. http://en.wikipedia.org/wiki/Chua's_circuit.

[2] M. P. Kennedy. Three steps to chaos part ii: A chua's circuit primer. *IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUIT AND SYSTEMS*, 40(10), 1993.

[3] MOTOMASA KOMURO. The double scroll. *IEEE TRANSACTION ON CIRCUITS AND SYSTEM*, CAS-32(8), 1985.