

蔡氏电路和混沌现象的研究

(吕辰 07300720357 光信息科学与技术)

[Abstract]

Chaos usually means something lacking order or predictability. In the field of math and science, it always means a state of confusion.

In order to observe Chaos, we can use a nonlinear circuit. In this experiment, Chua's Circuit would be a good choice as it is easy to be made and its phenomenon is easy to be observed.

The main two points in this experiment are observing Chaos phenomenon and measure the nonlinear negative resistance's (or Nr) I-V features.

As the results of the experiment, the Chaos pictures would be seen from the oscilloscope and I-V data of Nr would be recorded. Then let the pictures to be corresponded with the solutions of Chua's equations under several different conditions. The other work is to deal with the data of Nr 's I-V feature.

According to this two works, it would be more clear that how the circuit works and what Chaos about.

引言

非线性是在自然界广泛存在的自然规律。非线性问题包含了多个分支，混沌便是其中之一。混沌现象在生活中广泛存在。

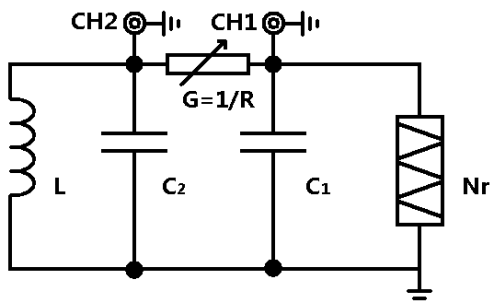
采用非线性电路是直观地演示混沌现象一个非常好的选择。能产生混沌现象的自治电路至少要满足三个条件：(1) 有一个非线性元件 (2) 有一个用于耗散能量的电阻 (3) 有三个存储能量的元件。蔡氏电路即满足上述条件。蔡氏电路的结构简单、现象清晰，所以它经常用于观察混沌现象的教学实验。

在实验中，先连接好蔡氏电路，再测量其中的电压电流，并据此分析混沌现象和其中元件的特性参数。

[关键字] 蔡氏电路，非线性，负阻，混沌

[实验原理]

1、蔡氏电路



蔡氏电路 (图 1-1)

蔡氏电路的主要元件有可变电阻 R (计算时常用其电导 $G=1/R$ 作参数)、电容 $C1$ 和 $C2$ 、电感 L 以及非线性负阻 Nr 。

根据基尔霍夫节点电流法，可得到以上电路的状态方程组：

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \dots\dots ① \\ L \frac{dI_L}{dt} = -U_2 \end{cases}$$

方程组中， U_1 为电容 C_1 两端的电压， U_2 为电容 C_2 两端的电压， I_L 为通过电感 L 的电流， G 是可变电阻 R 的电导。 $g(U)$ 为非线性负阻的 I-V 特性函数。

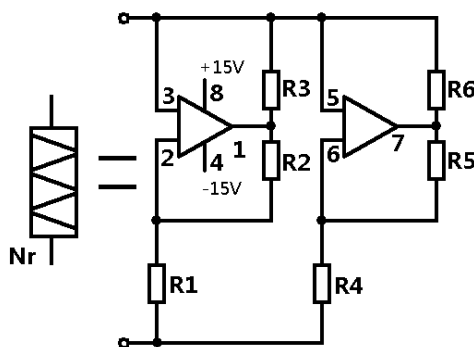
U_1 、 U_2 、 I_L 构成一个三维的状态空间，称为相空间。相空间的状态点为 $X=[U_1 \ U_2 \ I_L]^T$ 。

由于示波器是双踪示波器，所以实验中观察到的图形为 X-Y 模式（即李萨如图形），相当于三维轨迹在平面的投影。因此在观察时选择 U_1 - U_2 平面观察。

2、非线性负阻 R_{Nr}

蔡氏电路中，非线性负阻是使其产生混沌现象的主要元件。电路的混沌现象和非线性负阻的特性密切相关。

非线性负阻的结构：

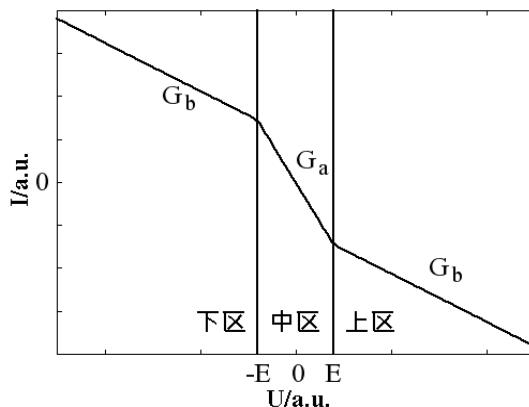


非线性负阻（图 2-1）

非线性负阻的 I-V 特性函数表达式为：

$$g(U) = G_b U + \frac{G_b - G_a}{2} (|U - E| - |U + E|) \dots\dots ②$$

由上式可得， $g(U)$ 大致上可以根据 U 分成三个区间： U 的取值小于 $-E$ 、 $-E$ 与 E 之间、大于 E 。并且在三个区间内为线性。因此可以根据上式画出其对应的理想 I-V 关系图像：



非线性负阻的理想 I-V 关系图像（图 2-2）

[实验内容]

1、测量非线性负阻的 I-V 关系

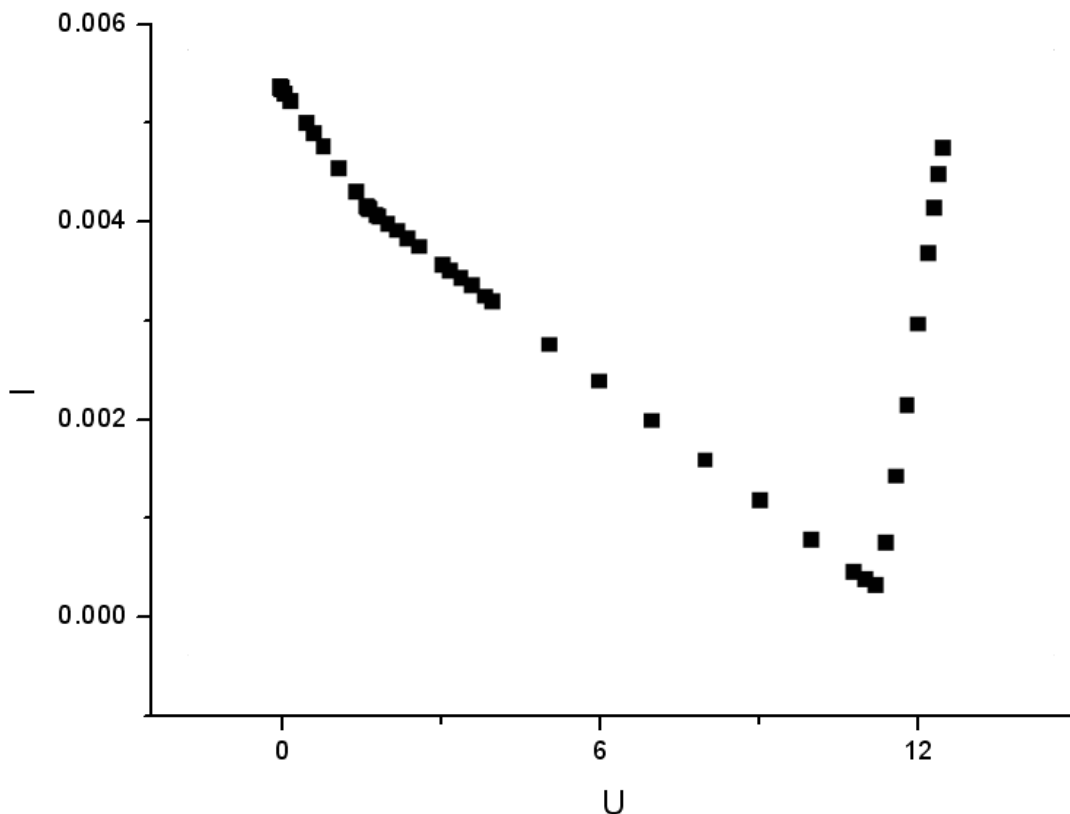
连接蔡氏电路，测量电路中的 U_1 （即 CH1）和可变电阻 R 的大小：

U(V)	R(Ω)	U(V)	R(Ω)
0.004	500	2.398	1560
0.014	1000	2.615	1610
0.016	1021	3.07	1700
0.018	1050	3.204	1723
0.028	1160	3.403	1755
0.001	100	3.606	1785
0.01	900	3.865	1820
0.02	1100	4.001	1837
0.03	1170	5.083	1945
0.04	1211	6.003	2015
0.05	1230	7.001	2072
0.1	1280	8.004	2117
0.202	1300	9.026	2154
0.501	1327	10.005	2183
0.639	1329	10.802	2203
0.816	1331	11.014	2208
1.116	1333	11.201	2220
1.432	1335	11.402	2470
1.633	1337	11.603	2943
1.652	1339	11.801	3653
1.69	1351	12.019	5000
1.808	1390	12.202	7200
1.866	1410	12.319	9999
2.03	1461	12.401	13880
2.204	1510	12.477	19998

由以上数据可算出电流 I，而 U_1 即也是 U_{Nf} ，因此可以得到 I- U_{Nf} 的关系：

U(V)	I(A)	U(V)	I(A)	U(V)	I(A)	U(V)	I(A)
0.004	0.000008	0.501	0.000378	2.615	0.001624	10.802	0.004903
0.014	0.000014	0.639	0.000481	3.07	0.001806	11.014	0.004988
0.016	1.57E-05	0.816	0.000613	3.204	0.00186	11.201	0.005045
0.018	1.71E-05	1.116	0.000837	3.403	0.001939	11.402	0.004616
0.028	2.41E-05	1.432	0.001073	3.606	0.00202	11.603	0.003943
0.001	0.00001	1.633	0.001221	3.865	0.002124	11.801	0.00323
0.01	1.11E-05	1.652	0.001234	4.001	0.002178	12.019	0.002404
0.02	1.82E-05	1.69	0.001251	5.083	0.002613	12.202	0.001695
0.03	2.56E-05	1.808	0.001301	6.003	0.002979	12.319	0.001232
0.04	3.30E-05	1.866	0.001323	7.001	0.003379	12.401	0.000893
0.05	4.07E-05	2.03	0.001389	8.004	0.003781	12.477	0.000624
0.1	7.81E-05	2.204	0.00146	9.026	0.00419		
0.202	0.000155	2.398	0.001537	10.005	0.004583		

将实验数据画成图象：



非线性负阻的 I-V 关系图像 (图 2-3)

斜率分别为 -7.46×10^{-4} 、 -3.99×10^{-4} 、 3.75×10^{-3}

与理想图像向比较，以上图像只有理想图像的右半边，即 $U \geq 0$ 的区域，这是因为用伏安法串联电阻箱是无法将电压改为负值的。所以，如果用函数信号发生器作为信号源，就可以得到整个 U 范围内的图像。在目前这个方法中，要得到左边图像，大致上只要以 $U=0$ 处这个点作整个图像的中心对称的图像即可。

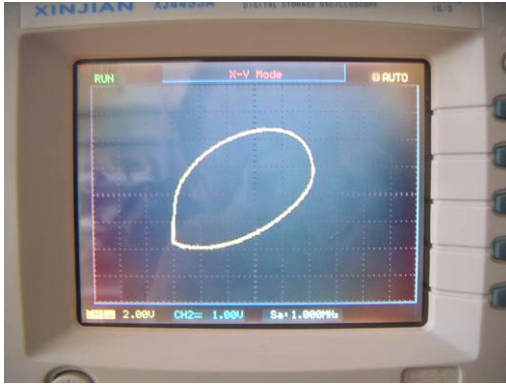
另外，最右侧的直线是理想图像上所没有的。这条线是负阻内的放大器固有的特性造成的。

2、用示波器观察混沌现象

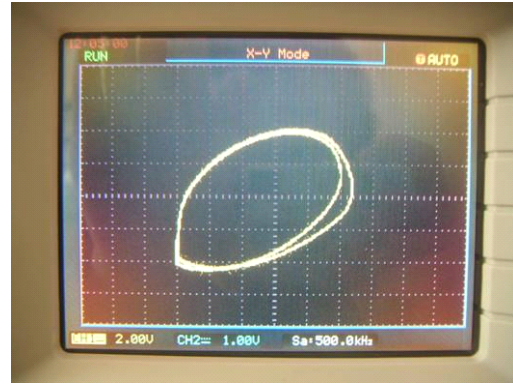
连接蔡氏电路，将电路中的 CH1 和 CH2 分别接示波器的 X 轴和 Y 轴。

将可变电阻调到最大，然后慢慢地变小。在这个过程中，可以看到示波器上的 X-Y 图形的变化过程。

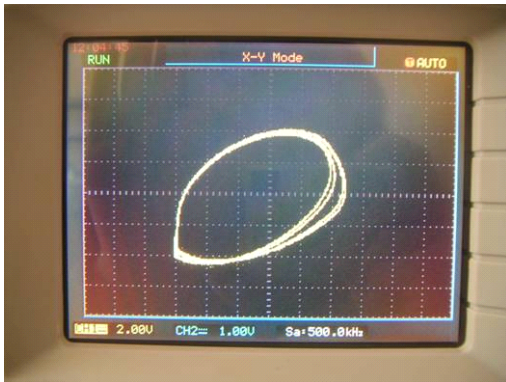
以下为依次出现的图像：



单周期



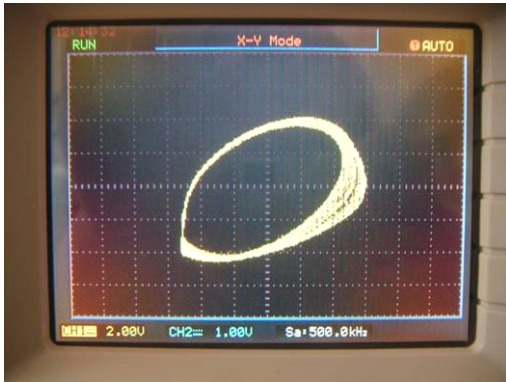
双周期



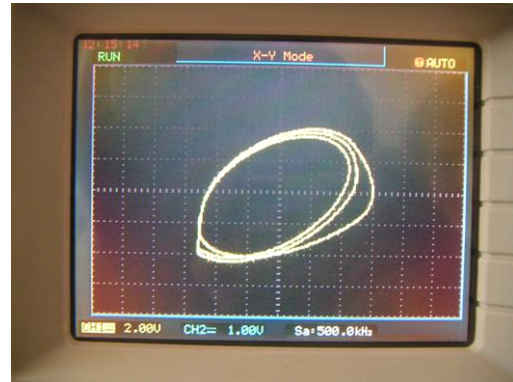
四倍周期



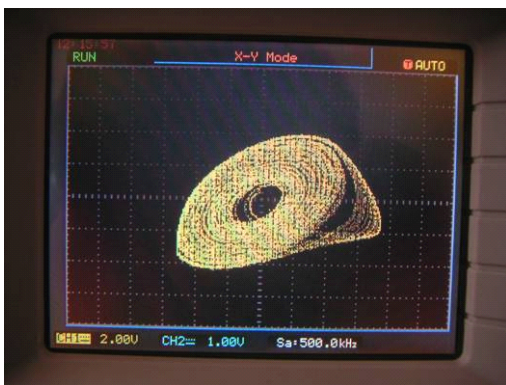
八倍周期



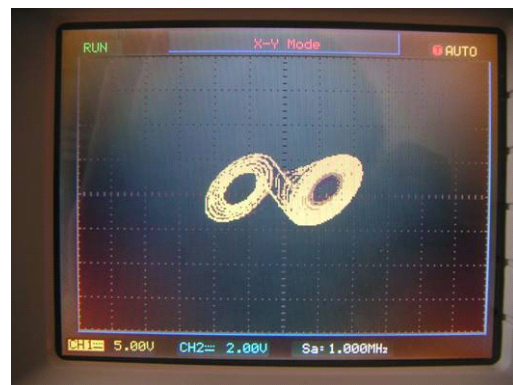
阵发混沌



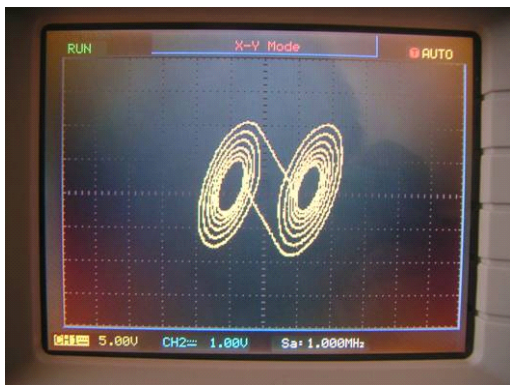
三倍周期



奇异吸引子



双吸引子 (1)



双吸引子 (2)

通过解蔡氏电路方程组可以解释上述现象出现的原因。

以下为解蔡氏电路方程组的过程：

(STEP 1)

蔡氏电路方程组：

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_1}{dt} = G(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} = G(U_1 - U_2) + I_L \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ L \frac{dI_L}{dt} = -U_2 \end{cases}$$

在每个区间内，都可以写成线性方程：

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b} \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{X}(t)$ 、 \mathbf{b} 为三维矢量， \mathbf{A} 为三阶矩阵。

(STEP 2)

③在 $\mathbf{X}'(t)=0$ 时的解即为相空间的不动点 \mathbf{X}_Q ， $\mathbf{X}_Q = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 。原方程组的解即可写为线性齐次方程 $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)$ 的通解与不动点特解 \mathbf{X}_Q 的和。

方程③的本征值方程为 $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ ，若 \mathbf{A} 存在三个本征值 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 ，齐次方程的解即为：

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{\xi}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} \vec{\xi}_3 \quad \textcircled{4}$$

其中 ξ_i 为 λ_i 对应的本征向量， c_i 由初始状态 \mathbf{X}_0 决定。

(STEP 3)

在有些情况下， \mathbf{A} 有一个实本征值 γ 和一对共轭的复本征值 $\sigma \pm i\omega$ ，方程的解可以写成：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{x}_c(t) \\ \mathbf{x}_r(t) = c_r e^{\gamma t} \vec{\xi}_\gamma \\ \mathbf{x}_c(t) = 2c_c e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \phi_c) \vec{\eta}_r - \sin(\omega t + \phi_c) \vec{\eta}_i] \quad \dots\dots \textcircled{5} \end{cases}$$

式中 ξ_γ 是实本征值对应的本征向量， $\eta_r \pm i\eta_i$ 是共轭的复本征值对应的本征向量。 ϕ_c 、 c_r 、

cc 由初始状态决定。

(STEP 4)

蔡氏电路方程组的解为： $X(t) = X_Q + X_V(t) + X_C(t) \dots \dots$ ⑥。即一个特解加上通解。

[实验总结]

1、在测量 Nr 的 I-V 特征曲线时，实验结果的图像和理论图像相互一致。

2、实验中观察到的混沌现象，与蔡氏电路方程组的解相对应

如果对方程组的解作分区分析。现定义：实本征向量 ξ_γ 方向为 E_r ， η_r 和 η_i 张成的平面记为 E_c 。齐次方程解的独立分量 $x_r(t)$ 在 E_r 方向， $x_c(t)$ 在平面 E_c 内。方程的解随着 t 的变化会有：

(1) $\gamma < 0$ 时， $x_r(t)$ 指数衰减到 0。

这时对应的图像是一个点。

(2) $\gamma > 0$ 时， $x_r(t)$ 沿着 E_r 方向指数增长。也就是说，对于任何一条相轨迹 $X(t)$ ， E_r 方向上的分量恒正或恒负，所以它始终都无法穿越 E_c 平面。

这时对应的图像是单周期、双周期、四周期、阵发混沌和三周期。

(3) $\sigma > 0$ 且 $\omega \neq 0$ ，则 $x_c(t)$ 在 E_c 平面内螺旋离开不动点 X_Q 。

这时对应的图像是奇异吸引子。

(4) $\sigma < 0$ 时， $x_c(t)$ 在 E_c 平面内螺旋收缩到不动点 X_Q 。

这时对应的图像是双吸引子。

致谢：指导老师乐永康及其研究生罗页

参考书目：《非线性电路实验原理》

实验室中非线性电路实验混沌仪的说明书