

惠斯通电桥实验中对互易桥臂测量结果的不确定度评定

原 媛, 沈元华, 赵在忠, 金浩明, 马秀芳, 孙燕青, 马世红

(复旦大学物理学系物理教学实验中心, 上海 200433)

摘 要: 在惠斯通电桥实验中, 采用互易桥臂法测量电阻, 常采用 2 种传统方法评定不确定度, 但结果比标准电阻的标准不确定度还小, 其原因是互易桥臂的前后两次测量不是完全独立, 它们是同一待测量用同一仪器以不同方法测量的结果. 改进的测量方法中, $B_{类}$ 不确定度由方和根法计算, B_2 类不确定度等于标准电阻的不确定度.

关键词: 惠斯通电桥; 互易桥臂; 不确定度评定

中图分类号: O441.1; O4-34

文献标识码: A

文章编号: 1005-4642(2014)07-0033-04

1 引 言

惠斯通电桥是一种利用比较法精确测量电阻的电路, 用惠斯通电桥测电阻值的实验在很多大学都有开设. 桥臂标称值 R_A 和 R_B 相等时, 为了消除桥臂电阻标称值与实际值之间的偏差引起的系统误差, 实验过程中常常采用互易桥臂的方法, 以达到消除桥臂电阻系统误差的目的^[1-2]. 以往的教学过程中常常从不确定传递公式出发对互易桥臂的测量结果进行不确定度的评定, 这种方法我校已经沿用了几十年, 不少兄弟院校也使用类似的方法. 但笔者在最近的教学研讨中发现, 过去教学中一般采用的不确定度评定方法是不合理的, 这牵涉到关于不确定度评定的一些基本概念. 本文结合具体实例讨论了这一问题, 给出了合理的不确定度评定方法, 并指出过去常用方法错误的原因.

2 实验原理

基本电桥电路如图 1 所示. 图中标准电阻 R_A 和 R_B 的值已知, 且桥臂比例 $R_A : R_B \approx 1 : 1$, 调节电阻箱 R_S 的值, 使得桥上流过灵敏电流计 G 的电流为零, 此时电桥达到平衡, 平衡方程为

$$R_X = \frac{R_A}{R_B} R_S. \quad (1)$$

保持 R_X 和 R_S 的位置不变, 互易 R_A 和 R_B 的位置, 分别测出互易前、后电桥平衡时桥臂电阻 R_S 的示值 R_{S1} 和 R_{S2} , 由(1)式可以得到互易前待测

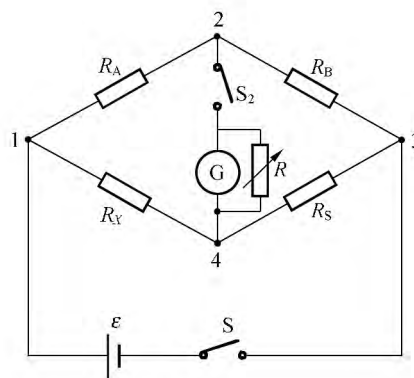


图 1 惠斯通电桥基本电路

电阻的阻值为

$$R_X = \frac{R_A}{R_B} R_{S1}, \quad (2)$$

互易后待测电阻的阻值为

$$R_X = \frac{R_B}{R_A} R_{S2}, \quad (3)$$

由(2)式和(3)式可以得到待测电阻的阻值为^[2]

$$\overline{R_X} = \sqrt{R_{S1} R_{S2}} \approx \frac{R_{S1} + R_{S2}}{2}. \quad (4)$$

3 互易桥臂不确定度评定的常用方法

以下给出 2 种对互易桥臂测量结果进行不确定度评定的方案: 一种是笔者实验教学中一贯采用的方案; 另一种是文献[3]中给出的方案. 这 2 种方案是多年来被大家所认可的关于互易桥臂测量结果不确定度评定的方法.

收稿日期: 2013-12-16; 修改日期: 2014-05-09

作者简介: 原 媛(1982-), 女, 山西长治人, 复旦大学物理学系工程师, 硕士, 从事理论物理和物理实验教学工

3.1 方案一

在以往互易桥臂不确定度评定的教学中^[1-2],通常的做法是:将互易前后 2 次的测量结果 R_{S1} 和 R_{S2} 当作 2 次独立实验操作的结果,对 R_X 进行不确定度评定时利用标准不确定度 $u(y)$

的传递公式: $u^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$ 来计算.

将(4)式代入传递公式可以得到:

$$u(\overline{R_X}) = \sqrt{\left[\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S1}} u(R_{S1}) \right]^2 + \left[\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S2}} u(R_{S2}) \right]^2}, \quad (5)$$

$$u(\overline{R_X}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S1}} \right)^2 [u_{B1}^2(R_{S1}) + u_{B2}^2(R_{S1})] + \left(\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S2}} \right)^2 [u_{B1}^2(R_{S2}) + u_{B2}^2(R_{S2})]}, \quad (6)$$

分别计算互易前后 R_{S1} 和 R_{S2} 的不确定度并代入(6)式,即可得到待测量 R_X 的不确定度.

3.2 方案二

在文献[4]中,作者讨论了单次测量时惠斯通电桥的 B 类不确定度,并给出了互易桥臂测量结果的总的测量不确定度:它包括了 R_{S1} 和 R_{S2} 的测量误差,以及在 2 次测量中电桥灵敏度引起的测量误差,相对不确定度的具体表达式为

$$\frac{U_B}{R_X} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_{S1}}{R_{S1}} \right)^2 + \left(\frac{u_{S2}}{R_{S2}} \right)^2 + \left(\frac{0.2}{s_{r1}} \right)^2 + \left(\frac{0.2}{s_{r2}} \right)^2}, \quad (7)$$

其中, u_{Si} 是电阻 R_{Si} 的量值误差,它由电阻箱铭牌所示最大误差限 $a_{R_{Si}}$ 确定; s_{ri} 是电桥的相对电阻灵敏度,定义为在电桥平衡条件下比较臂电阻 R_S 变动 ΔR_S 时,灵敏电流计指针偏离平衡位置 n 格,即 $s_{ri} = \frac{n}{\Delta R_{Si}/R_{Si}}$; 0.2 格是文献中给出的眼睛能觉察的灵敏电流计指针的最小偏转量.

为了方便比较 2 种方法的结果,在(6)式和(7)式中,将平衡电桥能灵敏电测到的灵敏电流计指针偏离平衡位置的最小格数统一为 0.1 格.(具体检查方法是在接通和断开开关 S_2 时,观察灵敏电流计的指针是否有微小的颤动).因此(7)式可重新写为

$$\frac{U_B}{R_X} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_{S1}}{R_{S1}} \right)^2 + \left(\frac{u_{S2}}{R_{S2}} \right)^2 + \left(\frac{0.1}{s_{r1}} \right)^2 + \left(\frac{0.1}{s_{r2}} \right)^2}, \quad (8)$$

为了使得讨论更加具体,下面给出具体实例的不确定度评定结果.

而测量结果 R_{S1} 和 R_{S2} 的标准不确定度则由不确定度合成公式 $u(x) = \sqrt{u_{B1}^2(x) + u_{B2}^2(x)}$ 得到,对于 B_1 类测量不确定度在教学中常取 $u_{B1}(R_{Si}) = \frac{1}{10} \frac{\Delta R_{Si}}{\Delta \theta}$, 其中 ΔR_{Si} 为灵敏电流计指针偏离平衡位置 $\Delta \theta$ 格时电阻箱 R_{Si} 的改变量;而 B_2 类仪器不确定度则由电阻箱所示最大误差限(不确定度限值) $a_{R_{Si}}$ 来确定: $u_{B2}(R_{Si}) = \frac{a_{R_{Si}}}{\sqrt{3}}$. 所以(5)式可以重新写为

4 实验结果及常用不确定度评定方法的实例

4.1 实验仪器

ZX21A 型电阻箱, 2 k Ω 左右的定值电阻, 85C1 型灵敏电流计, 直流稳压电源, 以及导线、开关等元件. ZX21A 型电阻箱各挡阻值的相对不确定度如表 1 所示.

表 1 ZX21A 型电阻箱技术指标

电阻旋钮序号 i	电阻步进值或旋钮倍率	挡位等级 a_i
1	10 000	0.1
2	1 000	0.1
3	100	0.1
4	10	0.1
5	1	0.5
6	0.1	2

ZX21A 型电阻箱的铭牌上还给出了零值电阻 (20 ± 10) m Ω , 考虑到待测电阻的阻值为 2 k Ω 左右, 如此小的零值电阻对测量结果的修正可以忽略不计, 因此在不确定评定中也不必考虑其影响, 故对电阻箱某示值 R_i 的不确定度限值 a_{R_i} 为

$$a_{R_i} = \sum (n_i \times 10^{5-i}) \times a_i \%, \quad (9)$$

式中 a_{R_i} 单位为 Ω , n_i 为第 i 个电阻盘上的读数.

4.2 实测结果及不确定度评定

实验测得的结果如表 2 所示, 其中 R_A, R_B 和 R_S 分别是平衡时 3 个桥臂的阻值, R_S' 是灵敏电流计偏离平衡状态一格时桥臂电阻 R_S 的阻值,

$$\delta R_s = R_s' - R_s.$$

表2 实测数据 ($R_A = R_B = 43.0 \Omega$, 电源电压 $\varepsilon = 9.00 \text{ V}$)

条件	R_s/Ω	R_s'/Ω	$\delta R_s/\Omega$
互易前(脚标 1)	2 139.6	2 146.7	7.1
互易后(脚标 2)	2 139.3	2 146.4	7.1

由(4)式可得待测电阻的阻值为

$$\overline{R_X} \approx \frac{R_{S1} + R_{S2}}{2} = 2\ 139.45 \Omega. \quad (10)$$

$$u(\overline{R_X}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S1}}\right)^2 [u_{B1}^2(R_{S1}) + u_{B2}^2(R_{S1})] + \left(\frac{\partial \overline{R_X}}{\partial R_{S2}}\right)^2 [u_{B1}^2(R_{S2}) + u_{B2}^2(R_{S2})]} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{S2}}{R_{S1}} \left[\left(\frac{1}{10} \frac{\Delta R_{S1}}{\Delta \theta}\right)^2 + \left(\frac{a_{R_{S1}}}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] + \frac{R_{S1}}{R_{S2}} \left[\left(\frac{1}{10} \frac{\Delta R_{S2}}{\Delta \theta}\right)^2 + \left(\frac{a_{R_{S2}}}{\sqrt{3}}\right)^2 \right]} = 1.0 \Omega.$$

其中, $u(R_{S1}) = u(R_{S2}) = 1.45 \Omega$.

$$\frac{U_B}{\overline{R_X}} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{u_{S1}}{R_{S1}}\right)^2 + \left(\frac{u_{S2}}{R_{S2}}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{s_{r1}}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{s_{r2}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{R_{S1}} \frac{a_{R_{S1}}}{\sqrt{3}}\right]^2 + \left[\frac{1}{R_{S2}} \frac{a_{R_{S2}}}{\sqrt{3}}\right]^2 + \left(0.1 \frac{\Delta R_{S1}}{R_{S1}}\right)^2 + \left(0.1 \frac{\Delta R_{S2}}{R_{S2}}\right)^2} = 4.78 \times 10^{-4},$$

$$U_B = \overline{R_X} \times 4.78 \times 10^{-4} = 1.0 \Omega.$$

比较2种方案的计算结果可以看到,计算结果是完全相同的;从其一般表达式(6)式和(8)式也可以看到,2种方案的核心思想是相同的,都利用了不确定度的传递公式,即在计算互易桥臂测量结果的不确定度时都把桥臂电阻 R_{S1} 和 R_{S2} 当作2个独立测量量来处理。

5 对上述常用不确定度评定方法的讨论与分析

按照上述2种评定方法,待测电阻 R_X 的不确定度为 1.0Ω ,比标准电阻 R_S 本身的不确定度 (1.45Ω) 要小,甚至比仪器不确定度 (1.26Ω) 还要小,这显然是不合理的。我们认为,不确定度传递公式在这里是不适用的:不确定度传递公式使用的条件是公式中各直接测量量之间相互独立,但在 R_{S1} 和 R_{S2} 并不是相互独立的:它们是同一个待测量用同一个标准量具在2次不同条件下比较的结果。因此,在互易桥臂实验中, R_X 的不确定度不应由 R_{S1} 和 R_{S2} 的不确定度传递得到,而应该

利用表2测得的原始数据可以得到:

$$u_{B1}(R_{S1}) = \frac{1}{10} \delta R_{S1} = 0.71 \Omega,$$

$$u_{B1}(R_{S2}) = \frac{1}{10} \delta R_{S2} = 0.71 \Omega,$$

$$u_{B2}(R_{S1}) = \frac{a_{R_{S1}}}{\sqrt{3}} = 1.263 \Omega,$$

$$u_{B2}(R_{S2}) = \frac{a_{R_{S2}}}{\sqrt{3}} = 1.259 \Omega. \quad (11)$$

将(11)式的计算结果代入(6)式,得到测量结果 R_X 的不确定度为:

进一步将(11)式代入(8)式可以得到:

由 B_1 类测量不确定度和 B_2 类仪器不确定度2部分合成而得。其中,前后2次互易桥臂的测量中,由电桥灵敏度引起的 B_1 类测量不确定度 $u_{B1}(R_{S1})$ 和 $u_{B1}(R_{S2})$ 之间是完全独立的(可能一次偏大而另一次偏小),因此测量结果的 B_1 类测量不确定度应该由二者按方和根合成法得到,即:

$$u_{B1}(R_X) = \frac{1}{2} \sqrt{u_{B1}^2(R_{S1}) + u_{B1}^2(R_{S2})} = 0.50 \Omega. \quad (12)$$

而前后2次实验使用的是同一标准量具(其不确定度不可能一次偏大而另一次偏小),因此测量结果的 B_2 类仪器不确定度就等于2次仪器不确定度和的一半,也就是说近似等于标准电阻 R_S 的 B_2 类不确定度,即:

$$u_{B2}(R_X) = \frac{1}{2} [u_{B2}(R_{S1}) + u_{B2}(R_{S2})] \approx$$

$$u_{B2}(R_S) = 1.26 \Omega. \quad (13)$$

故可得到测量结果 R_X 的合成标准不确定度为:

$$u(\overline{R_X}) = \sqrt{u_{B1}^2(R_X) + u_{B2}^2(R_X)} = 1.36 \Omega. \quad (14)$$

从数据结果可以看出:

$$u_{B2}(R_{Si}) < u(\overline{R_X}) < u(R_{Si}) . \quad (15)$$

对上述结果的定性分析:测量结果 R_X 的不确定度(1.36 Ω)大于标准电阻 R_S 的仪器不确定度(1.26 Ω),这是因为 $u(R_X)$ 中还包含有测量过程的其他不确定度分量;但又略小于标准电阻 R_S 的标准不确定度(1.45 Ω),因为通过 2 次测量,降低了由于比率臂电阻比的误差影响而引入的测量不确定度. 因此,认为这样的不确定度评定是合理的. 实际上,这种评定方法在物理测量中是具有一定普遍性的,比如在使用物理天平或分析天平测量物体质量时,为了测量更精密,经常会用复称法来消除天平不等臂引入的系统误差^[5],而对其测量结果进行不确定度评定时,也不应该采用不确定度的传递方法,而上述给出的评定方法是完全适用的.

6 结束语

过去在教学中常用的对互易桥臂法测量电阻(桥臂标称值 R_A 和 R_B 相等)的不确定度评定方法是错误的,其结果比标准电阻的标准不确定度还小,显然不合理. 究其原因,是因为互易桥臂的前后 2 次测量不是完全独立的,它们是同一待测量用同一仪器以不同方法测量的结果. 因此,不可使用一般的不确定度的传递公式. 我们给出了

一种合理的评定方法:测量结果的不确定度由 B_1 类测量不确定度和 B_2 类仪器不确定度合成,其中 B_1 类测量不确定度由 2 次测量的 B_1 类不确定度通过方和根合成法得到(前后 2 次对电桥平衡的判断完全独立),而 B_2 类仪器不确定度近似等于标准电阻的仪器不确定度(前后 2 次测量所用的标准电阻仪器相同、阻值略有微小差别).

致谢:本文的作者与清华大学物理学系朱鹤年教授进行过多次有益的讨论和交流,得到许多帮助,在此深表谢意.

参考文献:

- [1] 沈元华,陆申龙. 基础物理实验[M]. 北京:高等教育出版社,2003.
- [2] 贾玉润,王公治,凌佩玲. 大学物理实验[M]. 上海:复旦大学出版社,1987:218-221.
- [3] 朱鹤年. 物理实验研究[M]. 北京:清华大学出版社,1994:151-163.
- [4] 陈西园,徐铁军,高文贵. 惠斯登电桥测电阻实验的不确定度分析[J]. 大学物理实验,2000,13(2):53-55.
- [5] 蔡秀峰. 复称法在精密称衡时的作用[J]. 物理教学探讨,2003,21(187):33-34.
- [6] 朱鹤年. 新概念·基础物理实验讲义[M]. 北京:清华大学出版社,2013.

Uncertainty evaluation in Wheatstone bridge experiment with exchangeable arms

YUAN Yuan, SHEN Yuan-hua, ZHAO Zai-zhong, JIN Hao-ming,
MA Xiu-fang, SUN Yan-qing, MA Shi-hong

(Central Lab for Physics Education, Department of Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: In the Wheatstone bridge experiment, the exchanging bridge arm method was used to measure resistance. Two traditional methods were often used to assess the uncertainty. However, the results was smaller than the standard uncertainty of the standard resistance, it was because the last and next measurement by exchanging bridge arm were not fully independent, the two results were of the same quantity measured by the same instrument in a different way. In the improving measurement method, class B_1 uncertainty could be calculated by the root of square sum, class B_2 uncertainty equals to the uncertainty of standard resistance.

Key words: Wheatstone bridge; exchanging arm; uncertainty evaluation

[责任编辑:郭 伟]