

圆孔的非涅耳衍射

赖汉明, 李荣基, 阮志仁

(香港中文大学 物理系, 中国 香港)

摘要: 得到了圆孔非涅耳衍射光强分布的表达式, 此式由贝塞尔函数的数列(或 Lommel 函数)给出, 因此很容易利用普及的数学软件算出结果. 并且利用 CCD 照相机量度了衍射光强分布, 与运算的结果作了比较, 也与 Burch 在 1985 报导的结果作了比较.

关键词: 圆孔; 非涅耳衍射; 贝塞尔函数; Lommel 函数; CCD 照相机

中图分类号: O 436.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-0712(2009)10-0031-04

由于 CCD 照相机的普及, 圆孔的非涅耳(或其他)衍射图像可以很容易利用普通的低功率激光来观测, 但是除了沿对称轴方向外, 光强是不容易用解析方法得到的. Burch^[1] 约在 20 多年前花了不少气力去计算衍射的光强分布, 运算结果和他所测得的衍射光强分布相吻合. 他的目的可能是把非涅耳衍射引入大学物理实验, 然而他的运算必须运用几个变换和近似, 一般不易达到.

本文中, 我们首先提出较简单的分析解. 我们证明了圆孔的非涅耳衍射的基尔霍夫积分可以用贝塞尔函数的数列来表示, 而这数列的实部和虚部都是含有两个变量的 Lommel 函数^[2], 这个简单的分析解使衍射的光强分布很容易利用通用的数学软件算出结果. 据我们所知, 这个分析解是首次得到的. 但应指出, 我们的方法和结果与聚焦的三维光强分布有些相似^[3]. 我们也发现 Walker 做了很相似的工作^[4], 但他的大意令其结果在沿对称方向是错误的.

在实验方面, 我们利用 CCD 照相机来录取衍射图像的光强. 比较文献[1]用的光电倍增管, 我们用 CCD 相机有以下两个优点: 1) CCD 照相机较普及; 2) 光电倍增管被强光照射容易损坏, 而 CCD 照相机则不易损坏, 因而更适合用于大学物理的实验教学.

1 计算非涅耳-基尔霍夫积分

考虑单色、频率为 ω 的平面波, 垂直照射一半径为 a 的圆孔, 则根据非涅耳-基尔霍夫标量理论^[5], 省去 $\exp(-i\omega t)$ 的因子, 在正前方小角度内的波动场是

$$F(r) = \iint \frac{\exp(ikR)}{R} da' \quad (1)$$

这里的积分包括整个圆孔的面, $k = \omega/c$ 是波数, $R = r - \rho'$, r 和 ρ' 分别是从小孔中心算起的观测点和源点的距离(见图 1).

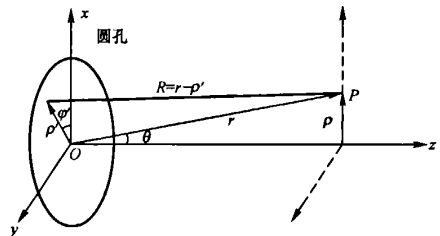


图 1 计算非涅耳-基尔霍夫积分的坐标.
O 是圆孔中心, P 是观测点

我们假定 $r \gg a$, 因此分母的 R 便等于 r , 并可以提出积分号外, 而相位中的 R 展开至 a/r 的二次方, 便得到

$$kR = k[r + (\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi')/2r] \quad (2)$$

注意源点用极坐标变量 ρ', ϕ' 表示, 而观测点的笛卡儿坐标位置是 $(\rho, 0, z)$ (见图 1), 因此

$$R = r\sqrt{1 + (\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \phi')/r^2}$$

在普通的非涅耳衍射中, $r < ka^2$, 而 ρ 比 a 小或同一数量级, 这近似其实是要求

$$ka^2/r \ll (r/a)^2 \text{ 或 } (z/a)^3 \gg ka \quad (3)$$

$\rho \ll r$ 常常有效, 而 $z = \sqrt{r^2 - \rho^2}$. 例如 $a \approx 0.5 \text{ mm}$, 对氩氖激光, $ka \sim 5 \times 10^3$. 则 $z > 50a \approx 2.5 \text{ cm}$. 若 $z \geq ka^2$, 即使 ρ 比 a 大, 近似仍然有效. 由式(2)得

收稿日期: 2009-01-04; 修回日期: 2009-06-08

作者简介: 赖汉明(1945—), 男, 广东兴宁人, 香港中文大学物理系教授, 主要从事光学、电动力学和等离子体研究工作.

$$F(r) = \frac{\exp(ikr)}{r} \int_0^a \rho' \exp\left(\frac{-ik\rho'^2}{2r}\right) d\rho' \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{-ik\rho\rho'\cos\varphi'}{r}\right) d\varphi' \quad (4)$$

角积分得出零阶贝塞尔函数 $J_0(\xi)$, 经转换积分变量使得

$$F(r) = \frac{2\pi r}{k^2 \rho^2} \exp(ikr) \int_0^\beta \xi J_0(\xi) \exp(i\alpha\xi^2) d\xi \quad (5)$$

其中 $\alpha = r/2k\rho^2$, $\beta = k\rho r/r$. 因为

$$\xi^{m+1} J_m(\xi) = \frac{d}{d\xi} [\xi^{m+1} J_{m+1}(\xi)] \quad (6)$$

利用分部积分得出

$$F(\rho, z) = \frac{2\pi i}{k} \exp[ik(r+\alpha^2/2r)] \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^m (a/\rho)^m J_m(k\rho/z) \quad (7)$$

这里我们利用了式(3), 并把贝塞尔函数变量中的 r 设定为 z . 注意到式(7)中奇数 m 项是虚数, 而偶数 m 项是实数, 我们可以利用 Lommel 函数

$$U_n(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (u/v)^{n+2m} J_{n+2m}(v) \quad (8)$$

把衍射光强分布[式(7)的绝对值平方]写成

$$I(u, v) = \frac{4\pi^2}{k^2} [U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v)] \quad (9)$$

其中

$$u = ka^2/z, v = k\rho r/z = u\rho/a \quad (10)$$

是两个方便的参数, ka^2 是瑞利距离, u 是距离的倒数, 而对于固定的 u , v 是横向位置.

我们必须指出, Walker^[4]做了相似的工作, 但他的结果和式(9)比较是分母多了一个 u^2 , 我们发现这差别会导致不合理的结果. 他似乎未能察觉到, 在写下最后结果之时, 他所忽略的系数会与这个 u^2 相消掉^[7].

2 光强分布的一些特征

首先我们利用贝塞尔函数和 Lommel 函数的性质探讨一些特殊情况下的结果, 这和文献[3]中的会聚焦光束在焦点附近三维的光强分布相似.

1) 当 $z \gg ka^2$, u 和 v 都趋近零时, 式(7)中的首项最重要, 可得

$$I_A(\theta) = \left(\frac{\pi a^2}{z}\right)^2 \left(\frac{2J_1(v)}{v}\right)^2 = I_0 \left(\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right)^2 \quad (11)$$

其中 $\rho/z = \theta$. 当然, 这是预料的圆孔夫琅禾费衍射图像, 在 $v_1 = 3.833$, $v_2 = 7.016$, $v_3 = 10.174$, \dots , 对应 $J_1(v) = 0$ 的非零根, 光强为零.

2) 沿对称轴

当 ρ 和 v 都趋近零, 贝塞尔函数满足

$$J_m(v) \rightarrow (v/2)^m / m! \quad (12)$$

而且, 从指数的展开式, 式(7)可写成

$$F(0, z) = \frac{2\pi i}{k} \exp(ikz) \left(1 - \exp\frac{ika^2}{2z}\right) \quad (13)$$

由此, 沿对称轴的光强变化是

$$I_0(z) = \frac{16\pi^2}{k^2} \sin^2 \frac{ka^2}{4z} = \frac{16\pi^2}{k^2} \sin^2 \frac{u}{4} \quad (14)$$

这是熟知的结果: 即是在以下的位置

$$u = 2q\pi \quad \text{或} \quad z_q = ka^2/2q\pi = a^2/q\lambda \quad (15)$$

其中 $q = 1, 2, 3, \dots$, q 为奇(偶)数时光强为极大(零)值. z_1 是最远的极大光强位置, 比这位置更远处, 光强随距离的平方衰减. 注意: 奇数 q 的极大光强值是相同的.

现在我们要指出文献[4]中沿对称轴的式子基本上是式(14)除以 u^2 , 这在无穷远(即 $u=0$)处显然给出不合理的结果, 更甯说它不能给出在熟知位置上的光强极大值.

3) 沿几何影的边沿

根据以下等式^[6]:

$$\exp(-i\xi) = J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(\xi) \quad (16)$$

在式(7)中, $\rho = a$ (即 $u = v$) 的光场可以简化成

$$I_B(z) = \frac{\pi^2}{k^2} [1 - 2J_0(u) \cos u + J_0^2(u)] \quad (17)$$

对菲涅耳衍射, 我们一般有 $z \ll ka^2$, 即 $u \gg 1$, 因此 $I_B(z) \approx \pi^2/k^2$, 也就是在任何较近(即较大的 u)的横向平面上, 光强在 $\rho = a$ 处是一个常数, 也意味着光强为 v 的函数对较大的 u (即较小的 z) 有长一些的尾巴(图2可证实此点).

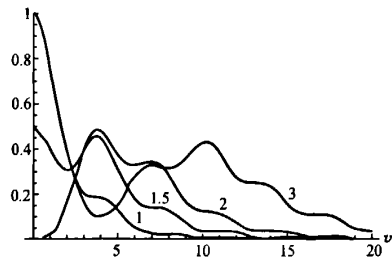


图2 在距离圆孔为 z 的4个横向平面上光强随 v 的变化 ($u = 2\pi, 3\pi, 4\pi$, 和 6π , 分别对应 $q = 1, 1.5, 2$, 和 3 . 注意 $z = ka^2/u$.)

3 菲涅耳衍射光强分布和比较

3.1 理论结果

利用现今的微型计算机和很普及的软件中的贝塞尔函数, 很容易利用式(9)计算在固定 z 或 u 的菲

涅耳衍射光强分布[我们曾验证把式(8)中的前 20 项加起来便可准确地得到 $U_1(u, v)$ 和 $U_2(u, v)$], 在图 2 中, 我们举出 4 个例子, u 的值分别为 $2\pi, 3\pi, 4\pi$, 和 6π (即 $u_q = 2q\pi, q = 1, 1.5, 2,$ 和 3), 描出随 v 变化的归一化光强, 即 $k^2 I(u, v) / 16\pi^2$. 注意由于式(14), 对称轴上的光强在 q 为偶数时为零, 在为奇数时为极大, 而在两者之间则是一半, 再者, 对较大的 u 值, 光强有较长的尾巴. 这些特性令我们很容易分辨 4 条曲线, 也很容易验证极大和极小常在 $J_1(v) = 0$ 的根的地方出现.

3.2 结果比较

文献[1]计算和测量了 $q = 2, 3, 4, 5,$ 和 6 的非涅耳衍射光强, 其结果都和我们的理论结果相当吻合. 图 3 是一个 $q = 3$ 或 $u = 6\pi$ 的具体比较: 连续曲线是我们的理论结果; 虚线是文献[1]的实验结果(我们取了它对称轴两边结果的平均); 大圆点是其理论结果(文献[1]用两种方法计算, 一是近似法, 另一是直接数值积分, 两种方法的结果在这图的尺度下没有分别); 实心三角形表示我们利用 CCD 照相机得到 $q = 3$ 的实验结果(实验详见下段).

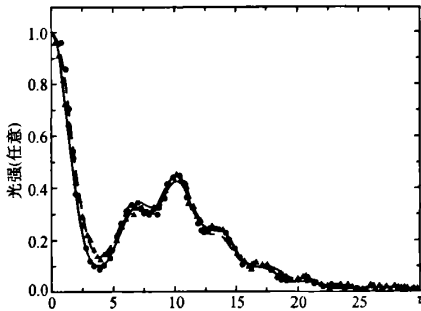


图 3 数值运算和实验结果与文献[1]中的结果比较

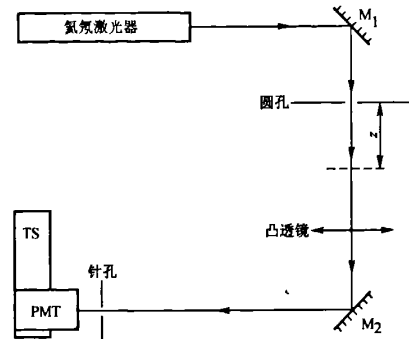
4 实验

实验是用从 Edmund Industrial Optics 公司购买的直径为 $(1\ 000 \pm 5)\ \mu\text{m}$ 的圆孔. 氦氛激光(Uniphase)的功率约为 7 mW, 激光器到圆孔的距离约为 6 m, 用 CCD 照相机(Electrim U1000)纪录衍射图像时, 我们利用背景白光(加在 CCD 芯片上, 强度约为 $0.1\ \text{mW}/\text{cm}^2$)使 CCD 照相机对光强的反应是线性的. 图 3 的结果是已把背景白光强度减去. 为了增加空间分辨率和信噪比, 光强分布是 20 个图像的平均, 而每个图像是把 CCD 照相机沿径向随机移动约 0.5 mm 所得. 为了得到光较弱的部份, 同一个图像我们用了 3 个不同的曝光时间(20 ms, 40 ms, 和 60 ms)来纪录, 光强曲线则用曝光时间来归一化.

我们也用了光电倍增管来录取衍射图像的光强, 实验装置(图 4)和文献[1]中的相似, 衍射图像利用凸透镜放大, 根据薄凸透镜公式得

$$z = l - \frac{f(L-l)}{(L-l-f)}$$

其中, l 是透镜至圆孔的距离, L 是针孔至圆孔的距离, f 是透镜的焦距. 用光电倍增管和用 CCD 照相机光强很接近, 但后者效果较佳.



M_1, M_2 : 平面镜; TS: 直线运动平台; PMT: 光电倍增管; 虚线表示 CCD 照相机的感光芯片

图 4 实验装置图.

我们还利用 CCD 照相机来量度沿对称轴的光强分布, 包含了最远的 3 个光强极大点, 如图 5 所示. 图中的曲线是式(14)的结果, 和实验结果合理地吻合. 注意 3 个极大值在距圆孔 $z_1 = 7.9\ \text{cm}, z_2 = 13.2\ \text{cm}, z_3 = 39.5\ \text{cm}$ 处出现, 而光强数值相同.

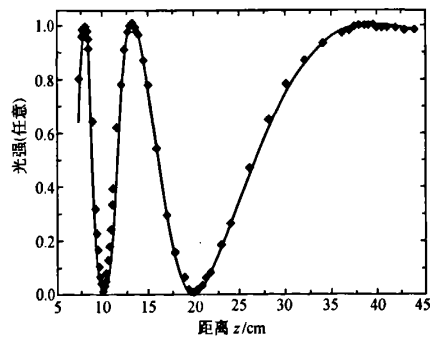


图 5 沿对称轴光强随 z 的变化. 点是实验的结果, 实线是理论结果

5 结论

我们证明了圆孔的非涅耳衍射的基尔霍夫积分可以用贝塞尔函数的数列来表示, 而这数列的实部和虚部都是含有两个变量的 Lommel 函数, 这个简单的分析解使衍射的光强分布很容易利用通用的数学软件算出结果. 我们还利用 CCD 照相机和氦氛激

光来量度圆孔的非涅耳衍射的横向平面上的光强变化及沿对称轴的光强分布,实验结果和理论合理地吻合,我们也与 Burch 的结果^[1]作了比较.

感谢:感谢万善慈先生在这工作前期的参与.

参考文献:

- [1] Burch D S. Fresnel diffraction by a circular aperture [J]. *Am J Phys* 1985, 53: 255.
- [2] Watson G N Theory of Bessel Functions [M]. 2nd ed. Cambridge University Press, 1944: 537-550
- [3] Born M, Wolf E. Principles of Optics [M]. 7th (expanded) ed. Cambridge University Press, 1999: 484-492.
- [4] Walker J. The Analytic Theory of Light [M]. Cambridge University Press, 1904: See his Eq. (66) on p. 147 in particular.
- [5] See, for example, Fowles G R. Introduction to Modern Optics [M], Holt, Rinehart, and Winston 1968: 110-111; or Born M, Wolf E. Principles of Optics [M]. 7th (expanded) ed. Cambridge University Press, 1999: 484-492.
- [6] See, for example, Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of Integration, Series, and Products [M]. translation ed. by Jeffrey A. Academic Press 1965: 8.511(4) p. 973.
- [7] Walker J. The Analytic Theory of Light [M]. Cambridge University Press, 1904: 147. Note that $u^2 \rho_0^2$ in (63) is simply a constant for $\rho_1 \gg \rho_0$.

Fresnel diffraction by a circular aperture

LAI Hon-ming, LEE Wing-kee, YUEN Chi-yan

(Department of Physics, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: An analytic expression in terms of Bessel's functions or Lommel's functions of two variables, is obtained for the intensity distribution of the Fresnel diffraction by a circular aperture. The Fresnel pattern in any transverse plane at an axial distance from the aperture is then easily computable using commonly available software packages. Comparison with Burch's theoretical results (in 1985) is made and satisfactory agreement with experiment is found. The light intensity patterns are recorded by the use of CCD camera, which may be adapted as a student experiment in universities.

Key words: circular aperture; Fresnel diffraction; Bessel function; Lommel function; CCD camera

(上接 30 页)

现在,把此数值代入式(1),得 x 的 10 位精度的结果为

$$x = \frac{1.055\ 272\ 156 \times 10^{-9}}{2.828\ 427\ 124} = 3.730\ 950\ 489 \times 10^{-10}$$

于是得 $\sqrt{2}$ 的精确数值为

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562 + x = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 9$$

达到了 20 位有效数字的精度.为可靠起见,去掉最

后 1 位数字(四舍五入),得

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 049$$

我们得到了可靠的 19 位有效数字的精度.从电脑中那台超高精度计算器知,32 位精度的数值为

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 7$$

可见,我们上面的结果中,第 20 位确是靠不住的.

Significant figure and the calculator

KA Xing-lin

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Significant figure in numerical calculation is illustrated and the general features of the calculator are given.

Key words: significant figure; numerical calculation; calculator