

# 光学荣誉课报告

费昶帆 20307130006 物理学系

## 1 原理

前提介绍, 教材空白, 文章空白

考虑光的方孔衍射.

对于点光源产生的单色球面波有

$$U(\mathbf{r}, t) = -\frac{a_1}{r} e^{ikr} \cdot e^{-i\omega t} \quad (1)$$

其是亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2) U = 0 \quad (2)$$

的解.

**画图**

在这里我们假设  $U$  只依赖于空间坐标  $r$

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{a_1}{r} e^{ikr} \quad (3)$$

注意当我们据此进行计算的时候, 认为光源是理想, 简单的, 即不包含任何其他特殊特性, 比如偏振. 由基尔霍夫积分公式, 接收屏上任意一点的复振幅满足

$$U(Q) = \frac{1}{i\lambda} \int U_0 K(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (4)$$

其中  $K(\theta)$  为倾斜因子. **解释**

这一部分自己推导, 使用惠更斯原理

也就是说, 在接收屏上任意一点的光强, 是衍射屏上所有产生子波源的叠加.

将球面入射波带入结果

$$U(Q) = \frac{1}{i\lambda} \int U_0 K(\theta) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} dS \quad (5)$$

设  $\xi, \eta$  为在衍射孔上的点, 屏距离狭缝  $R'$ , 狭缝距离光源  $R$ , 有

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + R'^2} \quad (6)$$

$$r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + R^2} \quad (7)$$

得到完整形式的积分公式

$$U(Q) = \frac{1}{i\lambda} \iint \frac{a_1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + R^2}} e^{ik\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + R^2}} K(\theta) \frac{e^{ik\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + R'^2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + R'^2}} d\xi d\eta \quad (8)$$

积分面的分析.

这个积分的解析解非常难求, 即使在傍轴条件下  $K(\theta) \approx 1$  也无法直接求出解析解. 需要近似

## 1.1 近似

更一般地讨论

考虑到缝的尺度远小于距离,  $K(\theta) = \cos(n, r)$  同时我们可以把

$$U(Q) = \frac{1}{i\lambda} \int U_0 K(\theta) \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} dS \quad (9)$$

变成

$$U(Q) = \frac{\cos(n, R)}{i\lambda R R'} \iint U_0 e^{ik(r+r')} d\xi d\eta \quad (10)$$

同时有

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} = \sqrt{R^2 - 2(x\xi + y\eta) + (\xi^2 + \eta^2)} \\ &= R - \frac{x}{R}\xi - \frac{y}{R}\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} \\ &= R - \alpha\xi - \beta\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  是方向余弦.

令缝到接收屏的方向余弦为  $\alpha_0$  和  $\beta_0$

$$r' = R' - \alpha_0\xi - \beta_0\eta + \frac{\xi^2 + \eta^2 - (\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'} \quad (12)$$

则有

$$e^{ik(r+r')} = e^{ik(R+R')} e^{-ik\Phi} \quad (13)$$

其中

$$\Phi = (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} + \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} + \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R'} \quad (14)$$

代入有

$$U(Q) = \frac{U_0}{R R' i\lambda} \cos(n, R) e^{ik(R+R')} \iint e^{-ik\Phi} d\xi d\eta \quad (15)$$

## 1.2 夫琅和费衍射

当我们认为平行光入射并且有远场条件, 即

$$R \rightarrow \infty, \quad R' \rightarrow \infty \quad (16)$$

有夫琅和费衍射简单情况, 这里不再展开

## 1.3 菲涅尔衍射

画图考虑宽  $2d$  长  $2h$  的方孔,  $\xi$  为宽度方向,  $\eta$  为长度方向, 有对称性 (解释) 得到

$$\beta - \beta_0 = 0, \quad \alpha^2 = \alpha_0^2 = 1 - \gamma^2 \quad (17)$$

有

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (\xi^2 + \eta^2 - \alpha^2 \xi^2) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (\gamma^2 \xi^2 + \eta^2) \quad (18)$$

可以看出

$$\gamma = \cos(n, R), k = \frac{\lambda f}{\omega} = 2\pi\lambda \quad (19)$$

令

$$\begin{cases} \Phi_\xi = \frac{1}{2}\gamma^2 k \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \\ \Phi_\eta = \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \end{cases} \quad (20)$$

得到

$$U(Q) = -\frac{U_0\gamma}{RR'i\lambda} e^{ik(R+R')} \int_{-d-\xi_D}^{+d-\xi_D} e^{i\Phi_\xi\xi^2} d\xi \int_{-h}^{+h} e^{i\Phi_\eta\eta^2} d\eta \quad (21)$$

$\xi, \eta$  积分上下限

这就被简化成了一个较为简单的菲涅尔积分.

### 1.3.1 单缝菲涅尔衍射

由对称性, 简单地认为  $\eta$  的上下限为无穷

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Phi_\eta\eta^2} d\eta = \sqrt{2\lambda f \frac{1+i}{2}} \quad (22)$$

其中

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad (23)$$

另一方面

$$\int_{-d-\xi_D}^{+d-\xi_D} \exp(i\Phi_\xi\xi^2) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2\Phi_\xi}} [F(w_2) - F(w_1)], \quad \left. \begin{matrix} w_2 \\ w_1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{2\Phi_\xi}{\pi}} (\pm d - \xi_D) \quad (24)$$

其中  $F$  为菲涅尔积分

$$F = C + iS = \int_0^w e^{i\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau \quad (25)$$

然后就可以得出最终结果

$$U(Q) = \frac{1-i}{2} a_1 \frac{e^{ik(R+R')}}{R+R'} [F(w_2) - F(w_1)] \quad (26)$$

其中令  $U_0$  为

$$U_0 = a_1 \frac{e^{k(R+R')}}{R+R'} \quad (27)$$

为点源射到接收面上的, 如果没有狭缝的复振幅!

(解释傍轴近似)

代入实验室数据, 并对  $U(Q)$  取模就得到了屏上的相对光强

$$I/I_0 = \frac{1}{2} [(C(\omega_2) - C(\omega_1))^2 + (S(\omega_2) - S(\omega_1))^2], \quad \left. \begin{matrix} w_2 \\ w_1 \end{matrix} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\lambda f}} \left( \frac{Rx}{R+R'} \pm d \right) \quad (28)$$

### 1.4 Cornu 曲线

考虑复变函数  $F = C + iS$  在复平面上的点, 即

$$z = x + iy, \quad (x, y) = (C(\omega), S(\omega)) \quad (29)$$

则有

$$\frac{dF}{d\omega} = e^{i\frac{\pi}{2}\omega^2}, \quad \left| \frac{dF}{d\omega} \right| = 1, \quad |dF| = |d\omega| \quad (30)$$

画出图 1 所示的曲线 (解释其含义)

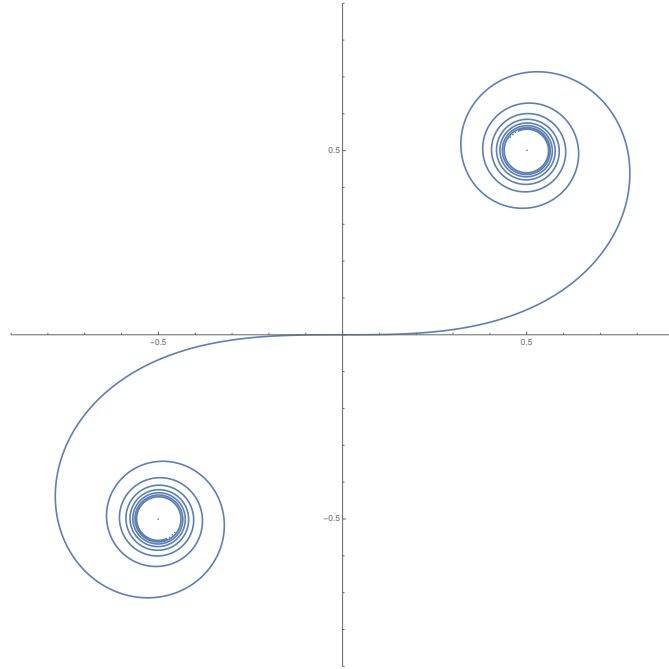


图 1: Cornu 曲线

## 2 单缝菲涅尔衍射

菲涅尔衍射:

搜索可知, 在网络上有许多对于单缝衍射的模拟, 但是他们的准确性以及可读性都较差. 通过实验模拟, 发现具有较大误差. 于是进行自己的计算以及模拟.

因为对称性, 考虑由点光源扩展而成的无穷长线光源, 此时三维球面波可以退化为

$$\frac{1}{r_0} e^{ikr} \quad (31)$$

其他模拟程序与实验结果的较大误差就出自这里, 由于其简单地认为波源离狭缝足够远, 其波动可以近似为亥姆霍兹方程的平面波解.

仔细想这样是可以的, 考虑展开

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{d} - \frac{x^2}{2d^3} + o(x^3) \quad (32)$$

$$\frac{1}{r'} = R + \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{x\xi + y\eta}{R} + o(x^2 + y^2) \quad (33)$$

在后者近似到一阶时, 前者的第二项也被抛去, 即退化成了平面波.

近似方式没有错, 但是在实验室精度条件下是不够的. 并且实验室的激光强度不可以达到要求, 不能检测出相应的条纹

写了一个计算程序, 可以模拟缝宽距离不同时其结果, 以及相应的图样 (比较以及结果)

**误差来源: 缝宽测量, 高斯光束, 距离测量**

其他形式的衍射在理论上已经可以计算出来, 但是由于时间和篇幅的原因只同时制作了单边衍射的图样, 圆盘以及圆孔衍射理论上来说会更简单, 留后制作.