

# 波尔共振实验“异常现象”的研究

董霖, 王涵, 朱洪波

(北京邮电大学理学院, 北京 100876)

摘要: 对波尔共振实验中的两个“异常现象”进行了研究. 研究发现, 轴承摩擦和弹簧非线性效应是造成阻尼振动实验中出现“异常现象”的主要因素; 电机转速的不稳定性能够导致受迫振动实验中“异常现象”的出现. 通过添加两个非线性项和一个频率修正项, 经数值计算表明, 实验中的“异常现象”能得到很好的分析和解释.

关键词: 波尔共振仪; 非线性物理; 数值计算

中图分类号: O 322 文献标识码: A 文章编号: 1000-0712(2010)02-0057-04

在高校实验教学中, 波尔共振仪被普遍用于研究扭摆的阻尼振动和受迫振动<sup>[1-4]</sup>. 通过大量反复的实验, 我们观察到了一般线性理论无法解释的两个“异常现象”, 一是在阻尼振动实验中, 固有周期随着阻尼系数的增大反而减小; 二是在受迫振动实验中, 幅频特性曲线共振点对应的  $\omega_r/\omega_0$  不总是小于 1

基于以上两个“异常现象”, 我们考虑了轴承摩擦和弹簧非线性效应的影响, 并在原有的阻尼振动方程中加入了两个非线性项. 数值结果表明, 修正后的动力学方程能够很好的解释这一个“异常现象”; 但通过数值分析和实验探索, 我们发现即使考虑了轴承摩擦和弹簧非线性效应的影响, 第二个“异常现象”仍无法得到解释. 考虑到电机不可能处于绝对稳定状态, 我们对动力学方程进行了进一步修正, 结果表明电机转速的不稳定性会导致第二个“异常现象”的出现.

## 1 动力学的线性理论

### 1.1 阻尼振动

在大多数的文献中<sup>[1-4]</sup>, 扭摆的阻尼振动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (1)$$

解的形式为

$$\theta = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

其中  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , 阻尼振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (3)$$

可见理论上振动周期  $T$  随着阻尼  $\beta$  的增加而增大.

### 1.2 受迫振动

摆轮在弹性力矩、阻尼力矩、周期性力矩三者共同作用下的动力学特征由如下方程描述:<sup>[1]</sup>

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = M \cos(\omega t) \quad (4)$$

其通解的形式为

$$\theta = \theta_1 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha) + \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

由于第一项振幅随时间按指数衰减, 稳定振动的解为

$$\theta = \theta_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

其中

$$\theta_2 = \frac{M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (7)$$

$$\varphi = \arctan\left[\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] \quad (8)$$

振幅的极大值为

$$\theta_r = \frac{M}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (9)$$

$$|\varphi_r| = \arctan\left[\frac{\omega_r}{\beta}\right] \quad (10)$$

显然有  $|\varphi_r| < \frac{\pi}{2}$  以及

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0 \quad (11)$$

## 2 实验中的“异常现象”

### 2.1 扭摆的阻尼振动

在阻尼振动实验中, 我们发现了第一个“异常现象”, 即随着阻尼系数  $\beta$  的增加, 阻尼振动周期反而减

小(如图 1所示),这与式(3)是矛盾的.

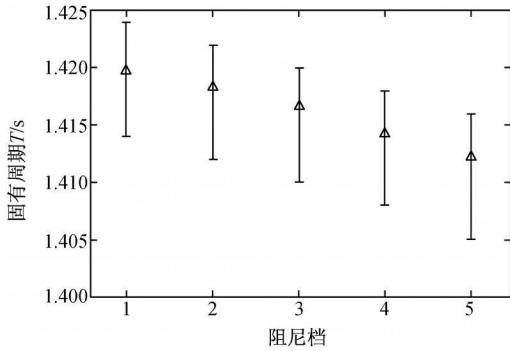


图 1 电磁阻尼档与振动周期变化关系

## 2.2 扭摆的受迫振动

受迫振动实验主要研究扭摆的幅频特性曲线和相频特性曲线,理论上应由式(7)、(8)描述.但在实际实验中我们发现了第二个“异常现象”,即幅频特性曲线共振点对应的  $\omega_r/\omega_0$  有时大于 1<sup>[5]</sup>,这与式(11)是矛盾的.表 1 给出了实验结果,可以看出在阻尼 3 档共振峰 88°附近,相位差为 -86°时  $\omega_r/\omega_0$  小于 1,而相位差为 -92°和 -95°时  $\omega_r/\omega_0$  大于 1;阻尼 4 档的情况与此类似(见表中波纹线处).

表 1 受迫振动的幅频特性和相频特性实验数据

$\beta = 3$	振幅 / (°)	相位差 / (°)	$\omega_r/\omega_0$
	87	-77	0.995
	87	-81	0.997
	<u>88</u>	<u>-86</u>	<u>0.999</u>
	<u>88</u>	<u>-92</u>	<u>1.002</u>
	<u>88</u>	<u>-95</u>	<u>1.003</u>
	86	-104	1.006
	83	-108	1.008
$\beta = 4$	振幅 / (°)	相位差 / (°)	$\omega_r/\omega_0$
	68	-73	0.992
	69	-78	0.994
	70	-80	0.996
	<u>71</u>	<u>-85</u>	<u>0.999</u>
	<u>71</u>	<u>-91</u>	<u>1.001</u>
	70	-95	1.003
	69	-97	1.006
	68	-105	1.008

## 3 对“异常现象”的分析和解释

针对阻尼振动实验中的第一个“异常现象”,我们认为弹簧的非线性效应和轴承摩擦的影响是不可忽略的,而针对受迫振动实验中的第二个“异常现象,我

们认为电机转速的不稳定性起着重要的作用.分析过程如下.

### 3.1 阻尼振动

#### 3.1.1 弹簧非线性效应

在阻尼振动实验中,我们测得振幅随时间的变化关系如图 2所示.我们注意到  $\theta-t$  的指数拟合曲线在大摆角时与实验结果偏离较大.考虑到摆角大于 120°时,弹簧的形变较为显著,我们认为此时弹簧的非线性效应已不可忽略.

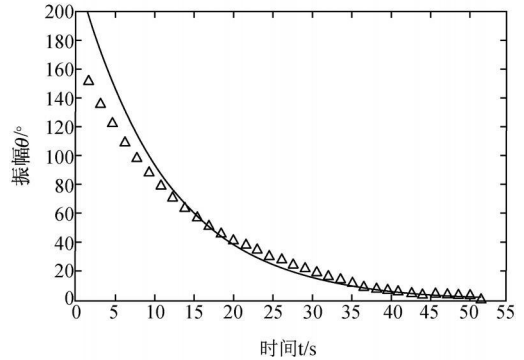


图 2 阻尼振动曲线的指数拟合

我们对实验中用到的卷曲弹簧做了两种理论上的修正假设.将弹性系数作为摆角的函数,进行泰勒展开至一阶项,并考虑了对称和不对称两种模式.

#### 对称弹簧

$$T = K_1(\theta)\theta = -(\omega_0^2 + \kappa|\theta|)\theta \quad (12)$$

#### 非对称弹簧

$$T = K_2(\theta)\theta = -(\omega_0^2 + \kappa\theta)\theta \quad (13)$$

其中常数  $\kappa > 0$

#### 3.1.2 轴承摩擦的影响

为了更好的观察轴承摩擦对阻尼振动的影响,我们将电磁阻尼置为 0 档,测量摆角随时间的变化曲线,并对所得数据做分段指数拟合,在  $\theta$  每变化 10°的区间内对时间  $t$  做一次指数拟合(小角度时区间取得更小),指数值即为阻尼系数  $\beta$  区间的平均值即为  $\theta$  给出的结果如图 3所示.

可以看到,当摆角大于 20°时阻尼系数  $\beta$  基本为一个稳定值,而在小于 20°时阻尼系数  $\beta$  随着  $\theta$  减小而迅速增大.这一现象可以由轴承摩擦的影响来说明——轴承摩擦效应由轴承和轴承之间的摩擦力产生,在转动速度较小时静摩擦力较大,而在转动速度达到一定的临界值后摩擦力保持稳定.为了定量描述这一规律,我们采用轴承摩擦的一个经验公式

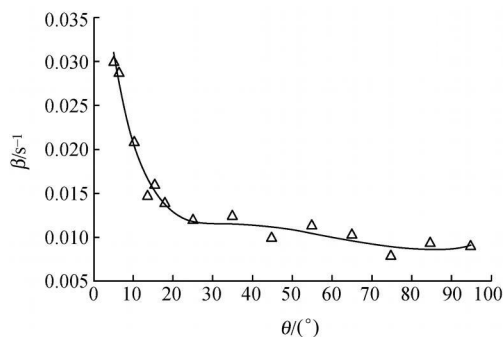


图 3 轴承阻尼系数随摆角的变化关系

$$f = a\ddot{\theta} - b\dot{\theta} + c \quad (14)$$

令常系数  $a > 0$   $b > 0$   $c > 0$  使得  $f$  随  $\dot{\theta}$  增加而逐渐减小并趋于常数值。同时控制好常数的取值范围, 使这一摩擦力仅体现在小角度范围内。

综合以上两种因素, 将修正项代入式 (1) 中, 我们可以得到修正后的非线性方程分别为:

对称模式

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\theta - \kappa|\dot{\theta}|\theta + c \quad (15)$$

不对称模式

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\theta - \kappa\theta^2 + c \quad (16)$$

根据实验中的具体情况, 我们取参数  $b \approx \beta/100$   $\omega_0^2 = 18$   $c = 7$  且  $\kappa \approx \omega_0^2/1000$  运用 MATLAB 工具软件中 Runge-Kutta(4, 5) 算法对式 (15) 和 (16) 进行了数值求解。并将参数  $\beta$  和  $\kappa$  同时作为振动周期  $T$  的两个独立变量, 投影到  $T - \beta$  平面, 结果如图 4 和图 5 所示。在两图中, 3 族曲线分别对应于  $\kappa = 0.024$   $0.029$   $0.034$  可以看到, 在对称模式下周期  $T$  随着  $\beta$  的增大而增大, 而在不对称模式下周期  $T$  随着  $\beta$  的增大而减小, 后者与实验中的“异常现象”相符合。因此弹簧应属于不对称模式, 在物理上可以这样理解——卷曲弹簧拉伸和压缩的弹性模量不相同, 从而造成拉伸和压缩的恢复力矩是非对称的, 这一点在理论和实验上都是合理的。

### 3.2 受迫振动

由式 (11) 可知理论上总有  $\omega_r < \omega_0$ , 然而实验中还出现了  $\omega_r > \omega_0$  的“异常”情况。为了解释这一现象, 我们分别考虑了外加驱动项为稳定驱动和不稳定驱动两种情形。

#### 3.2.1 稳定驱动

由 3.1 节的讨论可知, 我们应当在弹簧为非对称模式的基础上考虑受迫振动问题, 即在式 (16) 中加入周期性驱动力矩  $M \cos(\omega t)$ , 这样原有受迫振动方程

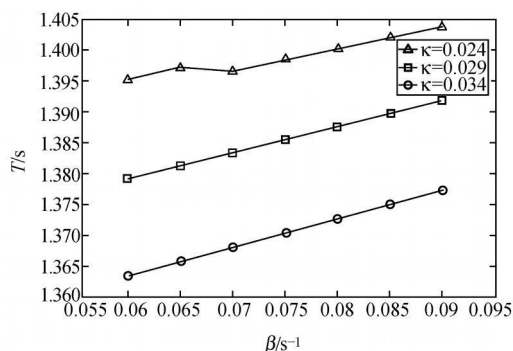


图 4 对称模式下周期  $T$  随阻尼系数  $\beta$  的变化曲线

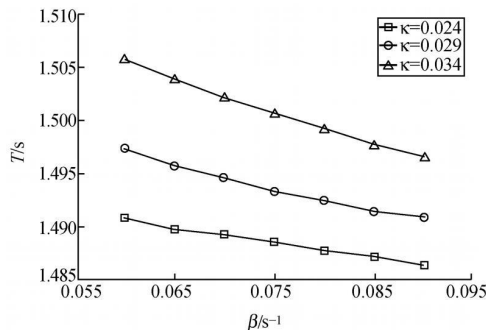


图 5 非对称模式下周期  $T$  随阻尼系数  $\beta$  的变化曲线

式 (4) 变为

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + b\dot{\theta}^2 - \omega_0^2\theta - \kappa\theta^2 + c + M \cos(\omega t) \quad (17)$$

我们仍然用 Runge-Kutta(4, 5) 算法求解式 (17), 数值结果表明: 即使考虑了轴承摩擦和弹簧非线性的影响, 第二个“异常现象”仍无法得到合理的解释。

#### 3.2.2 不稳定驱动

考虑到电机不可能处于绝对稳定状态, 我们尝试了对电机角速度的两种可能修正, 并对动力学方程进行了进一步的改造:

##### 1) 电机角速度随机误差修正

电机角速度的随机误差是指电机的角速度满足均值为  $\omega$  误差范围为  $\varepsilon$  的随机值。修正模型为

$$\omega' = \omega + \varepsilon \quad (18)$$

其中  $\varepsilon$  是一个大小不超过  $0.01\omega$  的随机数, 在统计上满足均匀或正态分布。图 6 和图 7 分别给出了这两种情况下的数值计算结果。可知在该修正下,  $\omega/\omega_0$  存在大于 1 的情况。

##### 2) 周期性修正

电机角速度的周期性误差修正, 是指电机组内部设置有反馈电路, 该反馈电路使驱动频率随时间做小幅周期性变化。修正模型为

$$\omega' = \omega(1 + \varepsilon \cos \omega q t) \quad (19)$$

其中  $\varepsilon$  是一个大小不超过  $0.01$  的常数,  $q$  为比例系数 (用于衡量  $\omega'$  相应于  $\omega$  变化的快慢)。图 8 给出了

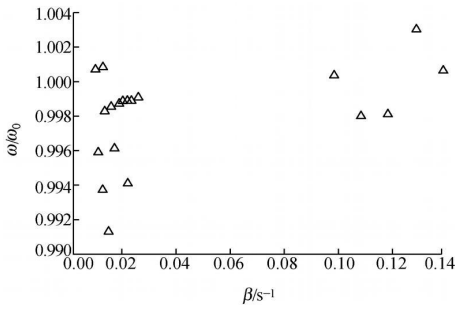


图 6 均匀分布随机误差  $\varepsilon$  的影响下共振点处  $\omega_r/\omega_0$  与  $\beta$  的数值结果

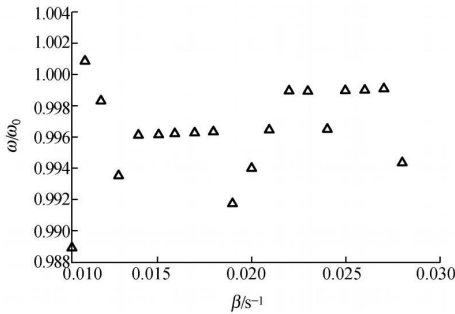


图 7 正态分布随机误差  $\varepsilon$  的影响下共振点处  $\omega_r/\omega_0$  与  $\beta$  的数值结果

$\omega_r/\omega_0$  随  $q$  的变化关系, 在  $0.002 \leq q \leq 0.012$  的范围内, 我们发现  $\omega_r/\omega_0$  正好越过了 1 的界限, 这说明电机转速的周期性变化确实会影响  $\omega_r/\omega_0$  大小.

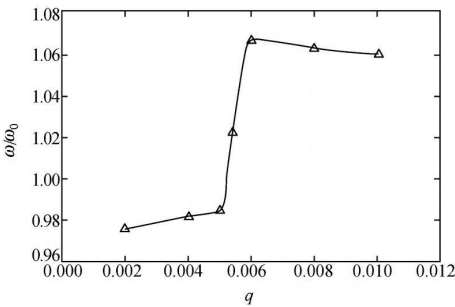


图 8 共振点处  $\omega_r/\omega_0$  随参量  $q$  的变化关系

### 4 结论

在本文中, 我们首先指出了波尔共振实验中普遍存在的两个“异常现象”: 1) 阻尼振动实验中, 固有周期随着阻尼系数的增大反而减小; 2) 受迫振动实验中, 幅频特性曲线共振点对应的  $\omega_r/\omega_0$  不总是小于 1. 我们在考虑轴承摩擦和弹簧非线性效应的基础上, 通过数值求解很好地解释了第一个“异常现象”, 得到了符合实验结果的修正方程式 (16) 以及实验上的依据; 进一步我们考虑到电机不可能处于绝对的稳定状态, 因而对动力学方程再次进行了修正, 尝试了对电机驱动圆频率的 3 种修正方式. 数值结果表明, 电机转速的不稳定确实会导致第二个“异常现象”的出现.

总之, 对“用波尔共振仪研究受迫振动”实验中普遍存在的两个“异常现象”, 我们做出了合理的分析和假设并得到了与实验结果相符合的理论.

### 参考文献:

- [1] 肖井华, 蒋达娅, 朱洪波, 等. 大学物理实验 [M]. 2 版. 北京: 北京邮电大学出版社, 2007, 90
- [2] 陈铭南, 何雨华. 用波尔共振仪研究受迫振动 [J]. 工科大学物理, 1999, 9(2): 26-28
- [3] 许少磊, 孙文光, 何雨华. 波尔共振仪相位差测量方法改进 [J]. 物理与工程, 2004, 14(5): 36-38
- [4] 朱鹤年. 波尔共振仪受迫振动的运动方程 [J]. 大学物理, 2006, 25(11): 40
- [5] 张才国. 非线性受迫振动振幅跳跃现象讨论 [J]. 五邑大学学报 (自然科学版), 2005, 19(2): 34-37

## Studies on two unexpected phenomena from the Pohl resonance experiment

DONG Lin, WANG Han, ZHU Hong-bo

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract** Two unexpected phenomena got from the experiment—torsion pendulum of free and forced rotational oscillations using the Pohl resonance equipment are analyzed. Mechanical damping and nonlinear effects of coil spring are found to be mainly responsible for the unexpected phenomenon. Furthermore, unstable driving frequency under some conditions can be the possible explanation for the second unexpected phenomenon. The linear dynamical equations are modified to become a nonlinear equation whose numerical solution explains the unexpected phenomena successfully.

**Key word:** Pohl resonance torsion pendulum; nonlinear physics; numerical calculation