


HTML5模拟二维Ising模型

presented by 尹宇阳 蔡铭豪



目录

PART01

伊辛模型理论

PART02

网页设计

PART03

程序算法及效果展示

PART04

未来规划以及问题

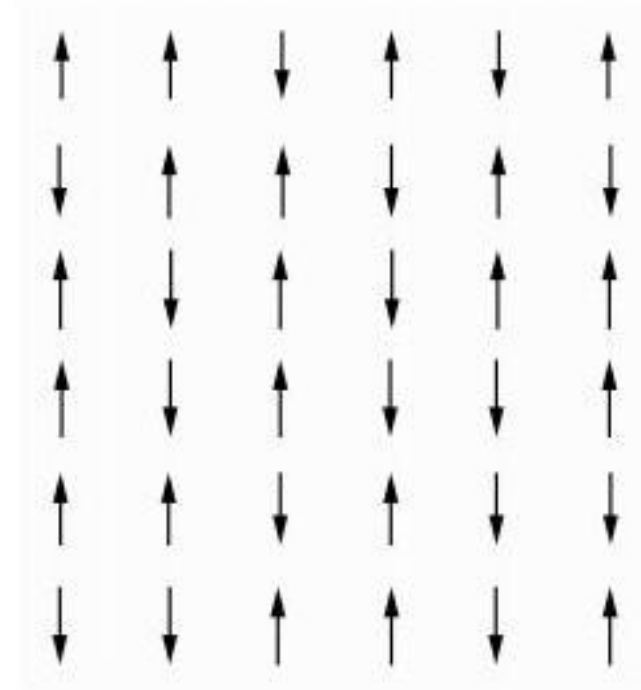
PART01

伊辛模型理论

伊辛模型

- 如图，每个格点的方向只有向上或向下两者状态，但临近的自旋之间有相互作用。
- 体系的哈密顿量为

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu B \sum_{i=1}^N s_i$$



系统性质

外磁场为零时，当 $T \rightarrow 0$ 时，所有格点趋于同方向，呈现强磁性。

$T \rightarrow \infty$ 时，系统热运动占主要作用，格点方向呈现随机性，系统整体不带磁性，呈现出对称性。

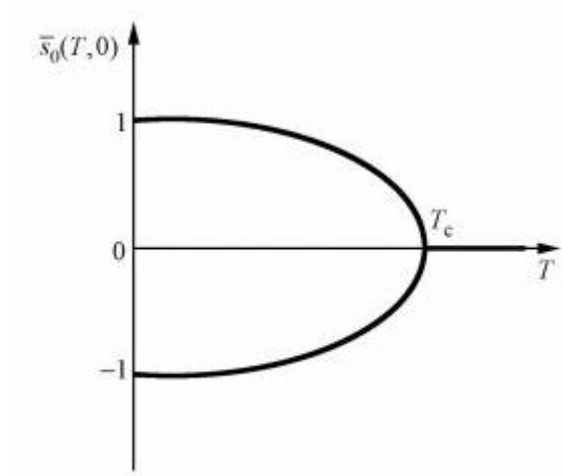
所以必定存在某个温度 T_c ，温度高于 T_c 时系统无磁性，低于 T_c 时系统磁性加强。 T_c 就是临界温度，也就是相变点。

对称性自发破缺

当 $T > T_c$ 时, $\bar{\mu} = 0$, 系统处于顺磁相。宏观状态保持与微观哈密顿量相同的对称性, 没有向上和向下的区别。

当 $T < T_c$ 时, $\bar{\mu} \neq 0$, 系统处于铁磁相。宏观状态不再是向上和向下对称了, 宏观状态比起微观哈密顿量的对称性降低了, 而且这是由于系统内部自身相互作用引起的, 故称为对称性自发破缺。

自发的对称性破缺是连续相变的普遍特征。



当逐渐降温到 T_c 时, 系统磁性开始出现分化, 要么向下, 要么向上, 最终平均的磁化强度 \bar{s} 趋向于+1或-1。

- 由于哈密顿函数中包含自旋与自旋之间的相互作用，严格计算配分函数需要使用平均场近似，将相互作用的耦合能转化为外磁场强度，用近独立的模型计算配分函数，获得临界温度

- $T_c = \frac{2J}{k}$

- 平均磁化率为

- $\bar{s} \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}} \quad (T \rightarrow T_c^-)$

- 1944年，昂萨格推导出了二维伊辛模型的严格解.

- 临界温度

- $T_c = \frac{2.269J}{k}$

- 平均磁化率为

- $\bar{s} \sim (T_c - T)^{\frac{1}{8}} \quad (T \rightarrow T_c^-)$

二维伊辛模型严格解

由于推导过于复杂，这里只列出二维伊辛模型严格解的结论

$$\bar{s} = 0 \begin{cases} 0 & T > T_c \\ [1 - \sinh(\frac{2J}{kT})^{-4}]^{\frac{1}{8}} & T < T_c \end{cases}$$

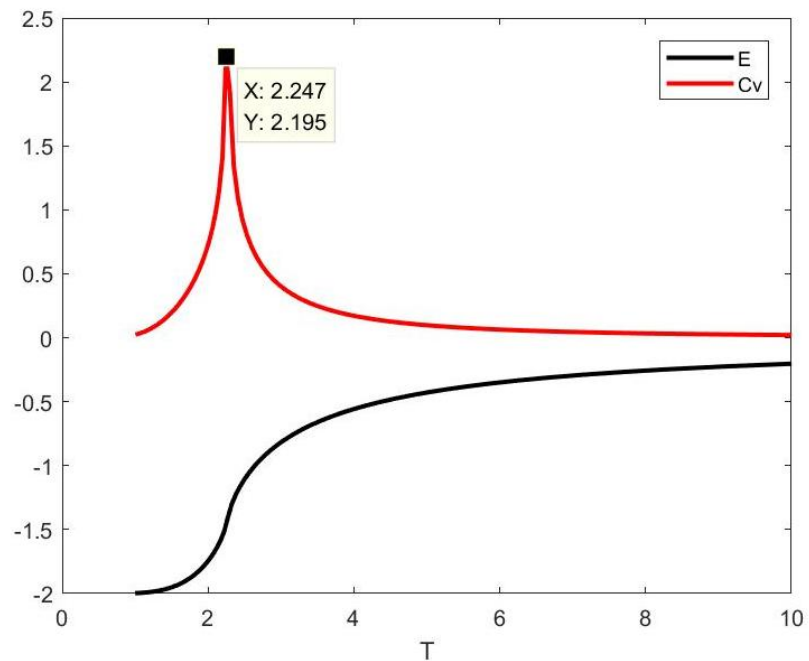
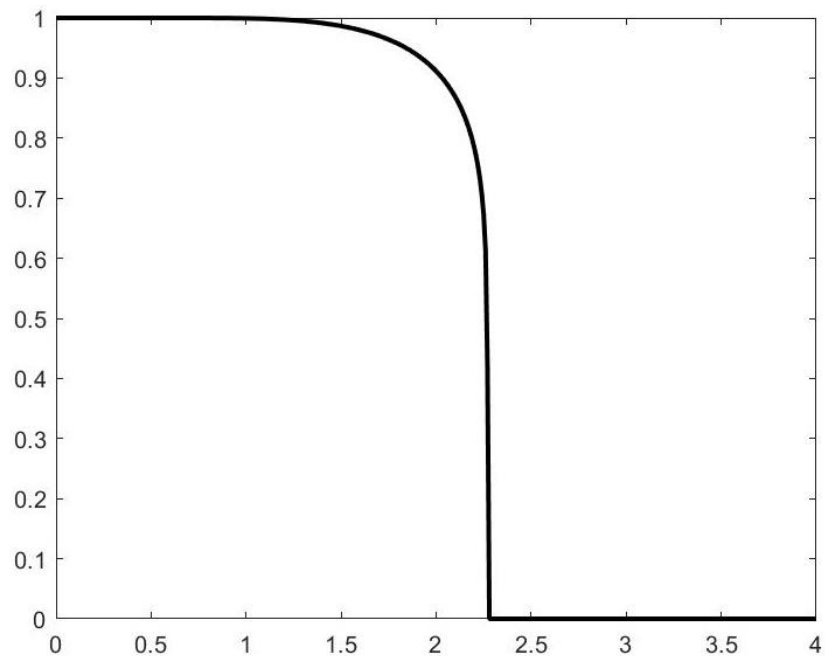
令 $\sinh(\frac{2J}{kT})=0$ ，解得 $T_c \approx \frac{2.269J}{k}$ ，令 $T = T_c - \delta T$ ，小量泰勒展开化简可得

$$\bar{s} \sim (T_c - T)^{\frac{1}{8}}$$

当 $T_c \rightarrow 0$ 时，可得结果为1，所有的格点同向，平均磁化率为1。

设耦合强度 $J=k$ ，可得 $\bar{s}-T$ 图像，根据左图，可以判断出相变点的参数。





另一个能够判断相变的参数是比热，比热在临界温度时会突然增大，表面临界温度附近变化有个小温度变化，需要吸收极大能量，这也很符合相变的特点。



PART02

网页设计

文件展示

名称	修改日期	类型	大小
 ising.css	2022/4/6 23:05	CSS 源文件	1 KB
 ising.html	2022/4/6 23:05	QQBrowser HT...	2 KB
 ising.js	2022/4/6 23:05	JavaScript 文件	3 KB
 terra.js	2022/4/6 23:05	JavaScript 文件	21 KB

网页设计

2维Ising模型模拟展示

其中黄色表示方向朝上，蓝色表示方向朝下。以下为各参数含义：

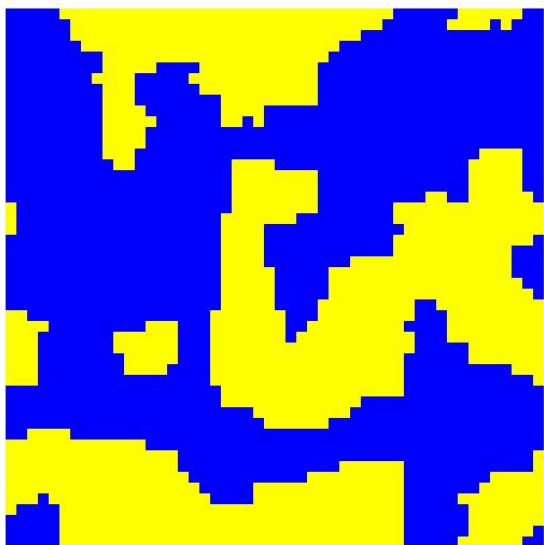
随机性：每一轮操作选点的概率，可以通过调整随机性影响速度

耦合系数：一般为1或-1,0表示没有相互作用

温度：低温时最终方向趋向于一致

外磁场：可以调节外磁场施加影响，正值会增大向上的概率，反之亦然

制作者：尹宇阳 蔡铭豪



平均磁矩数 $m = -0.1416$

总磁矩数 $M = -354$

耦合系数 $J = 1$

温度 $T = 0.2$

外磁场 $h = 0$

随机率:	<input type="text" value="0.1"/>
耦合系数:	<input type="text" value="1.0"/>
温度:	<input type="text" value="0.2"/>
外磁场:	<input type="text" value="0.0"/>

停止 开始 下一轮 重置

```
ising.html X
is ing.html > html
1 <html>
2 <head>
3 <meta http-equiv="content-type" content="text/html; charset=UTF-8">
4 <meta charset="UTF-8">
5 <title>Ising model</title>
6 <link rel="stylesheet" href="ising.css">
7 </head>
8
9 <body>
10 <div id="model">
11 <p><h2>2维Ising模型模拟展示</h2>其中黄色表示方向朝上，蓝色表示方向朝下。以下为各参数含义：<br>随机性：
12
13 </p>
14 <p> 制作者：尹宇阳 蔡铭豪<hr></p>
15 <div id="placeholder"></div>
16 <div>
17 <script src="terra.js"></script>
18 <script src="ising.js"></script>
19 </div>
20 <div id="parameters">
21 <p>平均磁矩数  $m = <span class="value" id="printm">0</span></p>
22 <p>总磁矩数  $M = <span class="value" id="printM">0</span></p>
23 <p>耦合系数  $J = <span class="value" id="printJ">0.1</span></p>
24 <p>温度  $T = <span class="value" id="printT">0.1</span></p>
25 <p>外磁场  $h = <span class="value" id="printH">0</span></p>
26 <form id="input">
27 随机率:<input id="R" value="0.1" step="0.1" type="number"><br>
28 耦合系数:<input id="J" value="1.0" step="0.1" type="number"><br>
29 温度:<input id="T" value="0.2" step="0.1" type="number"><br>
30 外磁场:<input id="H" value="0.0" step="0.1" type="number">
31 </form>
32 </div>
33 </div>
34 <button onclick="stop()">停止</button>
35 <button onclick="play()">开始</button>
36 <button onclick="next()">下一轮</button>
37 <button onclick="reset()">重置</button>
38 </body></html>$$$$$ 
```

PART03

程序算法及效果展示

算法介绍

- Monte Carlo算法 (Metropolis采样)

Monte Carlo是一类随机方法的统称。这类方法的特点是，可以在随机采样上计算得到近似结果，随着采样的增多，得到的结果是正确结果的概率逐渐加大，但在获得真正的结果之前，无法知道目前得到的结果是不是真正的结果。

对于Ising模型，即随机初始化，然后进行这样一个过程：选取一个候选点位，然后判断其新选择的概率，在该模型中即

$$\begin{cases} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} & \Delta E \geq 0 \\ 1 & \Delta E \leq 0 \end{cases}$$

这个值是Metropolis采样的结果，可以通过推导得到，它

满足细致平衡的条件从而满足Monte Carlo算法

程序算法

- 1. 随机给出平面上各个点阵的分布
- 2. 随机选择其中一个点阵
- 3. 计算翻转点阵*i*的值, 即 $s_i \rightarrow -s_i$, 所带来的能量差 ΔE , 则点阵的翻转概率 P 为
$$P = \begin{cases} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} & \Delta E \geq 0 \\ 1 & \Delta E \leq 0 \end{cases}$$
- 4. 取一个 $[0,1)$ 随机数, 若随机数小于翻转概率 P , 则翻转
- 5. 重复 步骤 2~4

程序实现

- terra.js

这是一个是一个用于生物模拟和细胞自动机的Javascript库，我们采用这个库的一些功能很方便的实现我们的模拟过程

• 核心代码展示

```
terra.registerCA({
  type: 'Ising',
  colorFn: function () { return this.state === 1 ? '255,255,0,1' : '0,0,255,1'; },
  process: function (neighbors, x, y)
  {
    counter+=1;
    if (counter==N)
    { // Magnetization表示总磁矩数
      document.getElementById("printM").innerHTML = magnetization;
      document.getElementById("printm").innerHTML = magnetization*1.0/N;
      counter=magnetization=0;
    } // 运行完一轮后将计数器counter归零
    magnetization +=this.state;
    randomness = parseFloat(document.getElementById("R").value);
    if (Math.random() < randomness)
    {
      // 读取三个参数：耦合系数 温度 外磁场大小
      coupling = parseFloat(document.getElementById("J").value);
      temp = parseFloat(document.getElementById("T").value);
      field = parseFloat(document.getElementById("H").value);

      document.getElementById("printJ").innerHTML = coupling;
      document.getElementById("printT").innerHTML = temp;
      document.getElementById("printH").innerHTML = field;

      deltaE = 0; // 对于该点是否反转计算deltaE
      for (var i = 0; i < neighbors.length; i++)
      | deltaE += neighbors[i].creature.state;
      deltaE *= coupling*this.state; // 相互作用能对能量影响
      deltaE += field*this.state; // 计算外磁场对能量影响

      if (deltaE<0) // Metropolis采样条件
      | this.state *= -1; // 进行翻转
      else if (Math.random() < Math.exp(-deltaE*0.5/temp))
      { // 计算翻转概率, k=1
      | this.state *= -1;
      }
    }
  }
  return true;
}
```


效果展示

- [ising.html](#)



PART04

未来规划以及问题



未来规划

- 希望通过程序来展现求解二维Ising模型的相变过程，得到（逼近）临界温度 T_c
- 如何逼近临界温度 T_c ：由于温度高于 T_c 时系统无磁性，低于 T_c 时系统磁性加强，对于我们的一个确定参数 T ，可以运行完全程后通过多次取平均来得到该温度下较稳定的一个平均磁化数，然后通过拟合不断逼近，比如先找到临界温度在2.2-2.3之间，然后对于2.2-2.3再次细分继续逼近，得到一个较精确的解。
- 同时能得到临界温度周围的最终状态，这样可以清晰地展示出相变过程

一些问题

- 最主要问题就是运行得到结果过慢的问题，由于逼近临界温度需要大量的数据支持，目前算法不足以支撑我们进行这样一个逼近过程，还需要优化算法
- 其次就是由于高温时运行很长时间仍有大幅度涨落，很难确定运行终点
- 最后就是由于初次制作网页，显得有些粗糙

参考文献

[1] <https://rileyjshaw.com/terra/>

[2] 林宗涵 热力学与统计物理学.第二版 北京大学出版社

[3] http://phylab.fudan.edu.cn/lib/exe/fetch.php?media=course:introduction_html5.zip

感谢聆听!

