冉绍尔-汤森效应实验探讨

08300300058 韩雪松 材料物理

摘要：

本实验用充气闸流管，通过测量液氮环境下和室温下屏蔽极电流 I_s 和透射电流 I_p 与加速电压 V_A 的关系，得到低能电子与气体原子的散射概率 Ps 与电子速度的关系，验证了冉绍尔-汤森效应，并对其做出了量子理论解释；验证性地测量了氙原子的电离电压。

关键词：

冉绍尔-汤森（R-T）效应、散射几率、散射截面、加速电压、补偿电压、电离电压

1. 引言：

1921 年，德国物理学家卡·冉绍尔（Carl Ramsauer）在研究电子与氩原子的碰撞实验中，发现当电子的能量较高时，氩原子的散射截面随着电子能量的降低而增大；当电子的能量小于十几个电子伏特后，散射截面却随着电子能量的降低而迅速减小。1922 年，英国卡文迪许实验室的 J.S.汤森（J.S. Townsend）在测量电子在气体原子和分子中的自由程时，发现当电子以极慢的速度在氩原子中运动时，电子的自由程特别长，能量为 0.37eV 时，出现极大值。随后，冉绍尔等用实验证实了汤森的结果。在经典理论中，散射截面与电子的运动速度无关，而冉绍尔与汤森等人的发现是不符合经典的气体分子动理论的，这一现象只能用量子力学理论解释。

2. 实验原理：

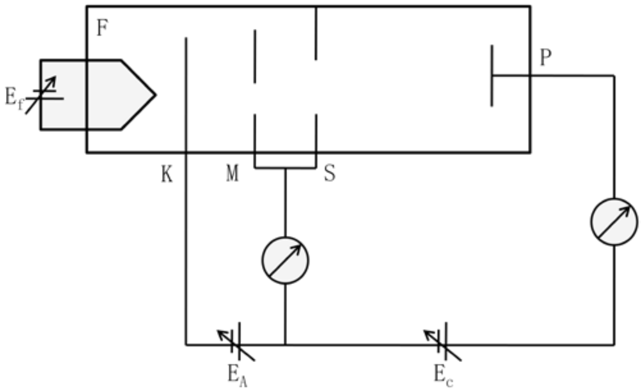

图 1 测量原理图

E_F 为灯丝加热电压，F 为灯丝，K 为发射电子的阴极，MK 之间为加速电场，P 为收集极，SP 之间为等势区；E_A 为加速电压，使由阴极发射的电子加速； E_c 是板极与栅极之间的补偿电源，用以补偿空间的接触电势差。

当灯丝加热后，就有电子自阴极逸出，设阴极电流为 I_k，电子在板极电压的加速下，有一部分电子在达到栅极之前，为屏蔽极接受，形成电流 I_{s1}，有一部分则穿越 S 上的矩形孔，形成电流 I_0。由于 S 的矩形孔与板极 P 之间是一个等势空间，所以电子穿越矩形孔后就以恒定速度运动，受到气体原子散射的电子则到达屏蔽极，形成散射电流 I_{s2}；而未收到散射的电子则达到板级，形成透射电流（板流）I_p，因此有：

$$I_k = I_0 + I_{s1}$$
$$I_s = I_{s1} + I_{s2}$$
$$I_0 = I_p + I_{s2}$$

电子在等势区的内的散射概率为：

$$P_s = 1 - \frac{I_p}{I_0}$$

I_0 不能直接测量得到，需用间接的方法来测量，定义：

$$f = \frac{I_0}{I_{s1}}$$

f 称为几何因子，它与管子的几何结构及所用的加速电压、阴极电流有关。

为了测量 f，把充气闸流管的管端部分浸入温度为 77K 的液氮中，使管内的气体冻结，此时：

$$f = \frac{I_p^*}{I_s^*}$$

若这时阴极电流与加速电压保持与$P_s = 1 - \frac{I_p}{I_0}$和$f = \frac{I_0}{I_{s1}}$时相同，则有：

$$P_s = 1 - \frac{I_p}{I_{s1}} \cdot \frac{I_s^*}{I_p^*}$$

设 L 为出射孔 S 到板极 P 之间的距离，由$P_s(x) = 1 - e^{-n\sigma x}$，可得总有效截面 Q：

$$Q = n\sigma = -\frac{1}{L}\mathrm{In}(1 - P_s) = -\frac{1}{L}\mathrm{In}\frac{I_p}{I_{s1}} \cdot \frac{I_s^*}{I_p^*}$$

3. 实验过程：

3.1 交流观察 R-T 效应

分别在室温下和液氮环境下，用示波器观察 I_s-V_A 和 I_p-V_A 曲线，调节 E_c，使两曲线基本重合，以初步补偿接触电位差；

3.2 直流观察 R-T 效应并测量 I_s、I_p 和 V_A 的值

（1）用微电流计对补偿电压作进一步细调；

（2）在室温下改变 V_A 的值（0~10V），记录一组 I_s、I_p 和 V_A 值；

（3）在液氮环境下，重复步骤 2.（2）

3.3 用二极管法测量氙原子的电离电压

4. 结果与讨论：

4.1 I_s-V_A 和 I_p-V_A 关系：

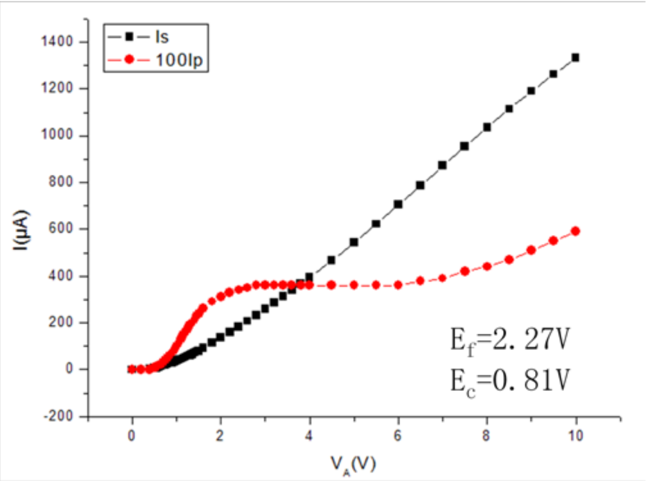

图 2 常温下 I_s-V_A，I_p-V_A 关系图

从图 2 中可以看出，栅流 I_s 随加速电压 V_A 的增大而增大，I_s-V_A 呈“类线性”关系；从整个趋势上看，I_p 也随 V_A 的增大而增大，但是并没有如 I_s-V_A 那样良好的“类线性”关系，这是由于电子在碰撞管等势区内受到散射所引起的；V_A=1.0V 左右时，I_p 斜率有最大值，正是由于电子受到散射，才会在 V_A 的增加过程中出现突变；

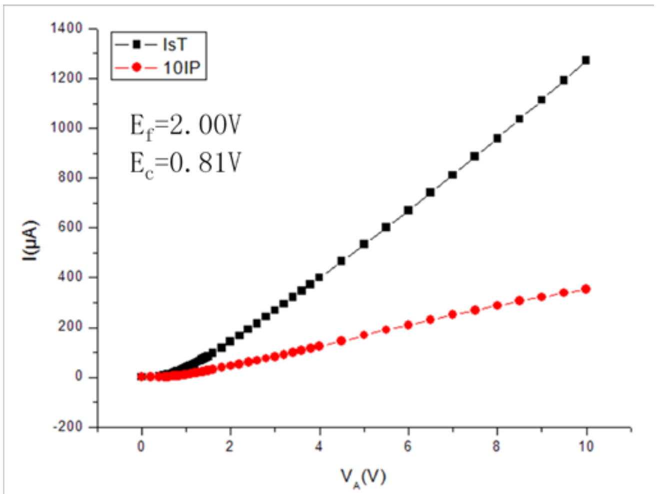

图 3 低温下 I_s-V_A，I_p-V_A 关系图

从图 3 中可以看出，I_s^*、I_p^* 均随 V_A 的增大而增大，且均如图 2 中所示的“类线性”关系；由此可知，当充气闸流管处于液氮环境下时，管内的电子几乎不发生散射现象，这是因为管内所充的氙-氪混合气在 77K 时已经液化（氙和氪的液化温度分别为 165.02K 和 119.79K），此时管内相当于真空状态，故电子不会发生散射。

4.2 P_s-$\sqrt{V_A}$ 关系

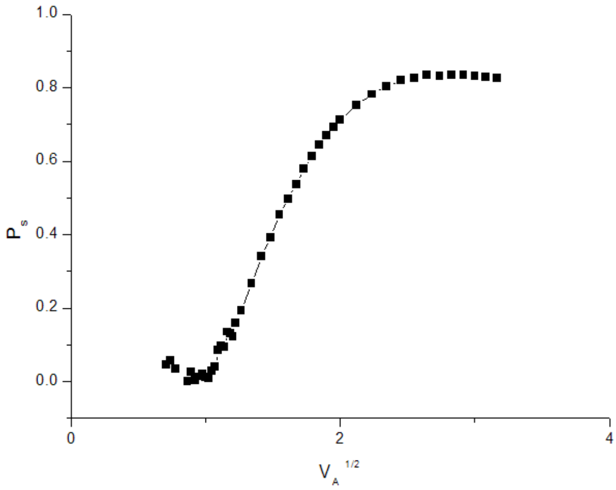

图 4 P_s-$\sqrt{V_A}$ 关系图

图 4 中所选用的数据均为 4.1 中条件下测量得到的。考虑到 V_A 由 0 开始增大时仪器读数非常不稳定，舍去较前的几组数据，得到图 4。从图中可以读出，当 $\sqrt{V_A}$=0.95V，即 V_A=0.9025V 时，P_s 有最小值 0，即散射截面出现极小值，这应与图 3 中 I_p 斜率最大处（V_A=1.0V）相对应；理论上，当 E=0.9eV 时，散射截面出现极小值，实际测得 E_{min}=0.9025eV，相对误差为 0.28%，与理论值非常接近。之后 P_s 迅速增大，在 $\sqrt{V_A}$=2.66，即 V_A=7.0756V 时出现最大值，此时 P_s=0.833，理论上，V_A=6.5V 时 P_s 出现最大值，相对误差为 8.86%。

误差分析：除了仪器本身的因素外，造成 V_A 最大值有较大偏差的原因有以下几点：（1）由图 2、图 4 中可知，随着 V_A 的不断增加，I_s 的值变化范围很大，故测量过程中需要换量程读数，这一过程会造成读数的不准确，对结果产生一定影响；（2）测量环境不能达到实验要求，尤其是在液氮环境下测量时，保温杯的气密性、液氮的快速挥发都会使实验结果产生偏差。

4.3 f-V_A 关系

图 7 为 f-V_A 关系图，f 一开始随 V_A 的增大迅速增大，当 V_A=1.5V 时，f 达到最大值，之后 f 不断减小，在 f=0.03 左右保持较为稳定的变化，随后又随 V_A 的增

大而减小。

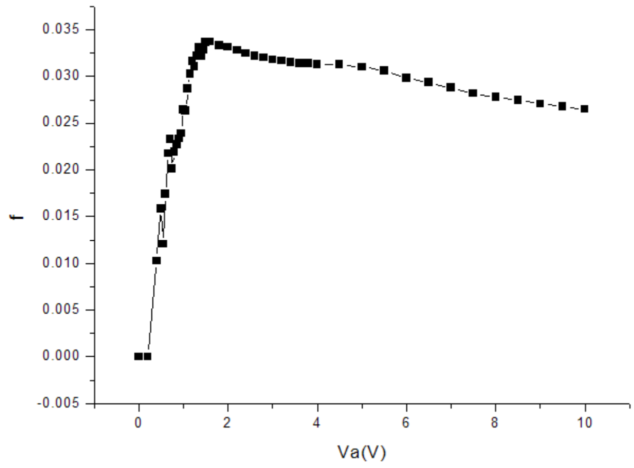

图 5 f-V_A 关系图

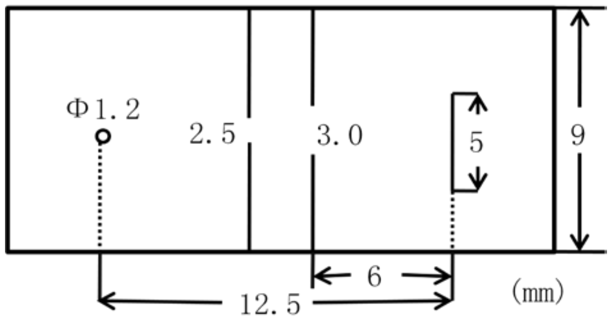

图 6 充气闸流管俯视图

根据图 6 估算 f 的值，假设粒子在全空间内都能进行散射，则有：

$$f = \frac{2.5^2/(12.5-6)^2}{4\pi} \approx 0.012$$

从图 5 可以看出，实际测得的 f 并不是一个定值，且 f<0.035，这应是加速电压和阴极电流的影响，虽然实际结果与理论值有一定差距，但数量级并没有改变，所以可以认为 f 主要是由充气闸流管尺寸决定，加速电压和阴极电流对其的影响还需要进一步实验验证。

对于 f 的变化，原因有以下几点：（1）V_A 由 0 开始增大时，读数非常不稳定，故曲线一开始变化较紊乱，V_A=1.5V 时出现最大值，这应对应 P_S 出现极小值时的情形，但 V_A 的值要远大于 0.9V，这应当是加速电压和阴极温度等因素对实验造成的影响；（2）随着 V_A 的增大，虽然被加速的电子越来越多，但被屏蔽的电子数仍很多，故而 f 又随 V_A 的增大而减小。

4.4 氙原子的电离电压

真空二极管工作在空间电荷限制区，阳极电流和阳极电压之间的关系为：

$$I = KV^{\frac{3}{2}}$$

即

$$\lg I = \frac{3}{2}\lg V_A + \lg K$$

根据上述关系，做 $\lg(I_s+I_p)$-V_A 关系图：

所得两直线方程分别为：

AB：$\lg I=1.495481\lg V_A+3.419$；

BC：$\lg I=14.37096\lg V_A-29.92484$；

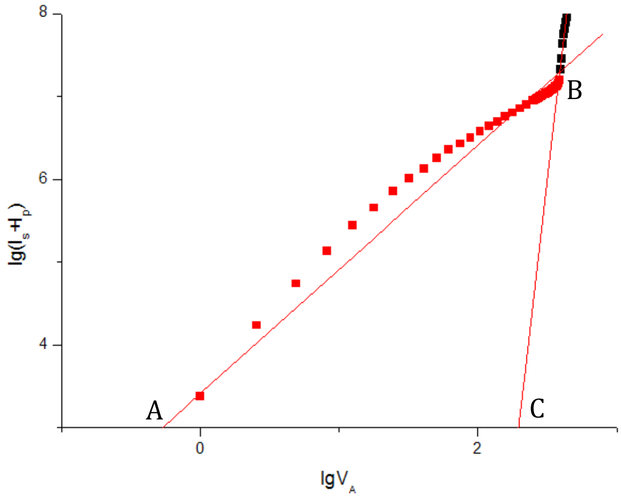

图 7 lgI-lgV_A 关系图

联立上述方程，解得氙原子的电离电压为 13.33V，理论值为 12.13V，相对误差为 9.86%。

由图 7 中可以看出，AB 段数据并不是成良好的线性关系，虽然拟合结果显示其斜率为 1.495481，与理论值 1.5 非常接近，但是明显可以看出 AB 之间的数据点呈曲线分布，对这一现象，分析如下：

（1）V_A 由 0 开始增大时，由于电流很小，很可能超过了仪器的精度范围，故读数有一定偏差；

（2）补偿电压 E_c 对结果有一定影响，若 E_c 过大，则会抵消低灯丝电压下产生的能量较小的电子，使阳极电流发生改变，故对电流和电压不能严格的遵守二分之三次方定律；

（3）充气闸流管所处的环境为 77K 的液氮中，虽然此时已保证温度均在氙和氮的液化温度下，但并不能保证高真空状态，而二分之三次方定律要求工作在高真空状态，故也会造成一定的影响。

4.5 冉绍尔-汤森效应的量子理论解释

经典理论中，粒子被视作刚性球，其散射截面 Q 与瞄准距离（碰撞参数）d 有如下关系：

$$Q = \pi d^2$$

与粒子速度无直接关系，无法解释冉绍尔-汤森效应。

量子理论中，将电子看作平面波$\psi = e^{ikz}$。设入射粒子与散射中心之间的相互作用势能用中心力场为 U(r)表示，并假定 r→∞时，U→0，则体系的薛定谔方程写为：

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + U(r)\psi = E\psi$$

令$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$，$V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}U(r)$，在中心力场情况下，势能只与$r$的大小有关，故有：

$$\nabla^2\psi + [k^2 - V(r)]\psi = 0$$

$r\to\infty$时，入射波与散射波共存，故满足上式的波函数应当满足以下的边界条件：

$$\psi_{r\to\infty} \to \psi_1 + \psi_2 = e^{ikz} + f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikz}}{r}$$

其中，$f(\theta,\varphi)$是沿(θ,φ)方向向外传播的散射波的振幅，称为散射振幅。

对于方程$\nabla^2\psi + [k^2 - V(r)]\psi = 0$，一般解有以下形式：

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum\nolimits_{l.m} R_l(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

选取粒子入射方向并通过散射中心的轴线为极轴，则波函数及散射振幅都与φ无关，即 m=0，故：

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l.} R_l(r)P_l(\cos\theta)$$

其中 l=0,1,2……对应的每一个波函数是一个分波，且均是方程的解。其中勒让德多项式 $P_l(\cos\theta)$为已知，讨论 $R_l(r)$满足的径向方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l(r)}{dr}\right) + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l(r) = 0$$

$$令R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$$

则有：

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + \left[k^2 - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u_l(r) = 0$$

$r\to\infty$时，上式可化为：

$$\frac{d^2u_l(r)}{dr^2} + k^2u_l(r) = 0$$

其通解形式为：

$$u_l(r) = A_l'\sin(kr + \delta_l')$$

故有：

$$R_l(r)_{r\to\infty}\frac{A_l'}{r}\sin(kr + \delta_l') = \frac{A_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

$$\psi(r,\theta)_{r\to\infty}\sum_l \frac{A_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)P_l(\cos\theta)$$

将平面波$\psi = e^{ikz}$按球函数叠加展开，则：

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_l (2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

由于：

$$j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)_{r\to\infty} \to \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)$$

故：

$$e^{ikz}{}_{r\to\infty} \to \sum_l \frac{(2l+1)i^l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta)$$

由此发现，电子经散射后，角度不变，径向多出一个δ_l，称之为第 l 分波的相移。

经过上面的计算，散射波的边界条件变为：

$$\psi_{r\to\infty} \to \sum_l \frac{(2l+1)i^l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta) + f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikz}}{r}$$

由：

$$\sum_l \frac{A_l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_l \frac{(2l+1)i^l}{kr}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta) + f(\theta,\varphi)\frac{e^{ikz}}{r}$$

可解得散射振幅：

$$f(\theta) = \frac{1}{2ki}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right)P_l(\cos\theta)$$

进而得到微分散射面积

$$q(\theta) = |f(\theta)|^2$$

再利用勒让德函数的正交性，得到总散射截面为：

$$Q = \sum_{l=0}^{\infty}Q_l = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l$$

对于低能电子来说，只考虑 l=0 时的分波δ_0即可，此时，散射面积变为：

$$Q_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$$

当$\delta_0 = n\pi$时，Q_0有最小值，此时：

$$u = \begin{cases}\sin kr & (r < a)\\ \sin(kr + \delta_0) & (r > a)\end{cases}$$

其中，a为原子半径。由波函数的连续性条件可得：

$$\tan(k'a)=k'a$$

解此超越方程，即可找到合适的 k 值，从而得到散射截面最小时对应的电子能量。观察上式， $ka<<1$ 时才能保证方程成立，这也证明了冉绍尔-汤森效应发生于低能电子态下。

5. 结论：

通过实验验证了冉绍尔-汤森效应，测得电子能量降到 0.9025eV 时，散射截面有最小值；电子能量为 7.0756eV 时，散射截面有最大值；氙原子的电离电压为 13.33V；

实验中引进的几何因子 f，它的值根本上由充气闸流管的结构决定。阴极电流与加速电压对 f 没有数量级上的影响。

用量子理论定性半定量解释了冉绍尔−汤森效应。

致谢：

感谢马世红老师的指导和帮助！

感谢李梦琳同学的合作！

感谢一学期以来所有老师和同学的帮助！

参考文献：

[1]《近代物理实验》（第二版），戴道宣、戴乐山，高等教育出版社，2006 年；

[2]氙原子散射截面反常现象的观测分析，胡永茂,、张桂櫺、李汝恒、陈　丽、张学清，物理实验，2008 年 7 月第 28 卷第 7 期

[3]《原子物理学》，陈宏芳，中国科学技术大学出版社，2001 年

[4]《数学物理方法》（第三版），梁昆淼，高等教育出版社，2010 年