

# 核衰变的统计规律

蒋超然 07300190010

[摘要]通过理论分析和实验,验证核衰变是服从统计规律分布的。

[关键词]核衰变 统计规律

## 1.引言:

核衰变过程是一种随机过程,

## 2.核衰变过程的特点

核衰变过程的特点为:随机性,规律性,独立性。

### 2.1 核衰变过程的随机性:

设初始时刻  $t_0$  时有  $N_0$  个原子未衰变,到了  $t=t_0+dt$  时刻,由于衰变,有  $N$  个原子未衰变。因此在  $dt$  时间中,有  $dN=N_0-N$  个原子发生衰变。由于衰变发生的自发性,因此  $dN$ ,  $N$  都具有随机性。

因此在放射性测量中,即使保持完全相同的实验条件,如:实验中每次测量的时间不变;放射源的半衰期足够长;放射源相对计数管的相对位置保持不变等。每次实验测量得到的结果也不相同,而是在一个平均值附近浮动,在某些测量中也有可能有较大差别。因此核衰变过程具有随机性。

### 2.2 核衰变过程的规律性:

核衰变过程遵循:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ 。其中  $N$  为未发生衰变的原子数,  $N_0$  为初始  $t=0$  时刻的原子数,

说明  $N$  随时间  $t$  的增加而减小,是满足负指数时间间隔  $t$  的过程,因此是 Poission 过程。

### 2.3 核衰变过程的独立性:

对于某一放射物质,各原子间,任意一个原子发生衰变,对其他原子而言,不会影响到其衰变过程。即在某一放射性物质中,各个原子核的衰变过程完全独立,不相互影响。因此衰变过程具有独立性。

## 3.理论分析统计分布规律:

在放射性源中,单位时间内一个原子只存在两种状态,1:发生衰变,2:未发生衰变。设发生衰变的概率为:  $p = (1 - e^{-\lambda t})$ ,未发生衰变的概率为:  $q = e^{-\lambda t}$ 。

根据二项式分布:

$$f_X(x) = P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{for } k=0,1,2,\dots,n \quad (1)$$

其中  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

可得:在  $t$  时间内的衰变概率为:

$$P(n) = \frac{N_0!}{(N_0-n)!n!} p^n (1-p)^{N_0-n} \quad (2)$$

时间  $t$  内发生衰变的粒子数  $m = N_0(1 - e^{-\lambda t})$ ,方根差  $\sigma = \sqrt{N_0 p q} = \sqrt{m(1-p)}$ ,若  $t \ll \frac{1}{\lambda}$ ,  $\frac{\ln 2}{\lambda}$

为半衰期,由于  $\ln 2 \approx 0.693$ ,可近似认为  $t \ll$  半衰期,此时  $q \approx 1$ ,则  $\sigma$  可近似为  $\sigma \approx \sqrt{m}$ 。

当在衰变中,  $N_0$  很大而  $p$  相对较小,并且有  $t \ll \frac{1}{\lambda}$ 。则二项式分布可简化为 Poission 方程,此时  $m = N_0 p \ll N_0$ ,当  $n$  位于  $m$  附近时,有:

$$\frac{N_0!}{(N_0-n)!n!} = N_0(N_0-1)\dots(N_0-n+1) \approx N_0^n \quad (3)$$

$(1-p)^{N_0-n} \approx (e^{-p})^{N_0-n} = e^{-pN_0}$

由此可得

$$P(n) = \frac{N_0^n}{n!} p^n e^{-pN_0} = \frac{m^n}{n!} e^{-m} \quad (4)$$

即为 Poisson 分布, 服从 Poisson 分布的随机变量期望值和方差分别为:  $E(x)=m, \sigma^2 = m$ 。

当  $N_0$  很大, 同时  $m$  有较大值的情况下,  $n$  较大时  $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  带入(4), 并设  $\Delta = n - m$ , 则有:

$$P(n) = \frac{m^n}{n!} e^{-m} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{m}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{n-m} = \frac{e^\Delta}{\sqrt{2\pi m}} \left(1 + \frac{\Delta}{m}\right)^{-(m+\Delta+\frac{1}{2})} \quad (5)$$

其中,  $\left(1 + \frac{\Delta}{m}\right)^{-(m+\Delta+\frac{1}{2})} \approx e^{-(\Delta+\frac{\Delta^2}{2m})}$ 。

因此 (5) 式可化简为

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{\Delta^2}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(n-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

即当  $n$  值很大时, 原子核衰变的统计规律将趋向 Gauss 分布。

#### 4.核衰变过程的统计规律验证

实验使用 G-M 计数管, 高压电压和计算机采集数据, 并利用配套的软件进行数据的处理。

##### 4.1 测量时间对于统计结果的影响

表 1

| n | 测量间隔 | 测量时间 | $\chi^2$  | 方差       | 计数平均值    |
|---|------|------|-----------|----------|----------|
| 1 | 0.1  | 100  | 0.063199  | 0.742178 | 0.742    |
| 2 | 0.1  | 100  | 5.522727  | 0.725041 | 0.677999 |
| 3 | 0.1  | 100  | 13.203713 | 0.801712 | 0.717    |
| 4 | 0.1  | 100  | 4.233997  | 0.689601 | 0.717    |
| 5 | 0.1  | 100  | 1.583271  | 0.809526 | 0.777999 |
| 6 | 0.1  | 100  | 49.644111 | 0.714690 | 0.704999 |
| 7 | 0.1  | 300  | 3.625573  | 0.745475 | 0.739666 |
| 8 | 0.1  | 600  | 1.81288   | 0.723167 | 0.720499 |

对于表 1 中数据取  $\alpha = 0.1$ ,  $v=5$ , 可得  $\chi_{1-\alpha}^2 = 9.24$ 。因此第 3 和第 6 次测量所得的结果  $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2$ , 此组数据不符合 Poisson 分布。但考虑到衰变过程本身是一个随机的过程, 因此认为数据整体是符合 Poisson 分布的。同时也可得知, 在测量中, 测量时间相当较长可使测量结果更符合统计的理论值。

##### 4.2 低计数验证 Poisson 分布

由公式(4)结果可知, 当单位时间内发生衰变的次数较少时, 数据分布符合 Poisson 分布。

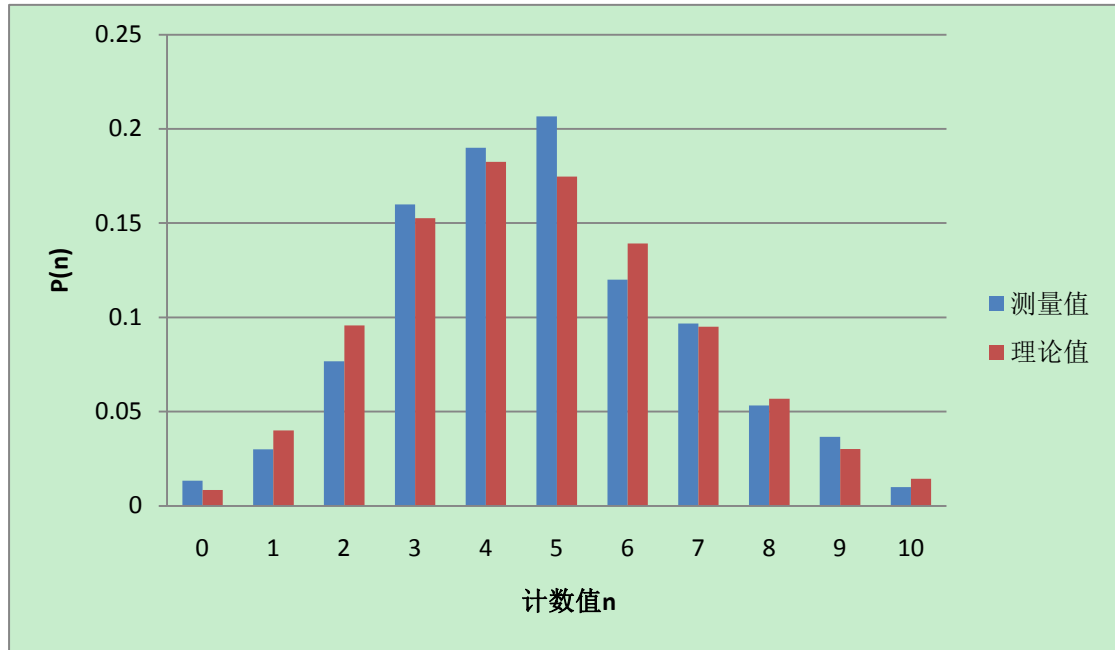


图 1

由图 1 中数据可得,  $\chi^2=6.438773$ , 计数平均值=4.783333。

取  $\alpha=0.10$ ,  $v=9$ , 查表得  $\chi_{1-\alpha}^2 = 14.684$ , 可得  $\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2$ 。因此认为此组数据服从 Poisson 分布。

#### 4.3 高计数验证 Gauss 分布

测量 300 个样本, 将 300 个样本分成 15 组, 每组样本数为 20。经过处理后得到表 2 数据

表 2

| n  | 平均值    | t 分布     | $\chi^2$ 分布 |
|----|--------|----------|-------------|
| 1  | 493.90 | 1.132273 | 12.018746   |
| 2  | 483.85 | 1.219848 | 22.477864   |
| 3  | 482.15 | 1.142129 | 15.714280   |
| 4  | 489.55 | 0.079758 | 12.055953   |
| 5  | 487.25 | 0.595249 | 17.623016   |
| 6  | 495.40 | 1.337068 | 16.156959   |
| 7  | 487.20 | 0.739775 | 11.855183   |
| 8  | 489.55 | 0.061209 | 20.469910   |
| 9  | 491.80 | 0.437087 | 18.829974   |
| 10 | 491.20 | 0.283995 | 21.506919   |
| 11 | 486.80 | 0.733373 | 16.007630   |
| 12 | 492.30 | 0.454425 | 27.423218   |
| 13 | 498.00 | 1.720982 | 20.998054   |
| 14 | 490.40 | 1.922377 | 22.488302   |
| 15 | 495.20 | 0.989095 | 27.440404   |

对于表 2 中数据取  $\alpha=0.10$ ,  $v=1$ , 查表得  $\chi_{1-\alpha}^2 = 24.76903535$ 。

对比表 2 中数据, 可以发现第 12 组和第 15 组  $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2$ , 认为这 2 组数据不服从 Gauss 分布。但是考虑到核衰变的随机性, 认为数据总体来说, 证明了在高计数情况下, 核衰变统计规律服从 Gauss 分布。

#### 5.总结

本次实验从放射性物质衰变的基本定律:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$  出发。根据二项式分布导出了在不同条件下放射性衰变所服从的统计规律, 并通过实验得到了验证。

参考文献:

- [1]杨福家.原子物理学.高等教育出版社.2007.7, 第3版.
- [2]胡嗣柱 等.数学物理方法.高等教育出版社.2002.7, 第2版.
- [3]童欲孙 等.高等数学(下).高等教育出版社.2004.4, 第2版.