目录

1. 混沌

混沌(Chaos)是指具有确定性演化规律的动力学系统因初值敏感而导致其结果不规则、不可预测的现象。尽管没有一个严格的数学上的定义，混沌系统具有一些普遍的特征：

(1) 决定系统演化的动力学规律是确定的、非线性的；

(2) 系统的演化是非周期性的；

(3) 系统的演化是有边界的，其变量不应当随着演化而发散；

(4) 系统具有初值敏感性。

本说明文档将介绍几种经典的混沌模型和几种描述混沌过程的图像，这些图像在网站上也多有展示。

2. Logistic映射

2.1. 虫口模型

Logistic映射起源于对一定区域内人口数量的模拟。鉴于把“死亡”、“出生”、“灭绝”之类的字眼用在人口上未免显得有些冷酷，一般我们称之为“虫口模型”(或兔口模型？但是兔兔这么可爱……)。

区域内的最大虫口承载量为A，当前一代的虫口数为P，则下一代的虫口数可以用一个简单的模型表示为：

$$f(P)=rP\left(1-\frac{P}{A}\right), \tag{2.1.1}$$

当$P\ll A$时，$f(P)=rP$，呈现出指数增长的态势，而当$P\lesssim A$时，$f(P)\to 0$，也就是到达最大承载量后虫口会因资源短缺而灭绝。方程(2.1.1)可以写成迭代的形式，用n表示第n代虫口数量：

$$P_{n+1}=rP_n\left(1-\frac{P_n}{A}\right),$$

此时作$x=P\,/\,A$，便得到Logistic方程(或Logistic映射)：

$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n).$$

这是一个迭代方程，一般r取值范围为$[0,4]$(该区间内系统有明显的周期性或混沌性特征行为)。对于不同的r，迭代多次会趋向于不同的结果。该迭代方程有两种方式描述：时间序列图**(time series plot)**和迭代映射图**(iteration mapping plot)**。

2.2. 两种描述方式

2.2.1. 迭代映射图

迭代映射图便于展现一维系统迭代过程。它的基本思路是：对一个迭代方程$y=f(x)$，将之与$y=x$绘制在同一坐标系下，给定一个初值x_0，画出它在迭代方程中的位置(x_0,x_1)，然后沿着水平线找到与$y=x$的交点(x_1,x_1)，然后沿着垂直线找到与$y=f(x)$的交点(x_1,x_2)……这样每次找到的与$y=f(x)$交点的横坐标都对应了x_n，纵坐标都对应了x_{n+1}，实现了迭代。下面

是四组Logistic映射的迭代映射图，Figure 2.1迭代会收敛于$x_\infty = 2$一个点，Figure 2.2收敛于两个点，Figure 2.3收敛于四个点，Figure 2.4经过多次迭代仍然无法收敛。前三幅图对应的是周期行为(更具体地，称它们分别具有单周期、双周期、四周期的结构)，最后一幅图对应的是混沌行为。

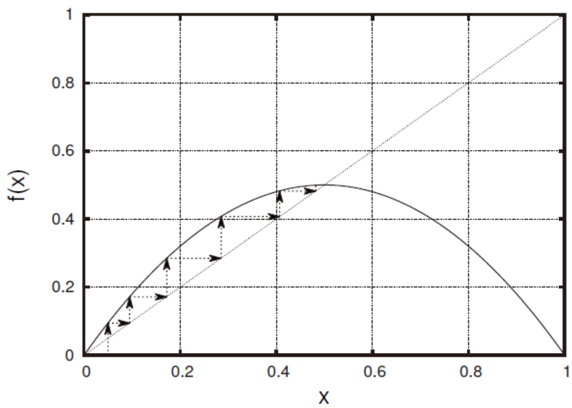

Figure 2.1: $r = 2$，$x_0 = 0.05$的迭代映射图。

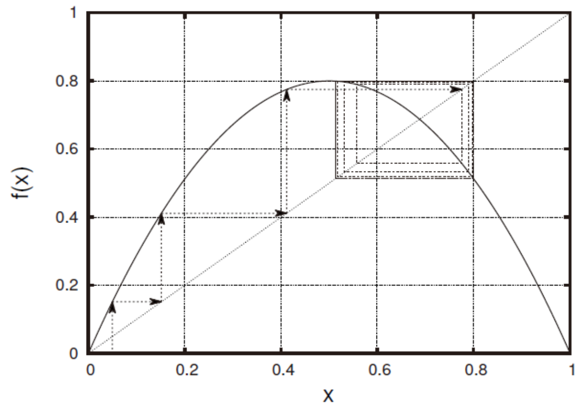

Figure 2.2: $r = 3.2$，$x_0 = 0.05$的迭代映射图。

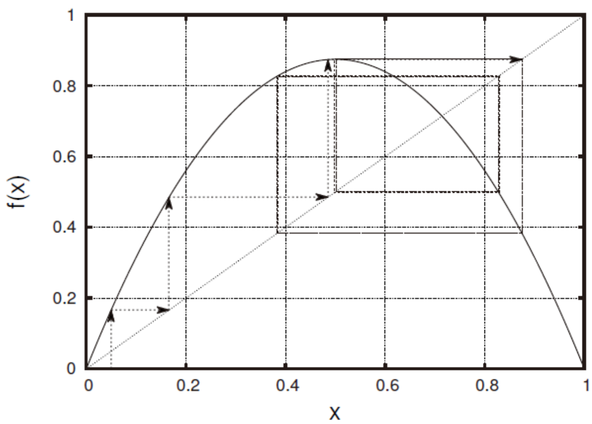

Figure 2.3: $r = 3.5$，$x_0 = 0.05$的迭代映射图。

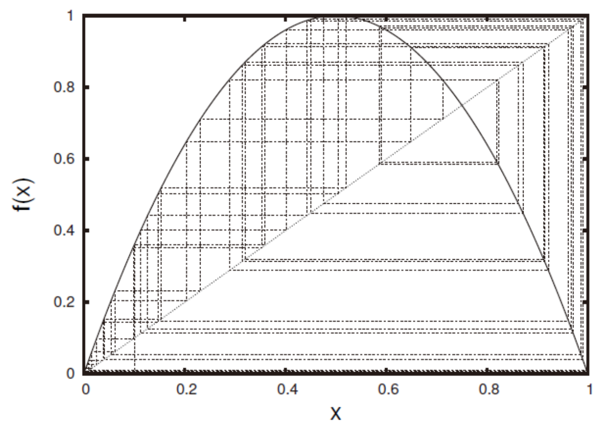

Figure 2.4: $r = 4.0$，$x_0 = 0.05$的迭代映射图。

迭代映射图的好处是能够直观地展现迭代的过程，缺陷是对收敛性的反映并不直观，且只对一维系统和迭代方程有效。对于高维的混沌系统，尤其是微分方程描述的连续系统，无法用迭代映射图描述。

2.2.2. 时间序列图

时间序列图是描述变量的常见方式，对于连续变量(通常由微分方程解得)，时间序列图是连续的$x - t$图，对于离散变量(通常由迭代实现)，时间序列图是离散的$x - n$图。Logistic映射作为迭代方程，显然应当用后者描述。

对于不同的r值，Logistic系统的变量x会展现出不同的行为。对于Section 2.2.1.中的四幅图，可以分别给出它们的时间序列图。

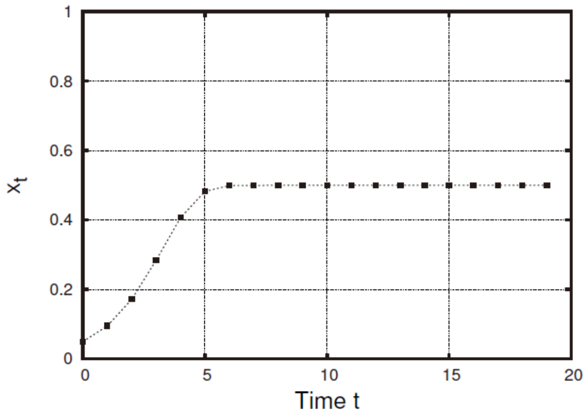

Figure 2.5: $r=2$，$x_0=0.05$的时间序列图。

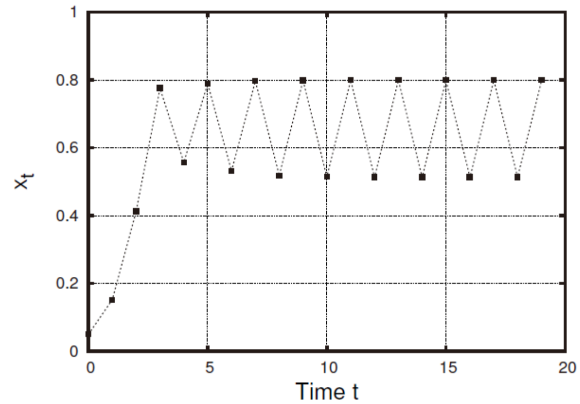

Figure 2.6: $r=3.2$，$x_0=0.05$的时间序列图。

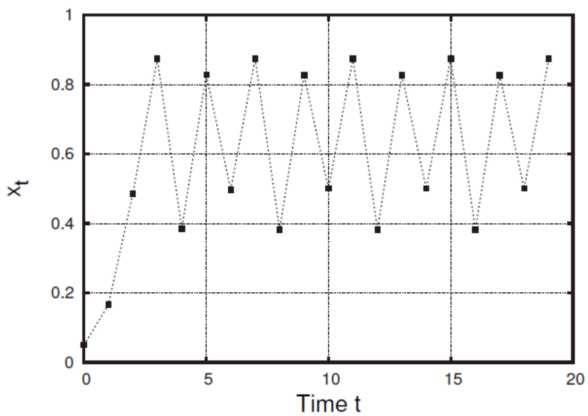

Figure 2.7: $r=3.5$，$x_0=0.05$的时间序列图。

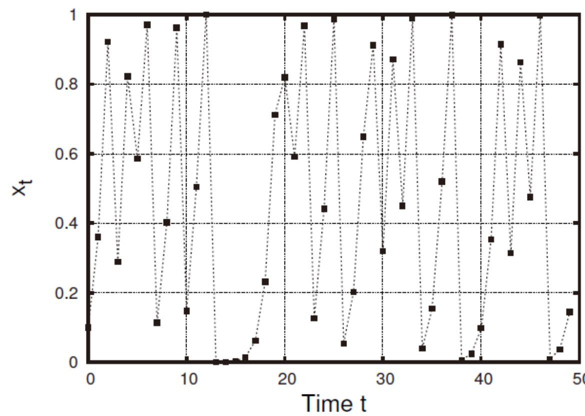

Figure 2.8: $r=4.0$，$x_0=0.05$的迭代映射图。

时间序列图可以直观地反映变量的收敛情况，对于高维系统，也可以作出每个变量的时间序列图进行表征。

2.2.3. 倍周期分岔图

上面给出的信息表明在不同的r下，对于任意初值，Logistic系统会收敛到不同的值(或者形成混沌)。如此我们可以作出$r-x_\infty$图，横轴是参数r，纵轴是在这个参数下迭代的收敛值，这样作出的图有周期性的倍分岔结构，称为倍周期分岔图。

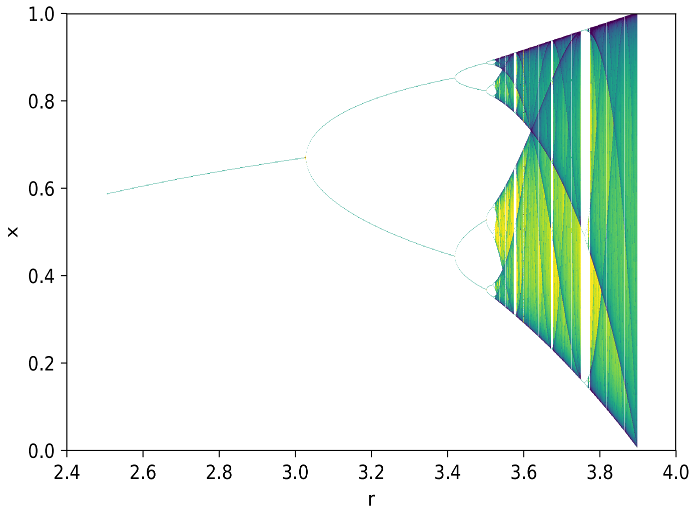

Figure 2.9: Logistic方程的倍周期分叉图(bifurcation diagram)

该图表明：(1)整体而言，r在3.6附近时，系统从非混沌向混沌状态转变，其演化结果不再是有限的确定的值；(2)在具有周期性的非混沌区域($r \lesssim 3.6$)，收敛点的数量随着r增大而成倍增长，也就是其稳态的周期数成倍增大(这也是其被称为“倍周期分叉”的原因)；(3)在进入$r \gtrsim 3.6$后，r在某些区间中仍然得到周期性的、非混沌的结果(例如计算表明$r = 3.84$具有周期3的结构，并且在这附近倍生出周期6、周期12的结构)。

在非线性系统中，上面提到的收敛点被称为“吸引子”(attractor)。对于趋于稳态的非混沌系统，演化的终点(也就是稳态)正是这些吸引子，称为平庸吸引子；而对于混沌系统，吸引子往往是相空间的一个体积，它一方面将体积外的运动吸引进来，另一方面使体积内的运动相互排斥，这样的吸引子称为奇异吸引子。就全局而言，因为奇异吸引子的作用，系统在相空间内的轨道被束缚在一定的区间内，是稳定的；但是对局部来说，由于其内部的轨道相互排斥，是不稳定的。全局的稳定性和局部的不稳定性，是混沌系统的一个重要特征。

2.2.4. 总结

Logistic映射作为最简单的一种混沌系统，可以引入一些混沌理论中的基础概念，提供一些重要的描述混沌行为的方法，同时它具有的特征结构在高维系统中也具有普适性。不过，其缺点也是明显的：作为一维不连续系统，它无法展现出系统在相空间中的变化。