

物理实验

# RC 电路时间常数的电压对称法快速测量

龙姝明<sup>1</sup>, 王凤华<sup>2</sup>, 杨俊海<sup>2</sup>, 刘全一<sup>2</sup>

(1. 陕西理工学院 物理系, 陕西 汉中 723000; 2. 陕西理工学院 物理系 电信 07 级, 陕西 汉中 723000)

**摘要:**研究发现,在因果周期方波信号激励下,一阶动态电路的稳态响应是因果周期信号. 设方波信号电压的最大值  $u_0$ , 电容电压的最大值  $u_{Cmax}$  和最小值  $u_{Cmin}$  满足关系  $u_0 - u_{Cmax} = u_{Cmin}$ . 电容电压波形关于时间轴有特殊的对称性. 利用 RC 电路稳态响应的电压对称性,可导出电路时间常数  $\tau$  的快速测量方法和计算公式,为电容量测量提供可靠的快捷方法.

**关键词:**一阶动态电路; 稳态响应; 时间常数; 对称性

**中图分类号:** TM934. 2; TM934. 4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-0712(2010)08-0041-03

动态电路时间常  $\tau$  是图 1 所示一阶电路的重要参数,其倒数是一阶 RC (或 RL) 电路充电和放电速度的度量:  $1/\tau$  越大 (即  $\tau = RC$  或  $\tau = L/R$  越小), RC (或 RL) 电路充放电速度越快. 利用测量电路时间常数  $\tau$ , 可测量接入电路的电容或电感量的大小. 电容量或电感量的测量相对来说是比较困难, 如果容易测得 RC (或 RL) 电路的  $\tau$  值, 就可计算电容量  $C = (1/R)\tau$  或电感量  $L = \tau R$ .

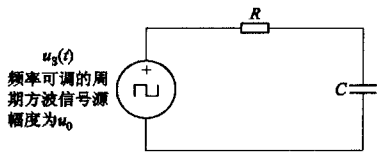


图 1 一阶 RC 电路

测量一阶 RC 电路时间常数  $\tau$  有很多方法<sup>[1]</sup>. 常用充电 0.632 值法 (即 RC 电路中电容电压由 0 值充电达到电源电压  $u_0$  的 0.632 倍的过程所用时间等于  $\tau$ ) 和放电 0.368 值法 (即 RC 电路中电容电压由  $u_0$  放电到电源电压  $u_0$  的 0.368 倍的过程所用时间等于  $\tau$ ) 都因为充放电太快而在示波器时间轴上展开的尺度太小导致  $\tau$  的读数测量困难, 结果误差很大, 由这种测量方法计算出的电容量精度非常有限. 文献[1]的连续积分测量法和半值测量法都存在测量时操作不方便而且误差较大的问题. 为了更加精确、快速方便地测量 RC (或 RL) 电路的时间常数, 为电容量 (或电感量) 精确测量提供行之有效的方法, 我

们对因果周期方波激励下的 RC 电路的电容电压函数进行了深入的研究, 发现了测量一阶 RC (或 RL) 电路时间常数的电压波形对称性方法. 测量操作步骤是:

1) 选择占空比 0.5、频率可调的因果周期方波信号源, 用双踪示波器观察电容电压波形;

2) 信号源电压  $u_0$  固定不变, 调整信号源频率  $f$ , 使 RC 电路稳态电容电压波形 (或 RL 电路稳态电阻电压波形) 相对方波信号源的“电压平均值线”上下“对称”且展开的纵向“尺度”只有信号源电压纵向“尺度”的一半, 即电容电压最小值  $u_{Cmin} = u_0/4$ , 电容电压最大值  $u_{Cmax} = 3u_0/4$ ,  $u_{Cmax} - u_{Cmin} = u_0/2$ .

采用电压对称法, 一阶 RC 和 RL 电路时间常数的测量极其方便, 且读数误差理论上最小. 也可以根据“电压对称法”测量时间常数的原理设计出专门的高精度电容、电感测量仪器.

## 1 一阶 RC 电路稳态响应函数

下面以 RC 电路为例, 先由理论分析导出时间常数  $\tau$  的计算公式, 再讨论实验测量的方法步骤.

分析一阶 RC 电路在因果周期方波激励下的完全响应有两种方法.

方法一: 以电路通电时刻为计时起点, 取  $u_C(0_-) = 0$ , 求出电路在因果周期方波信号激励下的全响应 (实际是零状态响应). 先求单位阶跃信号激励下的零状态响应, 再利用线性时不变电路的叠加性和时不变性, 对单位阶跃响应延时叠加导出 0 初值

条件下的电容电压函数解析式<sup>[2]</sup>.

因果周期方波信号源(见图2)的电压函数可利用单位阶跃信号函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

及其延时组合给出为(注意观察时段取为 $0 \sim t_f$ , 记 $t_f/T$ 的整数部分为 $n+1$ )

$$u_s(t) = \sum_{k=0}^n u_0 [\varepsilon(t-kT) - \varepsilon(t-kT-T/2)] = u_0 \varepsilon(t) * \sum_{k=0}^n [\delta(t-kT) - \delta(t-kT-T/2)] \quad (2)$$

$$n = [t_f/T] - 1$$

其中 $u_0$ 是方波信号源电压幅度, $\delta(t)$ 是单位冲激信号函数,\*号表示卷积运算, $T$ 为信号周期.

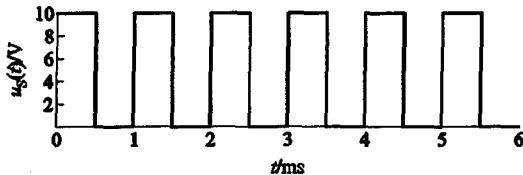


图2 因果周期方波信号. $u_0 = 10 \text{ V}$ ,  $T = 1 \text{ ms}$

依据基尔霍夫回路电压定律和电容的电压电流约束关系可得 $RC$ 一阶电路微分方程为

$$u_c'(t) + \frac{1}{\tau} u_c(t) = \frac{1}{\tau} u_s(t), \quad u_c(0_-) = 0, \quad \tau = RC \quad (3)$$

如果将信号源换为单位冲激信号,则对应零状态响应 $h(t)$ 满足的方程和初值条件为

$$h'(t) + \frac{1}{\tau} h(t) = \frac{1}{\tau} \delta(t), \quad h(0_-) = 0 \quad (4)$$

利用冲激信号函数的基本性质,上式又可以转化为齐次方程初值问题<sup>[2]</sup>

$$h'(t) + \frac{1}{\tau} h(t) = 0, \quad h(0_+) = \frac{1}{\tau} \quad (5)$$

其解为

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \varepsilon(t) \quad (6)$$

依据线性时不变连续系统理论<sup>[2]</sup>,初值为0的一阶 $RC$ 电路电容电压函数( $\tau = RC$ )为

$$u_c(t) = u_s(t) * h(t) = u_0 (1 - e^{-t/\tau}) \varepsilon(t) * \sum_{k=0}^n [\delta(t-kT) - \delta(t-kT-T/2)] = u_0 \sum_{k=0}^n [(1 - e^{-(t-kT)/\tau}) \varepsilon(t-kT) - (1 - e^{-(t-kT-T/2)/\tau}) \varepsilon(t-kT-T/2)]$$

$$[(1 - e^{-(t-kT-T/2)/\tau}) \varepsilon(t-kT-T/2)], \quad 0 \leq t < t_f \quad (7)$$

其中 $n$ 由观察时间长度 $t_f$ 决定, $n = [t_f/T] - 1$ ,此处的方括号表示取整运算.画出电容电压波形(如图3),或在示波器上观察实验 $RC$ 电路电容电压波形都能发现, $RC$ 电路在因果周期方波信号激励下,电路工作较长时间后.每个周期中电容电压最大值 $u_{cmax}$ 与方波信号电平 $u_0$ 的差值等于电容电压的最小值 $u_{cmin}$ .可见 $u_{cmax}$ 和 $u_{cmin}$ 值关于电容电压平均值 $u_{av} = (u_{cmax} + u_{cmin})/2$ 和信号源电压的平均值 $u_0/2$ 是对称的,而且 $t_{av} = u_0/2$ ,称这种现象为电压对称现象(见图3).

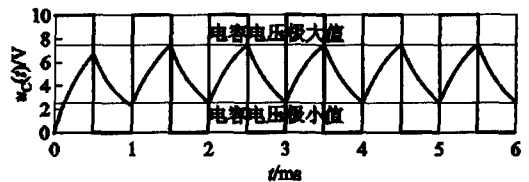


图3  $RC$ 电路电容电压波形.

$$u_0 = 10 \text{ V}, T = 1 \text{ ms},$$

$$\tau = 0.455 \text{ ms}, u_{cmin} = 2.5 \text{ V}, u_{cmax} = 7.5 \text{ V}$$

方法二:基于电容电压实验曲线的对称性导出电容电压函数解析式.这要求选择电容电压稳态响应时区中,某一开始充电时刻(也是电容放电结束时刻)作为计时起点,并取

$$u_c(0_-) = u_{cmin}, (u_{cmax} \text{ 是实验易测值}) \quad (8)$$

求解一阶 $RC$ 电路在因果周期方波信号激励下的电容电压完全响应函数.

实验室测量所选信号源周期 $T$ 较小(例如 $T = 1 \text{ ms}$ ,实际测量读数时电路已经过好几万个周期了,这时电路早已经达到稳定状态,即电容每周期充电开始( $t = kT$ )和结束放电时( $t = (k+1)T$ )的电压均为 $u_{cmin}$ (实验易测),电容在充电结束同时又是放电开始的时刻( $t = (k+1/2)T$ )电压达到最大值 $u_{cmax}$ (实验易测).我们可以选取 $k > 1000$ ,一个周期的开始时刻 $kT$ 、充电结束时刻 $kT + T/2$ ,放电结束时刻 $kT + T$ 分别重新记为 $t = 0, t = T/2, t = T$ ,则有<sup>[3]</sup>

$$u_c(t) = u_{cmin} e^{-t/\tau} + u_0 (1 - e^{-t/\tau}) \varepsilon(t) - u_0 (1 - e^{-(t-T/2)/\tau}) \varepsilon(t-T/2), \quad 0 \leq t < T \quad (9)$$

## 2 电压对称法测量一阶动态电路时间常数的计算公式

前半周期末时刻的前沿时刻 $t = (T/2)$ 充电结束,电容电压达到最大值 $u_{cmax}$ ,将 $t = (T/2)$ 代入式

(9) 并注意单位阶跃信号的性质,则有

$$u_c((T/2)_-) = u_{Cmax} = u_{Cmin} e^{-(T/2)/\tau} + u_0(1 - e^{-(T/2)/\tau}) \quad (10)$$

由上式并引用  $u_{Cmin} = u_0 - u_{Cmax}$  可导出

$$\tau^{-1} = 2f \ln\left(\frac{u_0 - u_{Cmin}}{u_0 - u_{Cmax}}\right) = 2f \ln(u_0 - u_{Cmin} - 1) \quad (11)$$

上式中,因果周期方波信号频率为  $f$ ,电压幅值为  $u_0$ ,方波占空比必须调为 0.5(即高电平与低电平各持续周期方波信号半个周期), $u_{Cmax}$  和  $u_{Cmin}$  也分别是示波器屏幕上读出的电容电压极大值和极小值.使用双踪示波器,校准示波器两个通道,ch1 通道接方波信号源,ch2 通道接 RC 电路电容电压信号,调整信号源频率  $f$  的高低,使  $u_{Cmin}$  相对于  $u_0$  很容易从屏幕上读出.实际测量时,可调整信号源频率( $f=1/T$ )的高低使  $u_{Cmin} = u_0/4, u_{Cmax} = 3u_0/4$ ,这时读数误差最小,则电路时间常数

$$\tau = 1/(2f \ln 3) = 0.4512T = 0.45512/f \quad (12)$$

### 3 一阶动态电路时间常数电压对称法测量方法及步骤

#### 3.1 软件仿真计算时间常数

如图 4 的 RC 仿真电路,双踪示波器 XSC1 的 A 通道输入方波信号  $u_s(t)$ ,B 通道输入电容两端电压信号  $u_c(t)$ ,信号发生器 XFG1 输出的方波信号作为一阶 RC 电路的激励信号,仿真电路中  $R = 10 \text{ k}\Omega, C = 2.2 \text{ nF}, u_0 = 20.0 \text{ V}$ ,方波信号源频率  $f = 10 \text{ kHz}$ .利用仿真软件绘制信号源的电压波形和电容电压波形如图 5,仿真软件输出  $u_{Cmax} = 18.131 \text{ V}, u_{Cmin} =$

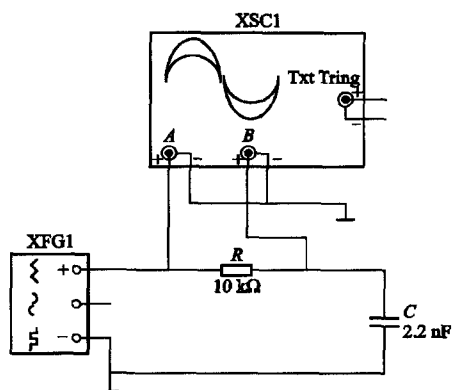


图 4 一阶 RC 波形仿真电路

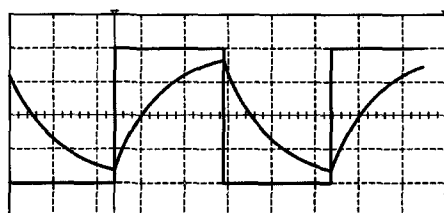


图 5 电容 C 的充放电仿真波形曲线

1.869 V,特别有  $u_{Cmin} + u_{Cmax} = u_0$ ,引用式(11)得到  $\tau_{仿} = 22.005 \mu\text{s}$ ,由仿真电路元件参数得到  $\tau_{实} = 22 \mu\text{s}$ ,相对误差  $\delta\tau = |\tau_{仿}/\tau_{实} - 1| \approx 0.22\%$ .

#### 3.2 实验测量一阶动态 RC 电路时间常数

实验电路如图 1 所示,各次实验显示在示波器上的 RC 电路稳定充放电曲线见图 6.实验所用周期方波信号源占空比为 0.5,信号电压幅值  $u_0$  保持 5 V,调整信号源频率  $f$ ,使得电容最低电压  $u_{Cmin} = 0.25u_0$ ,最高电压  $u_{Cmax} = 0.75u_0$ .元件参数及由式(12)算出的时间常数均见表 1.

表 1 RC 电路元件参数、充电最大电压、放电最低电压对应方波信号源频率数据表

实验编号	R/kΩ	C/nF	RC/μs	$u_{Cmin}/V$	$u_{Cmax}/V$	$u_0/V$	f/kHz	实验计算 $\tau/\mu\text{s}$	相对误差 $\delta\tau$
1	10	2.2	22	1.25	3.75	5	20.48	22.2	1.0%
2	20	2.2	44	1.25	3.75	5	10.22	44.5	1.2%
3	10	4.7	47	1.25	3.75	5	9.817	46.4	1.4%

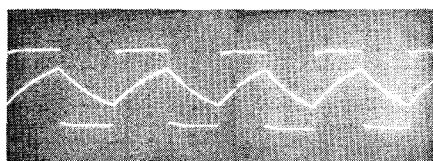


图 6 显示在示波器上的 RC 电路充放电电容电压曲线

理论上  $\tau = RC$ ,实验上  $\tau = 0.45512/f$ ,时间常数相对误差  $\delta\tau < 1.4\%$ ,小于实验所允许的误差 5%.实验结果证明,电压对称法测 RC 电路时间常数有

效、方便快捷.利用测时间常数的方法可以快速测量电容量.同理,也可通过此法测出一阶 RL 电路时间常数  $\tau$ ,进而可以测量电感的量值.

结语:本文提出的通过读取一阶 RC 电路电容电压波形极大值和极小值来计算时间常数的方法操作简便、读数方便、精度较高,这一方法已在我校信号与系统分析实验教学中应用,教学效果良好,而且此方法也为设计测量电容、电感量的新仪表找到了一种新的思路.

与社会之间的关系,提高社会责任感,提高参与社会决策的能力。

总体而言,文科物理属于新生课程,如何完善这门课程,充分发挥这门课程在普及科学文化中的作用,还需要更多的探讨。

### 参考文献:

[1] 中华人民共和国国务院. 全民科学素质行动计划纲要

[EB/OL]. [http://news.xinhuanet.com/politics/2006-03/20/content\\_4323460.htm](http://news.xinhuanet.com/politics/2006-03/20/content_4323460.htm).

[2] 中华人民共和国教育部. 普通本、专科分学科学生数 [EB/OL]. <http://www.moe.edu.cn/edoas/website18/39/info1261557845709139.htm>.

[3] 梁志国. 从报刊看我国公众对近现代物理知识的需求 [J]. 学科教育, 2002(11): 31-34.

## Physical curriculum and textbook for college students of arts

LIANG Zhi-guo

(Beijing Normal University Press, Beijing 100875, China)

**Abstract:** The aim of physical curriculum for college students of arts is to popularize science and improves scientific literacy of citizen. When authors write the textbooks, they must adopt the style which students are really like to accept, choose representative content, help students to learn scientific knowledge and have a full understanding about science and the relationship among science, technology and society.

**Key words:** arts; physics; curriculum; textbook; popularization of science

(上接 43 页)

### 参考文献:

[1] 曹新亮,杨红霞,宋永东. 测量一阶电路常数的实验方案探讨[J]. 延安大学学报(自然科学版), 2005, 24(1).

[2] 吴大正,杨林耀,王松林,等. 信号与线性系统分析 [M]. 4 版. 北京:高等教育出版社, 2008: 28-30, 60-61.

[3] 陈燕妮,杨莎,李飞亚,等. 因果周期信号激励下的动态电路响应求解方法[J]. 中国高新技术企业, 2009(19).

## Voltage symmetry method for fast measuring $RC$ time constant of the circuit

LONG Shu-ming<sup>1</sup>, WANG Feng-hua<sup>2</sup>, YANG Jun-hai<sup>2</sup>, LIU Quan-yi<sup>2</sup>

(1. Department of Physics, Shaanxi University of Technology, Hanzhong, Shaanxi 723000, China;

2. Department of Physics, Shaanxi University of Technology Telecom 07, Hanzhong, Shaanxi 723000, China)

**Abstract:** The steady-state response of the first-order dynamic circuits is causal periodic signal in the causal periodic square wave signal stimulus. The maximum value of square-wave voltage is  $u_0$ , and the maximum and minimum values of the capacitor voltage are  $u_{C_{max}}$  and  $u_{C_{min}}$ , they obey a relation:  $u_0 - u_{C_{max}} = u_{C_{min}}$ . The waveform of capacitor voltage on the time-axes has special symmetry. By using the steady-state response of  $RC$  circuit voltage of symmetry, we can export the circuit time constant  $\tau$ , and the formula for capacitance measurements provides a fast and reliable way.

**Key words:** first-order dynamic circuits; time constant; steady-state response; symmetry