

利用盖革计数器测量核衰变的统计规律

摘要：原子核衰变是一种非常典型的统计分布，在低计数的情形下符合泊松分布，在高计数下转变为高斯分布。利用盖革计数器对辐射源进行测量来研究泊松分布和高斯分布并用卡方检验进行概率分布检验，以提高对概率分布的认识，理解实验中对于随机变量的处理方式。

关键词：二项式分布，泊松分布，高斯分布，正态分布，盖革-米勒计数管，卡方检验，放射性核衰变

引言：常用的辐射探头有闪烁体和 G-M 计数管。本实验利用 G-M 计数管测量辐射源的辐射计数，分析其统计分布以研究低计数和高计数条件下泊松分布和高斯分布的特点。

基本原理：

1. G-M 计数器的结构与工作原理：

1. G-M 计数器由 GM 计数管、高压电源和定标器构成。G-M 计数管中央是一根极细的金属阳极丝，用一个圆柱形金属套作为阴极，中间填充定量的气体。常用的 G-M 计数管有钟罩形和圆柱形，其原理类似。本实验采用的是钟罩形的 G-M 计数管。

2. 在 G-M 计数管两极加上电压 V_0 ，设其阳极半径为 a ，阴极半径为 b ，则沿着管径向位置为 r 处的电场强度为 $E_{(r)} = \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}}$ 。可见随着 r 减小，电场强度增大，且在阳极附近急剧增大。

3. 工作原理：

当射线进入 G-M 管中使得管中气体电离后，正离子和负离子在管内电场的作用下分别向阴极和阳极移动。在阳极附近强大的电场作用下，电子获得极大的动能以至于将阳极附近的气体电离。经过多次碰撞，阳极附近的电子急剧增多，形成了所谓“雪崩”电子；在这些碰撞中会产生大量紫外线光子，这些光子能够进一步地产生第二波的“雪崩”效应，增加电子。这个电子不断增多的过程成为气体放大。

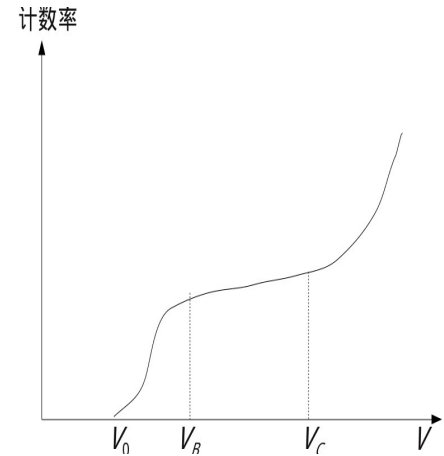
雪崩过程发生在阳极附近，加上电子的质量远远小于阳离子的质量，因此电子很快被阳极吸收，在管内留下一个由大量阳离子构成的阳离子鞘包围着阳极。正离子鞘将随着电离发生而逐渐增厚。由于正离子鞘的作用，阳极附近的电场强度将随之减小，直到电场强度不足以引起雪崩效应，这时雪崩效应停止，阳离子鞘停止生成，G-M 管进入恢复过程。在电场的作用下，正离子鞘缓慢地向阴极移动，阳极附近的电场也随之恢复，使得与 G-M 管串联的电阻记录下一个电压脉冲。把计数管看做一个电容器的话，那么在放电前为高压，在两极上带有一定的电荷；经过放电，电子中和掉极板上的一部分电荷，阳离子鞘的电场屏蔽了管内的部分电场、降低管内的电压降，于是阳极电位降低，输出一个负的脉冲信号。显然，电源电压越大，负脉冲幅度越大；串联电阻越大，脉冲宽度较宽，幅度也较大。

当阳离子到达阴极时会再次打出光电子，如果这些电子再次形成离子放电的话，一个入射粒子就将产生多个信号了。为了避免再次形成雪崩效应，使得一个入射粒子只产生一个信号，在管内加入少量的卤素气体来吸收这部分电子。

4. G-M 计数管的特性:

1. 坪曲线 盖革计数器的计数率与电压有关, 如下图。在小于 V_0 时完全没有计数, 此时管内的电场强度不足以激发电子雪崩; 在 V_0 到 V_B 之间, 计数率随着电压快速增大; 在 V_B 到 V_C 之间, 计数率随着电压小幅地增加, 这段直线被成为“坪”; 在 V_C 之后, 计数率随着电压急速增大。

2. V_0 称为计数管的起始电压, 是计数管的阈值电压。坪区有一个很小但是存在的斜率。这个斜率的来源是管内的第二、第三次放电概率随着电压升高而增大而产生的, 被称为“假计数”。在坪区的末端计数急剧增大, 原因是此时发生了连续放电现象, 一个射线能够产生多次放电。这是实验中必须避免的情况。实验中, 一般需把电压控制在坪区中央以保证计数率稳定。



5. 死时间、恢复时间、分辨时间

1. 死时间 t_D 由于正离子鞘对电场的屏蔽作用, 在放电结束后计数管存在一定时间的不响应时间, 被称为死时间。这段时间即使有射线进入管内也无法引起电离放电, 不会输出任何脉冲信号。 t_D 一般在 100 微秒左右。
2. 恢复时间 t_R 在经过 t_D 后, 正离子鞘还需经历一段时间 t_R 才能到达阴极, 这段时间被称为恢复时间。这时计数管完全恢复到放电前的状态, 能够给出与原始放电大小相同的脉冲。
3. 分辨时间 τ 实际记录脉冲时, 电子定标器有一定的甄别阈值 V_d , 只有脉冲幅度超过 V_d 的脉冲才能够被计数因此必须等到管内可以产生幅度超过 V_d 的脉冲时才能认为计数管准备好下一次记录了, 这一段时间被成为分辨时间 τ 。显然有 $t_D < \tau < (t_D + t_R)$ 相隔时间小于 τ 的两个入射粒子只能被记录一次, 因此这个时间参数说明了计数管重要的分辨性能。显然 τ 是由计数管和电学系统共同决定的, 一般电子仪器的甄别时间远小于 t_D , 因此如果将甄别阈值设置得足够小的话, 可以认为分辨时间近似为 t_D 。因此分辨时间也大概在 100 微秒左右。

2. 放射性测量数据的分布规律及检验方法

1. 核衰变的统计规律

每次核衰变都是各自独立的概率事件, 即使保证实验的条件完全相同, 多次测量的结果也不完全相同。测量值在平均值附近构成统计规律, 这种现象称为放射性计数的统计涨落。对于一个原子核而言, 时间 t 内其状态只有两种可能, 一种是发生衰变, 其概率为 $p = (1 - e^{-\lambda t})$, 另一种是不发生衰变, 其概率为 $1 - p = e^{-\lambda t}$ 。那么由二项式分布可以得到在时间 t 内发生衰变的数目

n 是一个随机变量, n 对应的概率 $P(n)$ 为 $P(n) = \frac{n!}{(N_0 - n)! n!} p^n (1 - p)^{N_0 - n}$ 。式中的 N_0 为

放射性原子核的数量。但是实际上 N_0 数值非常大, 无法进行数值计算。因此需要使用对应的近似进行处理。

2. 泊松近似

泊松近似是在抽样次数比较大，而 p 相对较小时采用的对二项式分布的一种极限形式。在实验中，由于放射性元素的半衰期比较长，因此 $\lambda t \ll 1$ ，因此 p 较小；抽样次数对应的是放射性原子数，为 N_0 ，比较大。因此，可以使用泊松近似进行处理。泊松分布为 $P(n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m}$ 。其中， $m = N_0 P$ ，为 n 的期望值。显然，泊松分布的方差 $\sigma^2 = m$ ，和期望相等。

3. 高斯分布

高斯分布又称正态分布，是二项式分布的另外一种极限形式，其对应条件为抽样次数非常大，单次实验概率 p 不是非常小。对于泊松近似，当 m 很大时，使用 Stirling 近似

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}，代入进行数学处理，有 P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}}，式中的 \sigma^2 = m。$$

可以看出，当 m 很大时，泊松分布趋向于高斯分布。

实验内容摘要：

1. 高计数和低计数的分布规律

1. 使用 G-M 计数器测量铊的低计数分布，控制每次测量时间内辐射计数在 3 到 5 个，测量 300 组，利用卡方检验检验其分布规律是否符合。

分组数为 11，泊松分布的自由度为 9，使用显著水平 $\alpha = 0.05$ 进行检测， $\chi^2 = 10.12$ 小于拒绝域临界 $\chi^2_{1-\alpha} = 14.684$ ，没有进入拒绝域，符合泊松分布。对其进行高斯分布的检测，其自由度为 8，去显著性水平 $\alpha = 0.05$ ， $\chi^2 = 10.12$ 大于 $\chi^2_{1-\alpha} = 2.733$ ，进入拒绝域，不符合高斯分布。

低计数下的分布符合泊松分布，但是不符合高斯分布。

2. 使用 G-M 计数器测量 Cs 的高计数分布，每次测量时间内辐射计数在 400—600 左右，测量 300 组，利用卡方检验检验其分布规律是否符合。

分组数为 18 组，高斯分布自由度为 15，使用显著水平 $\alpha = 0.1$ 进行检测， $\chi^2 = 12.59$ 小于 $\chi^2_{1-\alpha} = 22.3$ ，没有进入拒绝域，符合高斯分布。

对其进行泊松分布检测：泊松分布自由度为 16，使用显著水平 $\alpha = 0.1$ 进行检测，

$\chi^2 = 12.59$ 小于 $\chi^2_{1-\alpha} = 23.5$ ，没有进入拒绝域，符合泊松分布。

可以看出，当计数值变高，泊松分布向高斯分布趋近。在高计数的情况下，泊松分布和高斯分布基本相同。

2. 测量时间和测量次数对计数率标准误差的影响

1. 测量时间对计数率误差的影响

使用铊为放射源，测量得到以下数据：

t/s	计数 N	误差	相对误差/%
100	6202	79	1.3
300	18909	138	0.7

600	38064	195	0.5
-----	-------	-----	-----

以上的误差计算是利用泊松近似。需要注意的是，这里使用一次测量值 N 作为计数的期望值。原因在于此时的计数足够大、测量时间足够长，以致于能够体现出统计的规律，涨落的影响较小。可以发现，相对误差随着计数的增加而减小。这也印证了上面使用一次计数来替代计数期望值的可行性。

2. 测量次数对计数率误差的影响

对铯进行六次时长 100s 的测量，得到数据如下：>>>插入计数 X6 表

序号	1	2	3	4	5	6
计数 N	6412	6297	6248	6346	6290	6419

对以上的误差进行分析。

$$\bar{N} = \frac{1}{6} (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6) = 6335.7 ;$$

$$\sigma_{(\bar{N})} = \sqrt{\sum \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sigma_{(N_i)}^2} = \frac{\sigma_{(N_i)}}{\sqrt{6}} = 32.5 , \text{ 和单次测量的误差相差 } \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ 因子。}$$

显然，测量 k 次可以使得误差降低 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ，实际上误差和一次长时间 (kt_0) 的效果一致。

因此，处理数据时完全可以将相同条件下的测量结果进行相加、相减后进行数据处理。

结果与讨论：

放射性计量结果在低计数的情况下符合泊松分布，在高计数下符合高斯分布或正态分布。

对于放射性计数测量来说，测量时间越长，相对误差越小。其概率分布随着测量时间的增长从泊松分布向高斯分布转变，在高计数情况下，两种统计具有相同的结果。

对计数进行 k 次测量将使得误差变成单次测量的 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ，但是其误差相当于一次时间为 kt 的测量。因此对于相同条件下的不同次测量可以将其合并或拆分而没有引入误差的危险。

小结：

通过对放射源衰变计数的测量进行了对泊松分布和高斯分布规律的研究，对概率分布进行了较深入的探讨。浅析了泊松分布、高斯分布和二项式分布之间的联系与差异。并在实验中使用卡方检测的方法研究了对于概率分布进行检验的方法。

盖革计数器是一种简单方便的测量辐射强度的仪器，通过合理设计的电路可以精确测量放射数。通过对盖革-弥勒计数管的原理研究，了解了盖革-弥勒计数管的分辨时间等重要参数。并在低活度的核衰变测量中使用了盖革-米勒计数器进行衰变数的测量。

分辨时间等重要参数。并在低活度的核衰变测量中使用了盖革-米勒计数器进行衰变数的测量。

实验中使用到了低活度的放射源，学会了安全使用放射性材料的基本技能，克服了由于无知而产生的对放射源的恐惧，获得了技能和理念上的提高。

参考文献：

- [1]张新国,王军亮,马义德.放射性仪表的计数涨落与测控误差问题研究[J].兰州大学学报,1999,1(35).
- [2]郭余峰.放射性测量最佳条件的选取[J].大庆石油学院学报.2003,27(3).
- [3]于洋.浅析二项分布、泊松分布和正态分布之间的关系[J].企业科技与发展,2008,(20).
- [4]刘焯,高原宁.泊松统计的无偏估计[J].高能物理与核物理.2007,31(7).
- [5]戴道宣.近代物理实验[M].北京:高等教育出版社,2006.9-17.