Chapter 3 微分几何初步

我们无法用一套坐标覆盖整个球面，即球面不能被展平（拓扑不等价）。

类似于球面这样的空间被称为流形，可用一族坐标形覆盖，称局部坐标。

§3.1 微分流形

一、流形的定义：

M是Hausdorff空间（拓扑空间中，两个任意的不同点，有彼此不相交邻域），~~对其~~给定开集族 $\{U_i, i\in I\}$ 以及各开集 U_i 到 R^n 中的映射 φ_i，若满足：

1. $\{U_i, i\in I\}$ 给出M的一个开覆盖，即 $M=\bigcup U_i$.

2. $\forall U_i$，其像 $D_i=\varphi_i(U_i)$ 是 R^n 中的开集，而 φ_i 是 U_i 到 D_i 上的同胚映射.

3. 在两个开集交叠区域 $U_i\cap U_j$，映射 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 将 R^n 中的开集 $\varphi_i(U_i\cap U_j)$ 映射为 R^n 中的开集 $\varphi_j(U_i\cap U_j)$，并且 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 是 C^k 类映射（具连续k阶微分）.

则称 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 在M上定义了一个 C^k 流形构造。

$n=\dim M$ 称为流形维数，M称为n维 C^k 流形.

C^∞ 称微分或光滑流形，C^0 称拓扑流形，C^ω 称解析流形.

(U_i, φ_i) 称为图，$\{(U_i, \varphi_i)\}$ 称为图册。称 φ_i 为 U_i 上的局部坐标系，U_i 为 φ_i 的坐标邻域，流形M上一点 $P\in U_i$ 在 R^n 中像：

$\varphi_i(P)=\{x^1(P), x^2(P), \cdots, x^n(P)\}$ 称为P在 (U_i, φ_i) 中的坐标.

若流形上的点 $P\in U_i\cap U_j$ 的坐标分别是 $\{x^1, x^2, \cdots x^n\}$ 和 $\{y^1, y^2, \cdots y^n\}$.

则两组坐标存在关系 ~~$x^i=f^i(y^j)$~~ $y^i=f^i(x^j)$，f是k次可微函数。

若在任意交叠区内，$\left|\frac{\partial(y^1, y^2, \cdots y^n)}{\partial(x^1, x^2, \cdots x^n)}\right|>0$，则为可定向流形.

球面是可定向的，Möbius带不可定向.

一个流形是没有整体坐标的。

直线R，S^1 是一维流形.

R^2、S^2，环面 $T^2=S^1\times S^1$，柱面 $H=S^1\times R^1$ 都为二维流形.

$\boxed{\text{平面上自相交曲线不是流形.}}$

Scanned by CamScanner

2. 微分同胚.

定义：设 M, N 都是 C^∞ 流形，f 是 M 到 N 上的 1-1 映射，当 f 和 f^{-1} 都是 C^k 映射时，称 f 是 微分同胚映射。

同胚映射加上可微的条件就变成微分同胚映射。两流形若微分同胚则一定同胚，反之不然。

两个微分同胚的流形可以看成是相同的流形。

流形 M 上的两图，(U_i, φ_i) 和 (U_j, φ_j)，若 $U_i \cap U_j = \phi$ 或当 $U_i \cap U_j \neq \phi$ 时，$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 是 C^k 类映射，则称此两图 C^k 相容。若图册包含所有 C^k 相容图，则称其为一个极大 C^k 图册。

流形 M 上一点 $x \in M$ 处的切空间 $T_x(M)$ 可用来确定流形在 x 点附近性质。

若 M 是 n 维流形，$\boxed{\text{则 } T_x(M) \text{ 与 } R^n \text{ 同构}}$

对于 R^n 中函数 $f(x)$.

$$f(x+a) = f(x) + a^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) + O(a) = f(x) + Af(x) + O(a).$$

线性微分算符：$A = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = a^i \partial_i$ 　指标在下面代表抗变，指标在上面代表协变

$\{\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i\}$ 定义了切空间的一组基。

过 x 点所有曲线的切矢量张成空间称为该点的切空间，记为 $T_x(M)$.

定义 作用在流形 M 上可微函数集合的线性微分算符.

1) $V_x(\alpha f + \beta g) = \alpha V_x f + \beta V_x g$.

2). $V_x(fg) = (V_x f)g + f(V_x g)$.

选定局部坐标系后，在 x 点切矢量表示为 $V_x = v^i(x)\partial_i$.

对于流形上函数 $f(x)$，其沿流形上曲线 $x(t)$ 的方向导数为.

$$V_x f = \frac{d}{dt} f[x(t)] = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f$$

流形上 所有点、切空间的集合 $\bigcup_{x \in M} T_x(M) = T(M)$ 称为流形 M 的切丛.

切空间的对偶空间 $T_x^*(M)$ 称为 x 点的余切空间，若 $W_x \in T_x^*(M)$，$V_x \in T_x(M)$.

有 $W_x(V_x) \in R$ 或 $W_x: V_x \to W_x(V_x) \equiv \langle W_x, V_x \rangle \in R$.

余切矢量将切矢量映射为实数，切矢量与余切矢量内积为实数

$\because$ 切空间和余切空间互为对偶，因此有 $W_x(V_x) = V_x(W_x)$.

给定切空间 $T_x(M)$ 的基 $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$，可构造余切空间的基 $\{\theta^1, \theta^2, \cdots \theta^n\}$

$$W_x(V_x) = \langle W_x, V_x \rangle = \langle W_i \theta^i, V^j e_j \rangle = W_i V^i$$

有 $\langle \theta^i, e_j \rangle = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

若取 $T_x(M)$ 的基为 $\{\partial_1, \partial_2, \cdots \partial_n\}$，则可取 $T_x^*(M)$ 的基为自然基

$\{dx^1, dx^2, \cdots\cdots dx^n\}$.

内积定义 $\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = \delta^i_j$ 　$\therefore$ 余切矢量表示为 $W_x = W_i(x) dx^i$，又称协变矢量

切矢量又简称抗变矢量. $df = (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^i$ 是一个特殊的余切矢量.

通过张量积构造更高阶张量空间：

$$T^r_s(M) = \underbrace{T_x(M) \otimes T_x(M) \otimes \cdots T_x(M)}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{T_x^*(M) \otimes \cdots T_x^*(M)}_{s\text{个}}$$

元素称 (r,s) 型张量，r 阶抗变 s 阶协变张量

$$W^{(r)}_{(s)} = W^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \cdots \otimes dx^{j_s}$$

可以定义如下二阶张量:

$T_1 = T_{ij}(x)\,dx^i\otimes dx^j$ $\qquad T_2 = T^{ij}(x)\,\partial_i\otimes\partial_j$ $\qquad T_3 = T_i^j(x)\,dx^i\otimes\partial_j$

二阶协变 $\qquad$ 二阶抗变 $\qquad$ 二阶混合

$V(x) = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} = V'^i(x)\frac{\partial}{\partial x'^i}$ $\qquad W(x) = W_i(x)\,dx^i = W'_i(x')\,dx'^i$

$T_1 = T_{ij}(x)\,dx^i\otimes dx^j = T'_{ij}(x')\,dx'^i\otimes dx'^j$

显然,有 $dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}dx^j$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\cdot\partial x^j$

$\therefore$ $\cancel{V'^i(x)\left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\partial x^j\right) = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}}$ $\quad V'^i(x) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}V^j$

$W'^i(x) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}W_j$

写反了!

$T'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}T_{kl}$ $\qquad T'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T^{kl}$ $\qquad T'^j_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l}T_k^l$

1. 微分形式.

定义余切空间基矢量的反对称化张量积:

$dx\wedge dy \equiv \frac{1}{2}(dx\otimes dy - dy\otimes dx) = -dy\wedge dx$. 称为外积.

显然有 $dx\wedge dx = 0$.

微分元 dx 为微分1-形式, $dx\wedge dy$ 为微分2-形式.

$$dx\wedge dy \to dx'\wedge dy' = \frac{1}{2}(dx'\otimes dy' - dy'\otimes dx') = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\frac{\partial x'}{\partial y}dy\Big)\otimes\Big(\frac{\partial y'}{\partial y}dy+\frac{\partial y'}{\partial x}dx\Big)$$
$$-\Big(\frac{\partial y'}{\partial y}dy+\frac{\partial y'}{\partial x}dx\Big)\otimes\Big(\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\frac{\partial x'}{\partial y}dy\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}dx\otimes dy + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}dy\otimes dx - \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial x'}{\partial x}dy\otimes dx$$
$$-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}dx\otimes dy\Big] = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}\Big)(dx\otimes dy - dy\otimes dx)\Big]$$
$$= \frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\,dx\wedge dy.$$

Λ^p 为所有 p-形式组成空间.

(1) Λ^p 与 Λ^{n-p} 维数相同,均为 C_n^p

(2) n-形式只有 $f_{12\cdots n}(x)\,dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$. 是函数乘以 n 维空间的有向体积元.

(3) 不存在大于阶数 n 的形式.

(4) p-形式系数 $f_{ij\cdots k}(x)$ 对指标的交换全反对称.

(5) p-形式和 q-形式的外积,得到 $(p+q)$-形式.

由各阶微分形式直和构成空间 $\Lambda = \Lambda^0\oplus\Lambda^1\oplus\cdots\oplus\Lambda^n$ 维数为 2^n. 在这个线性空间加上外积运算构成 Cartan 代数.

满足 $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$. $\qquad (\alpha+\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$

$\boxed{\alpha_p\wedge\beta_q = (-1)^{pq}\beta_q\wedge\alpha_p \text{ 代表 } p\text{-形式}}$

引入外微分算符，d.

$d: \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^{p+1}$

∴有 $d(f(x)) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i = f_{,i}(x) dx^i$ $\quad d(f_i(x) dx^i) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = f_{i,j}(x) dx^j \wedge dx^i$

$= f_{j,i} dx^i \wedge dx^j = -f_{i,j} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}[f_{j,i} - f_{i,j}] dx^i \wedge dx^j$

显然，对 n-形式.

$f_{12\cdots n}(x) dx^1 \wedge dx^2 \cdots dx^n = f_{12\cdots n,i}(x) dx^i \wedge dx^1 \cdots \wedge dx^n = 0$

由于偏微分的可交换性，$\boxed{\text{两次外微分作用后是为 } 0.}$ 记为 $d^2 = 0$

对于 p-形式 α_p，q-形式 β_q，有

$d(\alpha_p \wedge \beta_q) = d\alpha_p \wedge \beta_q + (-1)^p \alpha_p \wedge d\beta_q$.

例：$\alpha_0 = f(x,y)$，$\alpha_1 = u(x,y)dx + v(x,y)dy$. $\quad \alpha_2 = \phi(x,y)\, dx \wedge dy$.

$d\alpha_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \nabla f \cdot dr$.

$d\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cancel{dx} dy \wedge dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx \wedge dy = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dx \wedge dy = \nabla \times W \cdot ds$.

$d\alpha_2 = 0$. $\quad d^2\alpha_0 = 0 \rightarrow \nabla \times \nabla f = 0$. $\quad d^2\alpha_1 = 0$. $\quad \nabla \cdot \nabla \times W = 0$.

∴ 对于 0-形式，d 相当于梯度；对于 1-形式，d 相当于旋度；对于 2-形式，d 相当于散度.

对 3 维空间，有

$\alpha_0 = f(x^1, x^2, x^3)$.

$\alpha_1 = V_1(x) dx^1 + V_2(x) dx^2 + V_3(x) dx^3$

$\alpha_2 = W_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + W_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + W_3(x) dx^1 \wedge dx^2$

$\alpha_3 = \phi(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

$d\alpha_0 = \nabla f \cdot dx$

$d\alpha_1 = (\nabla \times W) ds$

$d\alpha_2 = \nabla \cdot W \cdot dz$

$d\alpha_3 = 0$.

2. Hodge Star 算符

也称对偶变换，它将 p-形式变为 $(n-p)$-形式.

$*(dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{i_1 \cdots i_p}{}_{i_{p+1} \cdots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots dx^{i_n}$.

$\varepsilon_{ij\cdots k}$ 是 n 维空间全反对称张量.

$**(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = (-1)^{p(n-p)} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

因此有 $\boxed{** \omega_p = (-1)^{p(n-p)} \omega_p}$

例：在 3 维空间，可能形式有

$\alpha_0 = f(x^1, x^2, x^3) = f(x)$.

$\alpha_1 = V_1(x) dx^1 + V_2(x) dx^2 + V_3(x) dx^3$.

$\alpha_2 = W_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + W_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + W_3(x) dx^1 \wedge dx^2$.

$\alpha_3 = \phi(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

显然 $*\alpha_0 = f(x) \cdot \frac{1}{3!} \cdot \varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) dz$.

$*\alpha_1 = V_1(x) \frac{1}{2!} \cdot \varepsilon^1{}_{jk} dx^j \wedge dx^k + V_2(x) \frac{1}{2!} \varepsilon^2{}_{jk} dx^j \wedge dx^k + V_3(x) \varepsilon^3{}_{jk} dx^j \wedge dx^k$

$= V_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + V_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + V_3(x) dx^1 \wedge dx^2 = \vec{V} \cdot \vec{ds}$.

$*\alpha_2 = W_1(x) dx^1 + W_2(x) dx^2 + W_3(x) dx^3 = W \cdot dx$.

$*\alpha_3 = \phi(x)$.

对于任意的两个 p-形式 $\alpha_p = f_{ij\cdots k} dx^i \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dx^k$ 和 $\beta_p = g_{ij\cdots k} dx^i \wedge dx^j \cdots \wedge dx^k$

有 $\alpha_p \wedge *\beta_p = \beta_p \wedge *\alpha_p = (f_{ij\cdots k} dx^i \wedge dx^j \wedge \cdots dx^k) \wedge [g_{ij\cdots k} \cdot \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon^{ij\cdots k}{}_{l_1 l_2 \cdots l_n} dx^{l_1} \wedge dx^{l_2} \cdots dx^{l_n}]$

$= p! f_{ij\cdots k} g^{ij\cdots k} dz$.

引入余微分算符，定义 $\delta = (-1)^{np+n+1} * d *$　若 n 为奇数 $\delta = (-1)^p * d *$.
若 n 为偶数 $\delta = (-1) * d *$.

显然，δ 的作用是将 p-形式变为 $(p-1)$-形式，∴ δ 与 d 是一对共轭算符。

以三维空间为例，有：

$$\delta\partial_0 = * d * \partial_0 = * d(f(x)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 0.$$

$$\delta\partial_1 \overset{(-1)}{=} * d(V_1 dx^2 \wedge dx^3 + V_2 dx^3 \wedge dx^1 + V_3 dx^1 \wedge dx^2) \overset{(-1)}{=} *\left(\frac{V_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{V_2}{\partial V_2} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \frac{V_3}{\partial V_3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2\right)$$

$$= -\frac{\partial V^i}{\partial x^i} = -\nabla \cdot V.$$

$$\delta\partial_2 = * d(W_1 dx^1 + W_2 dx^2 + W_3 dx^3) = * d\left(\frac{\partial W_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + W_{1,3} dx^3 \wedge dx^1 + W_{2,1} dx^1 \wedge dx^2 + W_{2,3} dx^3 \wedge dx^2 + W_{3,1} dx^1 \wedge dx^3 + W_{3,2} dx^2 \wedge dx^3\right).$$

$$= (W_{2,1} - W_{1,2}) dx^3 + (W_{1,3} - W_{3,1}) dx^2 + (W_{3,2} - W_{2,3}) dx^1$$

$$= (\nabla \times W) \cdot d\vec{x}$$

$$\delta a_3 = (-1) * d(\phi(x)) = (-1) * (\nabla\phi \cdot dx) = -\nabla\phi \cdot d\vec{s}$$

同样，有 $\delta^2 = 0$.

定义 Laplace 算符 $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$.　p-形式仍然为 p-形式.

仍以三维空间为例.

$$\Delta\partial_0 = (d\delta + \delta d)\partial_0 = \delta d\partial_0 = \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = -\nabla^2 f.$$

$$\Delta\partial_1 = d\delta\partial_1 + \delta d\partial_1$$

$$= d(-\nabla \cdot V) + \delta[(\nabla \times V) \cdot ds]$$

$$= -[\nabla \cdot \nabla \cdot V] \cdot dx + \nabla \times (\nabla \times V) \cdot dx$$

$$= -[\nabla \cdot [\nabla \cdot V] dx + \nabla \cdot \nabla \vec{v} \cdot dx - \nabla V \cdot dx.$$

$$= -\nabla^2 V \cdot dx.$$

$$\Delta\partial_2 = d\delta\partial_2 + \delta d\partial_2.$$

$$= d[(\nabla \times W) \cdot dx] + \delta[\nabla \cdot W \cdot dz].$$

$$= \nabla \times (\nabla \times W) \cdot ds - \nabla \cdot (\nabla \cdot W) \cdot ds.$$

$$= -\nabla^2 W \cdot ds.$$

$$\Delta\partial_3 = d\delta\partial_3 = d(-\nabla\phi \cdot d\vec{s}) = -\nabla^2\phi \cdot dz.$$

Hodge 定理：若 M 是紧致的无边界流形，则任意 p-形式 W_p 可唯一分解为.

$$W_p = d\alpha_{p-1} + \delta\beta_{p+1} + \gamma_p$$

调和形式，满足 $\Delta\gamma_p = 0$.

在 n 维流形上 M 定义积分，取局部坐标系，有 $dz = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

$x^i \to x'^i(x)$，有

$$\boxed{dx'^1 \wedge dx'^2 \cdots \wedge dx'^n = \frac{\partial(x'^1, \cdots, x'^n)}{\partial(x^1, x^2 \cdots x^n)} dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^n}$$

Stokes 定理:

M是 p维流形, 边界为 ∂M, 则 $\forall$ (p-1)-形式, 有

$$\int_M d\omega_{p-1} = \int_{\partial M} \omega_{p-1}$$

当 p=1 时, 有 $\omega_0 = f(x)$. $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ Newton-Leibniz 公式.

p=2. $\omega_1 = A_i dx^i = A\cdot dx$. $d\omega_1 = (\nabla\times A)\cdot ds$.

$\therefore \int_S d\omega_1 = \int_c d(A\cdot dx) = \int_S (\nabla\times A)\cdot ds = \oint_\Gamma \omega_1 = \oint_\Gamma A\cdot dx$.

对 p=3. 有

$\omega_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}E^k dx^i\wedge dx^j = E\cdot ds$. $d\omega_2 = \nabla\cdot E\cdot d\tau$.

$\therefore \int_V d\omega_2 = \int_V \nabla\cdot E\cdot d\tau = \oiint \omega_2 = \oiint E\cdot ds$. 即 Gauss定理.

Maxwell 方程组.

$\nabla\cdot E = \rho$ $\nabla\cdot B = 0$. $\nabla\times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$. $\nabla\times B - \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{j}$.

引入矢势 A 和标势 ϕ,

$B = \nabla\times A$, $E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$.

当 A 和 ϕ 作规范变换

$A' = A - \nabla f$, $\phi' = \phi + \frac{\partial f}{\partial t}$ 时, E, B 不变.

引入 Lorenz 规范条件.

$$\nabla\cdot A + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

引入 4维形式,

$x^\mu = (t, \vec{x})$. $A^\mu = (\phi, A)$, $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla)$.

$\therefore$ $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$. $\therefore$ 规范条件写为 $\partial_\mu A^\mu = 0$.

场强张量的定义为

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

$\therefore$ Maxwell 方程写为

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0.$$

引入势 1-形式和电流 1-形式.

$A = A_\mu(x)dx^\mu$, $j = j_\mu(x)dx^\mu$.

$F = dA = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu\wedge dx^\mu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu$.

$A \to A' = A + df$.

$F' = dA' = dA + d^2 f = F$.

$\delta F = j$. $\delta^2 F = 0 \Rightarrow \delta j = 0$. 电荷守恒.

4. Riemann 流形.

定义：Riemann 流形 M 是一个光滑流形，在其上定义了连续的协变张量场 g，度量张量，

有 (1) $g_x(X,Y)=g_x(Y,X)$.

(2) 若 $\forall X\in T_x(M)$，使 $Y=0$，$g_x[X,Y]=0$. } Riemann 结构

若 $g_x(X,X)>0$，$\forall X\in T_x(M)$，$X\neq 0$，$x\in M$，称为 Riemann 流形，否则称为伪 Riemann 流形.

张量 g 实际上在 $T_x(M)$ 定义了一个内积，使其成为内积空间.

$g: T_x(M)\times T_x(M)\rightarrow R$，$x\in M$.

$(X,Y)=g_x(X,Y)=g_{ij}(x)\xi^i(x)\eta^j(x)$，$X=\xi^i\partial_i$，$Y=\eta^i\partial_i$.

$\|X\|^2=g_{ij}(x)\xi^i(x)\xi^j(x)$.

$$\cos\theta(X,Y)=\frac{g_x(X,Y)}{\|X\|\,\|Y\|}.\quad X,Y\in T_x(M).$$

∴ 流形 M 的 Riemann 结构由 $G=(g_{ij})$ 决定.

弧长微分的平方可写成：

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^i\otimes dx^j=g_{ij}(x)dx^idx^j$$

对于直角坐标系 $\{x_i\}$，其 Riemann 结构由 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 给出.

$\therefore ds^2=dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2$.

欧氏空间的任何一个流形都是 Riemann 流形.

2 维单位球面 $M=S^2$ 是 R^3 的子流形.

$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$.

在 M 上用 U 取局部坐标系 $\{\theta,\phi\}$.

$\therefore x_1=\sin\theta\cos\phi$. $x_2=\sin\theta\sin\phi$ $x_3=\cos\theta$

$\therefore ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2$.

$$\therefore G=\begin{pmatrix}1&\\&\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

内积 $(X,Y)=g_{ij}(x)\xi^i(x)\eta^j(x)$. 定义了切空间 $T_x(M)\longrightarrow T_x^*(M)$ 的映射.

$$X=\xi^j(x)\partial_j\longrightarrow X^*=g_{ij}(x)\xi^j(x)dx^i$$

也就是，向量的指标可用度规张量 g_{ij} 进行升降.

$$\xi_i=g_{ij}\xi^j\qquad \xi^i=g^{ij}\xi_j\qquad g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k\qquad g^{ij}\text{ 为 }g_{ij}\text{ 的逆}.$$

用度规张量升降任意张量指标.

$$w_{ij\cdots k}=g_{il}g_{jm}\cdots g_{kn}w^{lm\cdots n},\quad w^{ij\cdots k}=g^{il}g^{jm}\cdots g^{kn}w_{lm\cdots n}.$$

在 Reimann 流形上，取全反对称张量

$\varepsilon_{12\cdots n}=|g|^{\frac{1}{2}}$ $g=\det(g_{ij})$

则有 $\varepsilon^{ij\cdots k}=g^{il}g^{jm}\cdots g^{kn}\varepsilon_{lm\cdots n}=\mathrm{sgn}(g)|g|^{-\frac{1}{2}}\delta^{ij\cdots k}_{12\cdots n}$.

$\mathrm{sgn}(g)=\frac{g}{|g|}=\pm1$. 对欧式空间 $g=1$. $d\tau=|g|^{\frac{1}{2}}dx^1\wedge dx^2\cdots\wedge dx^n$.

协变微分.

协变微分算子 ∇ 具有性质：

1) $\nabla(aX+bY)=a\nabla X+b\nabla Y$ 2) $\nabla(X\otimes Y)=\nabla X\otimes Y+X\otimes\nabla Y$. $\nabla\langle W,X\rangle=\langle\nabla W,X\rangle+\langle W,\nabla X\rangle$.

3). $\nabla f=df$ f 为函数. 4) 对切向量 $X(x)=\xi^i(x)\partial_i$ 作用.

$$\nabla X(x)=d\xi^i(x)\otimes\partial_i+\xi^i(x)\nabla\partial_i$$
$$=d\xi^i(x)\otimes\partial_i+\xi^i(x)\,\Gamma^j_i(x)\otimes\partial_j$$
$$=d\xi^i(x)\otimes\partial_i+\xi^i(x)\cdot\underbrace{\Gamma^j_{ki}(x)}_{\text{连络系数}}dx^k\otimes\partial_j$$

$$\therefore\nabla X=[d\xi^k(x)+\xi^j(x)\Gamma^k_j(x)]\otimes\partial_k.$$
$$=[\partial_i\xi^k(x)+\xi^j(x)\Gamma^k_{ij}]dx^i\otimes\partial_k.$$

对余切向量场的协变微分从基矢对偶得到.

$$\nabla\langle dx^i,\partial_j\rangle=\langle\nabla dx^i,\partial_j\rangle+\langle dx^i,\nabla\partial_j\rangle=0$$

$$\therefore\langle\nabla dx^i,\partial_j\rangle=-\langle dx^i,\nabla\partial_j\rangle=-\langle dx^i,\Gamma^k_j\partial_k\rangle=-\Gamma^i_j$$

$$\therefore\nabla dx^i=-\Gamma^i_j\otimes dx^j$$

$\therefore$ 对余切向量场，有.

$$\nabla W=\nabla(W_idx^i)=dW_i\otimes dx^i+W_i\nabla dx^i=dW_i\otimes dx^i-W_k\Gamma^k_i\otimes dx^i$$
$$=(dW_i-W_k\Gamma^k_i)\otimes dx^i$$

通常我们求张量沿 X 方向的协变微分.

$\nabla_X k=\langle\nabla k,X\rangle$. 取自然基 $\{\partial_i\}$.

$\therefore\nabla_i k=\langle\nabla k,\partial_i\rangle$. $\therefore\nabla k=dx^i\otimes\nabla_i k$.

对切向量 X，有.

$$\nabla_i X=(\underbrace{\xi^k_{,i}}_{\text{普通导数}}+\Gamma^k_{ij}\xi^j)\partial_k=\underbrace{\xi^k_{;i}}_{\text{协变导数}}\partial_k$$

取局部坐标系后，切向量 X 表示为：

$X=\frac{d}{dt}=\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}$，当向量场 $Y=\eta^i\partial_i$ 满足

$$\nabla_X Y=\langle\nabla Y,X\rangle=\langle dx^i\otimes\nabla_i Y,\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle=\langle dx^i\otimes(\xi^k_{,i}+\Gamma^k_{ij}\xi^j)\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle$$
$$=\frac{dx^i}{dt}\left(\frac{d\eta^k}{dx^i}+\Gamma^k_{ij}\eta^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=0.$$ 即 $$\frac{d\eta^k}{dt}+\Gamma^k_{ij}\eta^j\frac{dx^i}{dt}=0.$$

则称向量场 Y 沿曲线 $r(t)$ 平行移动.

Riemann 联络.

要求度规张量场 G 的协变微分为 0:

$\nabla G = 0.$

即 $\nabla_k g_{ij} = g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il} = 0$

要求无扰，即 $T^k_{ij} = \underbrace{\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}}_{\text{Riemann 联络}} = 0$

Riemann 联络可表示为: $\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$

在作变换时，有 $\frac{\partial}{\partial x^i} \to \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^k} = L^k_i \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$g^i \to g'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \cdot g^k = (L^{-1})^i_k g^k$$

要求协变导数 $g^u_{;k}$ 按张量方式变换，则

$g^u_{;k} \to g'^u_{;k} = L^\lambda_k (L^{-1})^u_v g^v_{;\lambda}$，将 $g'^u_{;k} = g'^u_{,k} + \Gamma^u_{kv} g'^v$ 代入，可得 联络的变换:

$$\boxed{\Gamma'^k_{uv} = L^\rho_u L^\lambda_v (L^{-1})^k_\lambda \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} + L^\rho_u (L^{-1})^k_\lambda L^\lambda_{v,\rho}}$$

两边乘 dx'^u 并对 u 求和，注意 $L^\rho_u dx'^u = dx^\rho$.

$\because \Gamma'^k_v = (L^{-1})^k_\lambda \Gamma^\lambda_\lambda L^\lambda_v + (L^{-1})^k_\lambda dL^\lambda_v$.

$\therefore \Gamma' = L^{-1} \Gamma L + L^{-1} dL = L^{-1}(\Gamma + d)L.$

$\Downarrow$

$L\Gamma' = \Gamma L + dL.$

$dL \wedge \Gamma' + L d\Gamma' = d\Gamma L - \Gamma \wedge dL.$ ，将 $dL = L\Gamma' - \Gamma L$ 代入，可得.

$L(d\Gamma' + \Gamma' \wedge \Gamma') = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma) L.$

令 $\Omega = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$. 称为流形 M 上由 Γ 决定的 2-形式.

$\therefore \Omega' = L^{-1} \Omega L.$

$d\Omega = d\Gamma \wedge \Gamma - \Gamma \wedge d\Gamma = \Omega \wedge \Gamma - \Gamma \wedge \Omega$ 称为 Bianchi 恒等式.

$\Omega^u_v = d\Gamma^u_v + \Gamma^u_k \wedge \Gamma^k_v = \frac{1}{2} R^u_{vk\lambda} dx^k \wedge dx^\lambda.$

$R^u_{vk\lambda} = \partial_k \Gamma^u_{\lambda v} - \partial_\lambda \Gamma^u_{kv} + \Gamma^u_{k\sigma} \Gamma^\sigma_{\lambda v} - \Gamma^u_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{kv}.$

$\Downarrow$

$R^u_{vk\lambda;\sigma} + R^u_{v\lambda\sigma;k} + R^u_{v\sigma k;\lambda} = 0$

Lie导数与killing向量.

对于向量 $V^\mu(x)$，考虑无穷小变换.

$$x'^\mu = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu(x).$$

$$\therefore V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \cdot V^\nu(x) = (\delta^\mu_\nu - \varepsilon \xi^\mu_{,\nu}) V^\nu(x) = V^\mu(x) - \varepsilon \xi^\mu_{,\nu} V^\nu(x)$$

又有 $V'^\mu(x') = V'^\mu(x) + (x'^\nu - x^\nu) V'^\mu_{,\nu} + \cdots = V'^\mu(x) - \varepsilon \xi^\nu V'^\mu_{,\nu}$

$$\Longrightarrow \quad V^\mu(x) = V'^\mu(x) + \varepsilon \xi^\mu_{,\nu} V^\nu(x) - \varepsilon \xi^\nu \cdot V'^\mu_{,\nu}(x).$$

定义 $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V'^\mu(x) - V^\mu(x)}{\varepsilon} \equiv L_\xi V^\mu = V^\mu_{,\nu} \xi^\nu - V^\nu \cdot \xi^\mu_{,\nu}.$

称为向量 V^μ 关于 ξ^μ 的Lie导数.

同理，对协变向量和张量的Lie导数：

$$L_\xi V_\mu = V_{\mu,\nu} \xi^\nu + V_\nu(x) \xi^\nu_{,\mu}$$

$$L_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \xi^\lambda_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \xi^\lambda_{,\mu} + g_{\mu\nu,\lambda} \xi^\lambda$$

$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$ 称为killing方程. ξ^μ 称为killing向量.

$$\xi_{\mu;k;\lambda} - \xi_{\mu;\lambda;k} = \xi_\rho R^\rho{}_{\mu k\lambda} = \xi^\rho R_{\rho\mu k\lambda}.$$

$$\because R_{\rho\mu k\lambda} + R_{\rho k\lambda\mu} + R_{\rho\lambda\mu k} = 0.$$

$$\Longrightarrow \xi_{\mu;k;\lambda} - \xi_{\lambda;k;\mu} + \xi_{\lambda;\mu;k} = 0.$$

§3.3 同伦与同调

当两个流形 M, N 之间有两个连续映射，f 与 g.

$f, g: M \to N$.

若映射 f 可从连续形变为 g，则称两个映射彼此同伦.

两个流形 M 与 N 之间如果存在连续映射 f 与 g.

$f: M \longrightarrow N \quad g: N \longrightarrow M$.

使 $f \circ g$ 与 N 上的恒等映射同伦，$g \circ f$ 与 M 上的恒等映射同伦，则称流形 M 与 N 同伦等价。

若把连续映射改为同胚映射，则 g 为 f 的逆映射，则两个流形同胚，且两流形维数相同。

一个流形能连续形变为另一个，则流形一定同伦.

与单点流形同伦的流形称为可缩流形，称为拓扑平庸流形.

对于在 M 中的任何两个点 x_0、$x_1 \in X$，都有一条包含在 M 内的从 x_0 到 x_1 的道路 $\alpha(t)$，则称此拓扑空间 M 为道路连通的.

两个圈的乘法定义为：

$$\gamma(t) = \alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$ 两个圈同伦。

若有映射 $F(t,s)$. 使 $F(t,0) = \alpha(t)$. $F(t,1) = \beta(t)$. $0 \le t \le 1$.

则 $\alpha \simeq \beta$.

(1) $\alpha \simeq \alpha$ (2) $\alpha \simeq \beta$, $\beta \simeq \alpha$. (3) 传递律：$\alpha \simeq \beta$, $\beta \simeq \gamma \Rightarrow \alpha \simeq \gamma$.

用 $[\alpha]$ 标记 α 的同伦类，乘法定义为

$[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$

将恒等映射的同伦类视为单位元，则所有从 x_0 为基点的同伦类集合构成群，称为第一同伦群或基本群. 记为 $\pi_1(M, x_0)$.

若 $\pi_1(M)$ 仅含单位元，则为单连通流形. 如 E^n、$S^n (n \ge 2)$ 都为单连通流形.

若同伦群 $\pi_1(M)$ 非平庸，则表示存在 2 维洞.

如 $\pi_1(T^2) = Z \otimes Z$. $\pi_1(T^n) = Z \otimes Z \cdots \otimes Z = Z^n$.

$\pi_1(S^1) = Z$. $\pi_1(R^2/\{0\}) = Z$ $\pi_1(SO(n)) = Z_2$ $(n \ge 3)$. $\pi_1(RP^n) = Z_n$ $(n \ge 2)$.

基本群非平庸的流形称为多连通流形.

$\pi_k(M)$ 描写流形上存在的 $k+1$ 维洞.

$\pi_0(M)$ 描写流形 M 的连通分支的个数。

$\because O(3)$ 群有不连通两支. $\therefore \pi_0(O(3)) = Z_2$.

对于 n 维球面 S^n，有

$\pi_n(S^n) = \pi_1(S^1) = Z$

$\pi_k(S^n) = 0$. $0 < k < n$.

$\pi_3(S^2) = Z$ $\quad \pi_k(S^1) = \pi_k(T^1) = 0$ $k \ge 2$.

$\pi_0(T^1) = 0$. $\pi_k(S^3) = \pi_k(S^2)$ $(k \ge 3)$.

3. 单形与三角剖分

欧氏空间的一个子集. σ^0 即一点 a_0, σ^1 即有向线段 (a_0,a_1), σ^2 即平面上有向三角形 (a_0,a_1,a_2)

σ^3 即有向四面体 (a_0,a_1,a_2,a_3).

σ^n, 为 n+1 个独立点 $(a_0,a_1,\cdots a_n)$ 按确定次序构成的点集.

$\sigma^n=\{x\mid x=\lambda_0a_0+\cdots+\lambda_na_n,\ \lambda_i\geq 0,\ \sum\lambda_i=1\}$.

的定义边界 $\partial\sigma^n$.

$$\partial\sigma^n=\sum_{i=0}^n(-1)^i(a_0,a_1,\cdots a_{i-1},a_{i+1},\cdots a_n)=(-1)^i\sigma_i^{n-1}$$

不难得到 $\partial(\partial\sigma^n)=0$.

R^n 中有限个单形集合 K, 若

1) 若单形σ包含于K, 则σ的任意面属于K. 2). σ_1,σ_2 包含于K, 则 $\sigma^1\cap\sigma^2$ 若非空, 为公共面,

则称 K 为复形. 若拓扑空间 M 与 K 同胚, 则称 K是M的一个三角剖分.

可将剖分写成 $k=\{a_0,a_1,a_2,(a_0,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_0)\}$. 即由三个顶点, 和三条棱组成.

如果流形M有一个三角剖分, p维单形数目为 d_p, 则流形 M 的 Euler 数定义为

$\chi(M)=\sum_{p=0}(-1)^pd_p$. 这是个拓扑不变量.

对于n维球面, $\chi(S^n)=1+(-1)^n$. 利用三角剖分, 引入 $\pi_1(M)$.

4. 同调群.

流形各阶同调群 $H_k(M)$.

X_1 同伦于 2维单形 σ^2.

X_2 同伦于 σ^2 的边界.

流形 M中p维单形的整系数线性组合称为 M的 p-链.

$C_p=\sum_i a_i\sigma_i^p$, p-链集合为 $C_p(M)=\{C_p\}$. 在加法下构成 Abel群.

边界算符∂将p维映射为 p-1维单形.

$\partial: C_p(M)\longrightarrow C_{p-1}(M)$.

$Z_p=\{z_p\mid\partial z_p=0,\ z_p\in C_p(M)\}$ 称为 p-闭链.

$B_p=\{b_p\mid=\partial c_{p+1}\mid c_{p+1}\in C_{p+1}(M)\}$ 称为p-边界链. B_p是Z_p的子群.

定义商群 $H_p(M)=Z_p(M)/B_p(M)$. 称为 p-阶同调群. 拓扑不变量.

当两 p 闭链相差为边界链, $z^{(1)}_p-z^{(2)}_p\in B_p$, 则称两p闭链同调. $z^{(1)}_p\sim z^{(2)}_p$. 称同调.

p-阶 Betti 数 $b_p=\dim H_p(M)$. 0 流形欧拉数: $\chi(M)=(-1)^pb_p$.

对n维球面 S^n.

$H_n(S^n)=H_0(S^n)=Z$. $H_k(S^n)=0$. $0<k<n$. ∴ $\chi(M)=\sum(-1)^pb_p$.

对二维环面 T^2, 有

$H_0(T^2)=Z$ $H_1(T^2)=Z\otimes Z=Z\oplus Z$. $H_2(T^2)=Z$.

∴ $\chi(M)=(-1)^pb_p=1-2+1=0$.

若流形 M 可分解为l个互不相联的连通的并. $M=M_1\cup M_2\cdots\cup M_l$

则 $H_k(M)=H_k(M_1)\oplus\cdots\oplus H_k(M_l)$

对道路连通流形. $H_0(M)=Z$.

对 n维可定向紧致连通 M. $H_n(M)=Z$.

$H_0(R^n)=Z$ $H_k(R^n)=0$

3. 示性类.

对于 $2n$ 维 Riemann 流形, Euler类定义为

$$e(M) = \frac{1}{2^n n! (2\pi)^n} \varepsilon_{a_1 \cdots a_{2n}} \Omega^{a_1 a_2} \wedge \cdots \wedge \Omega^{a_{2n-1} a_{2n}}.$$

Euler类对应流形积分可得 Euler数

$$\chi(M) = \int_M e(M).$$