



课题14 Looping Pendulum

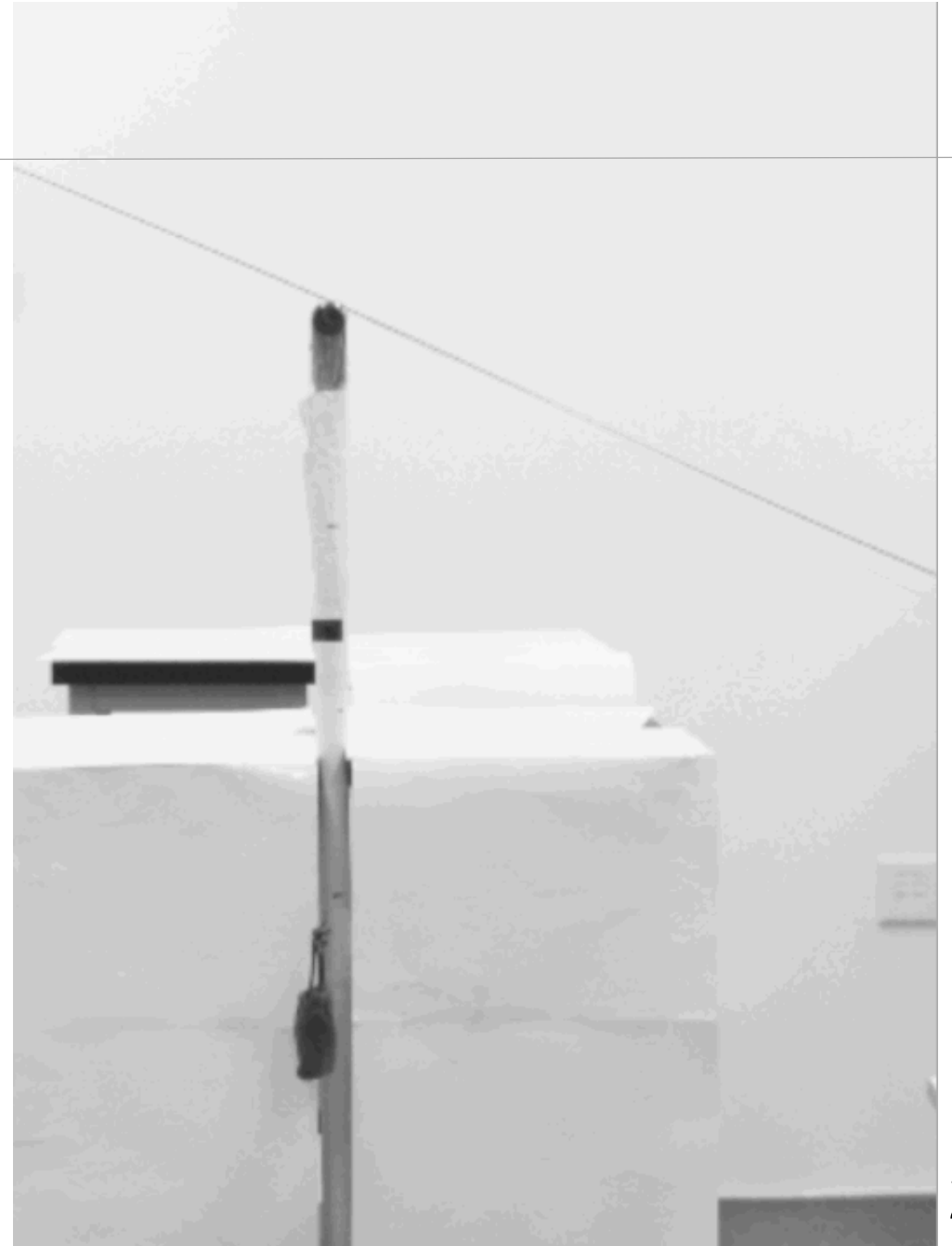
复旦大学队

喻知博 孙雯思 方胤豪 吴晋渊 舒畅

问题回顾

Connect two loads, **one heavy and one light**, with a string over a horizontal rod and lift up the heavy load by pulling down the light one. Release the light load and it will **sweep around the rod, keeping the heavy load from falling to the ground**. Investigate this phenomenon.

将**一重一轻**两个负载通过水平杆上的一根绳子相连，并下拉轻负载以吊起重负载。释放轻负载，它将**围着杆扫动**，从而**阻止重负载落到地面**。探究此现象。





CONTENTS

- 01 多种实验现象分析
- 02 理论建模
- 03 实验探究
- 04 不同实验现象的出现条件
- 05 总结

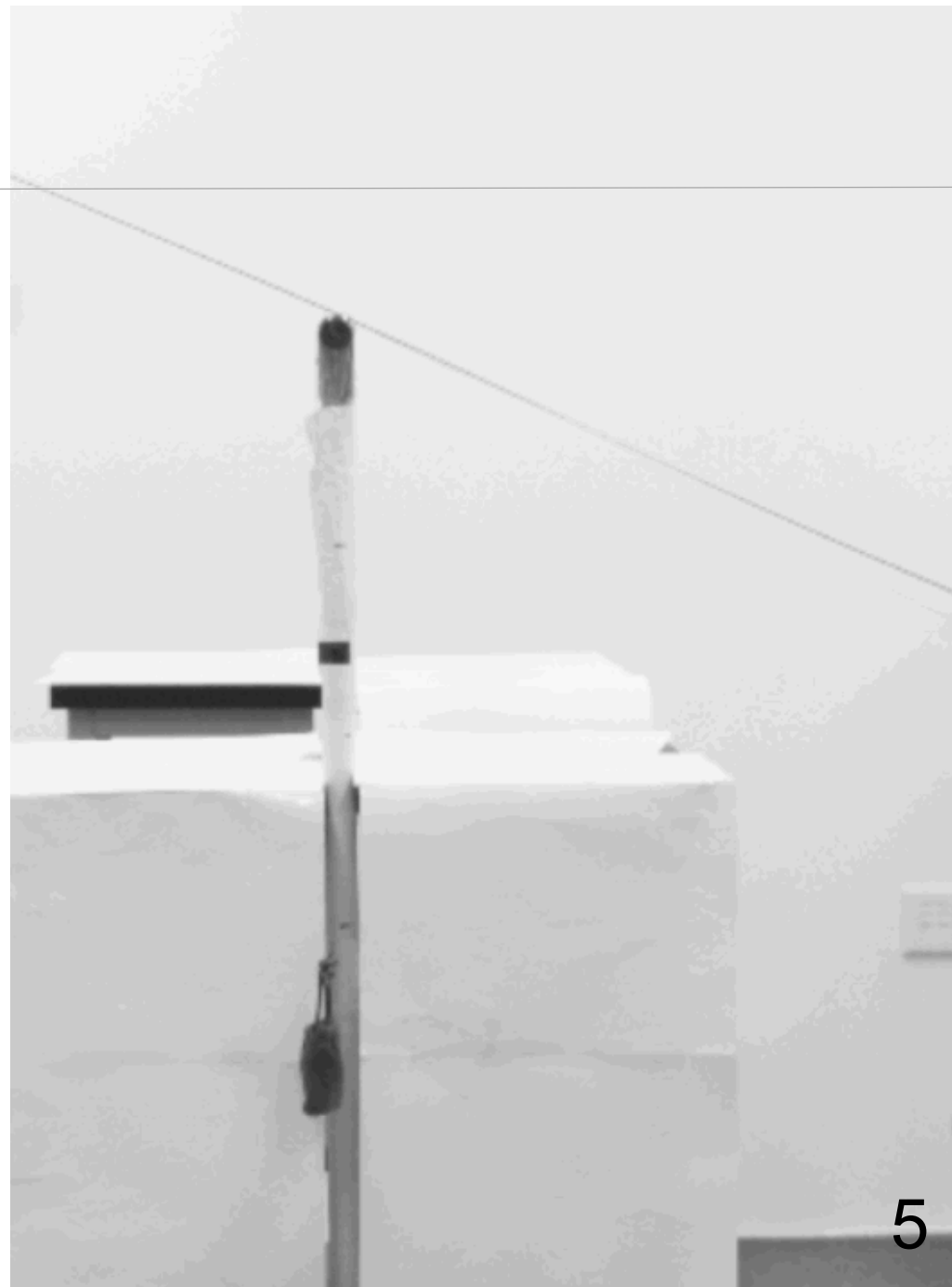
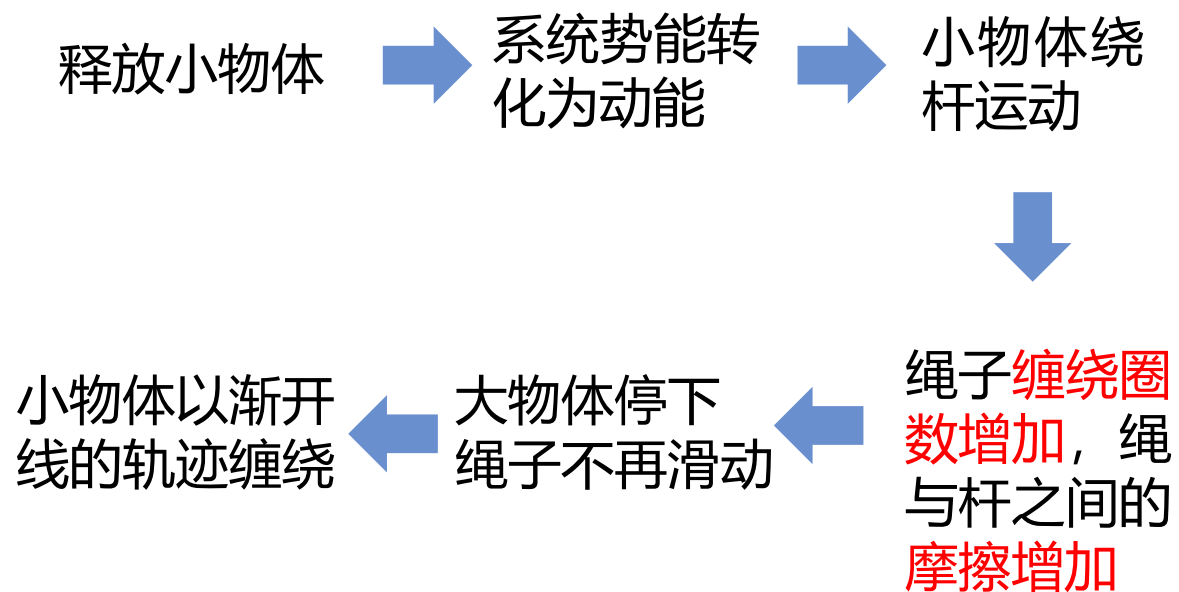


多种实验现象分析

01

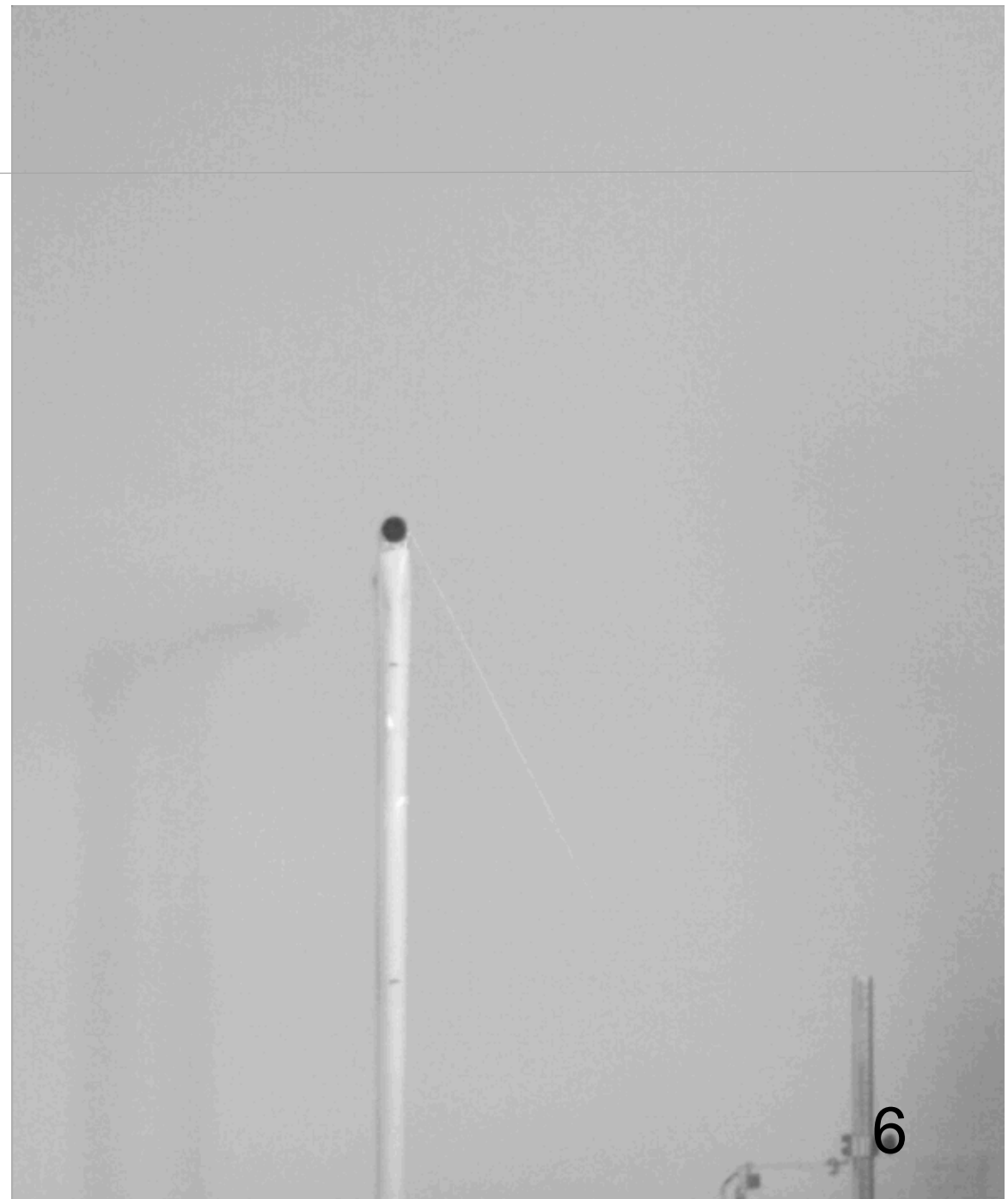
观察到的多种实验现象

1. 小物体的绳完全缠绕杆，
全过程大物体只停一次



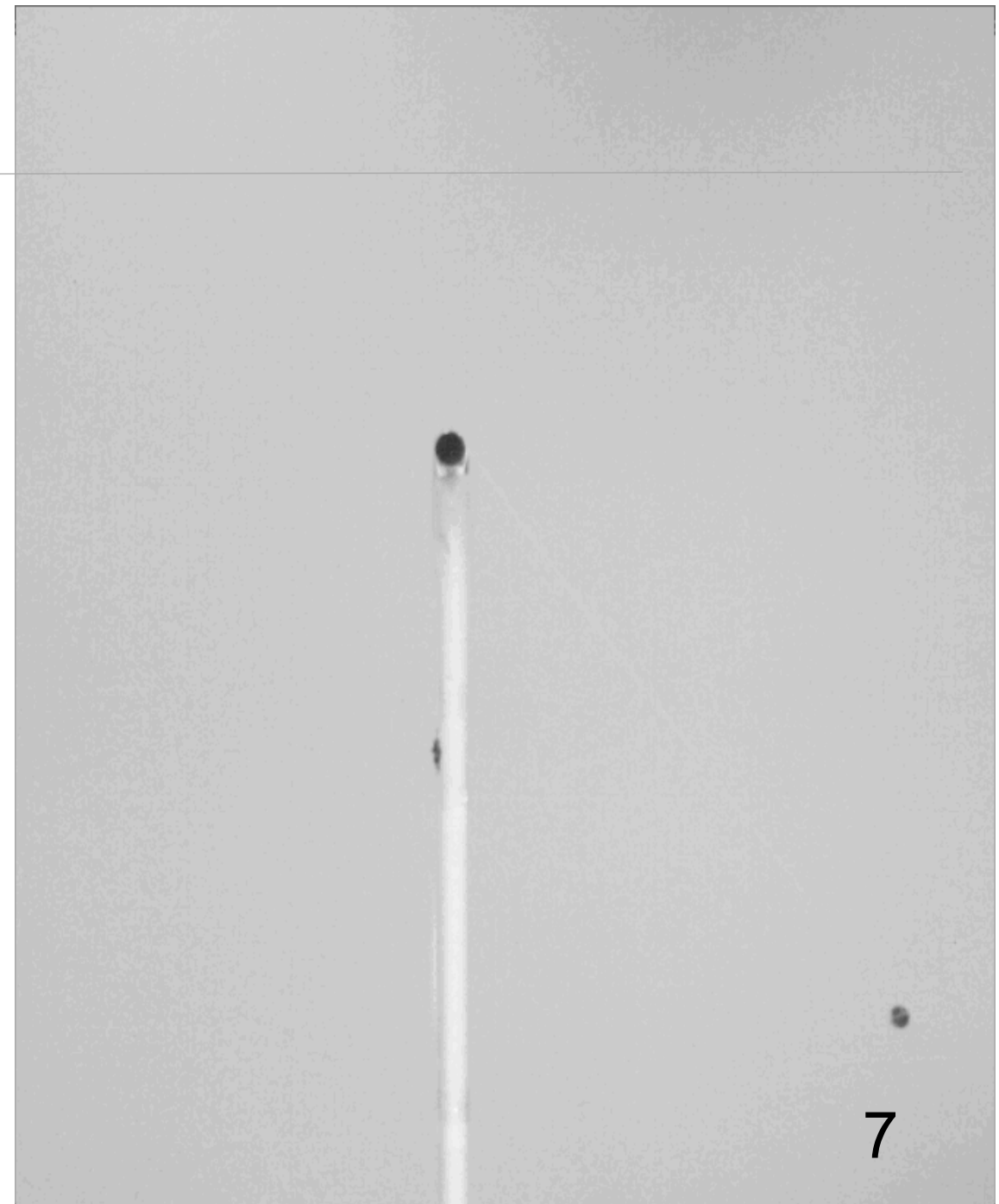
观察到的多种实验现象

2. 全过程中**大物体无法停下**，
小物体的绳无法缠绕杆
- 小物体垂直于绳方向**速度太小**，绳无法缠绕杆，导致**摩擦力较小**，无法**阻止大物体的运动**



观察到的多种实验现象

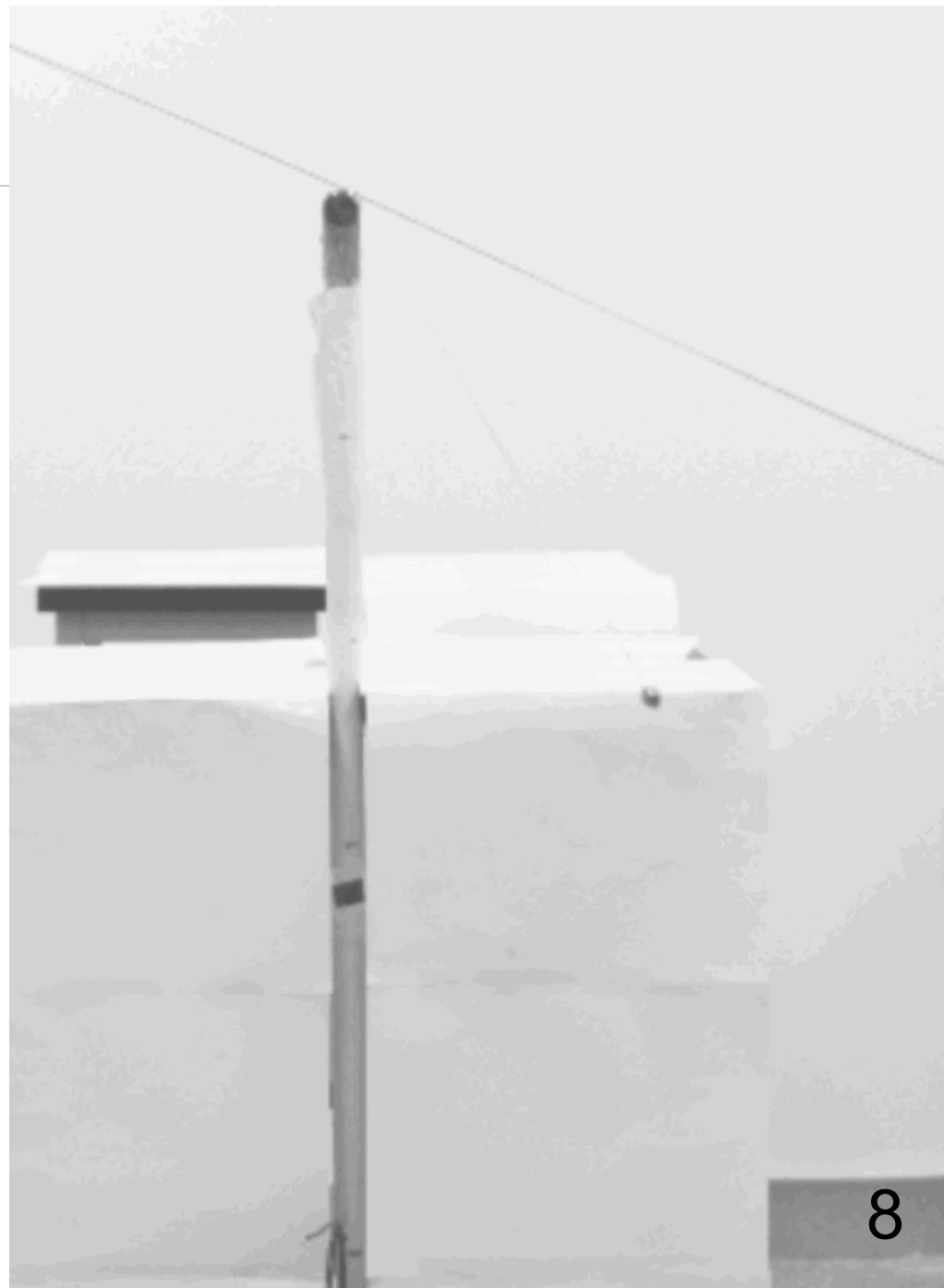
3. 小物体的绳完全缠绕杆，过程中大物体停下后继续向下运动
- 大物体静止时，小物体上升，速度下降，导致所需向心力减小，小物体侧绳上张力减小，无法继续拉住大物体



观察到的多种实验现象

4. 大物体停下后，小物体**向上拉**
动大物体

 - 大物体静止时，小物体下降，**速度增大**，导致绳上张力增大，可以**克服摩**
擦力向上拉动大物体





理论建模

02

理论建模

主要研究最基本的一种现象：

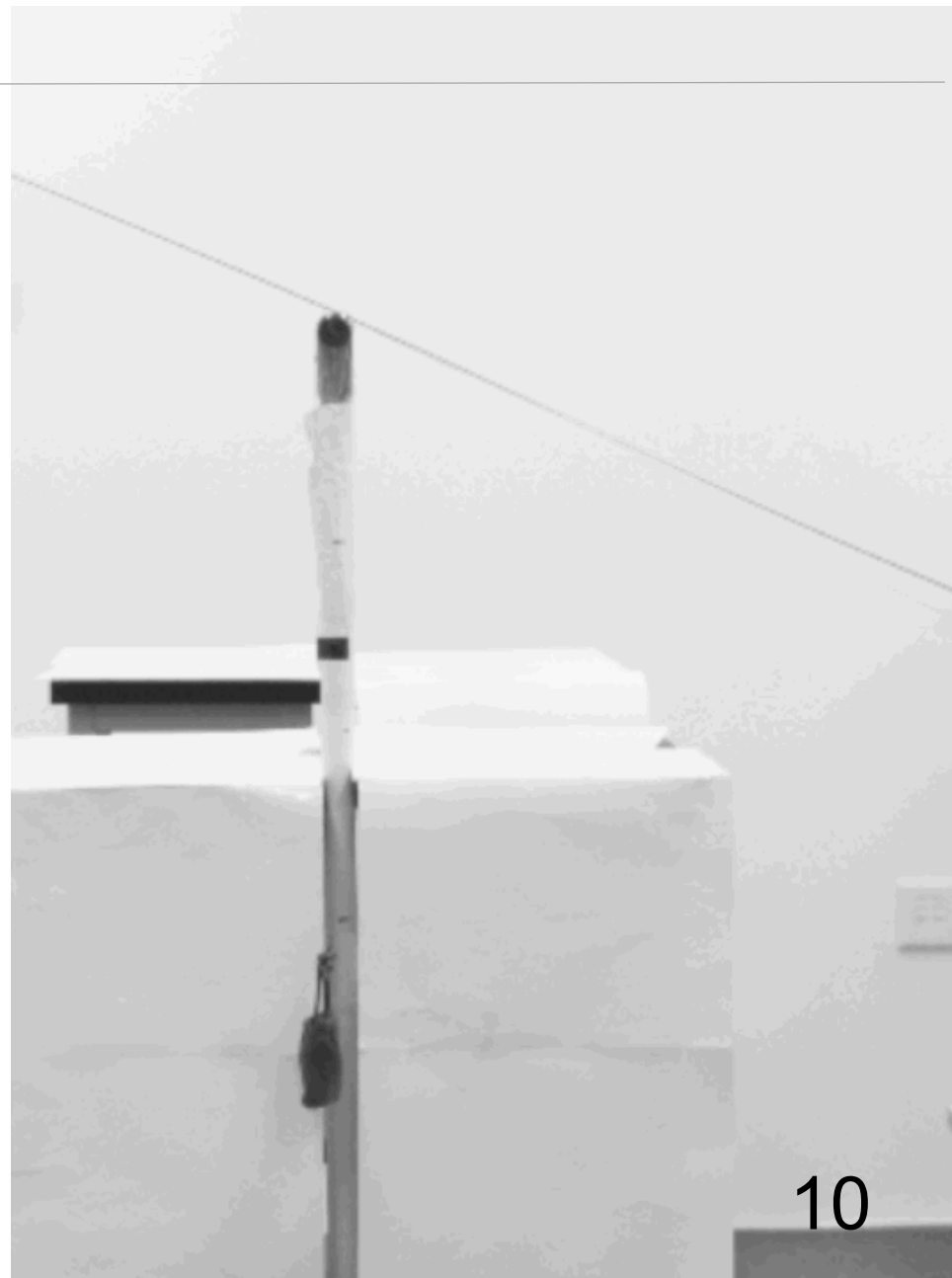
绳能完全缠绕在杆上，大物体停下后不再运动

基本假设：

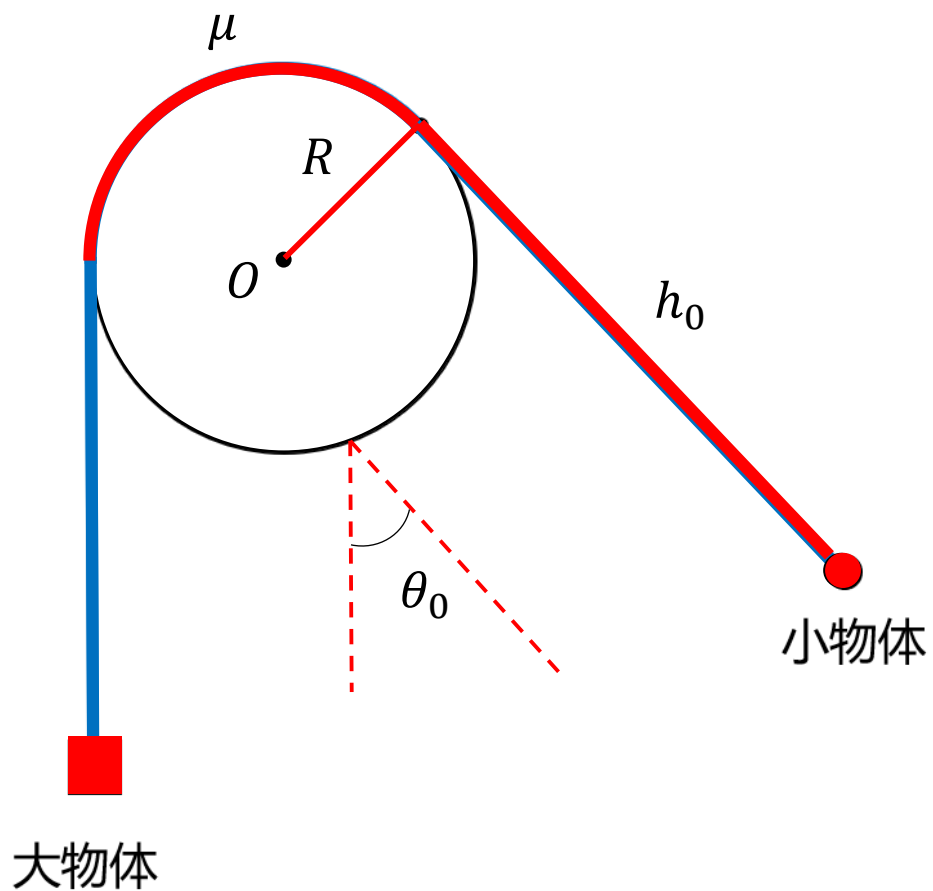
- 将大小物体都视为质点
- 忽略绳子质量、拉伸、空气阻力
- 认为整个过程都处在同一平面内

分为两个阶段研究：

1. 大物体下落
2. 大物体静止



参数选定

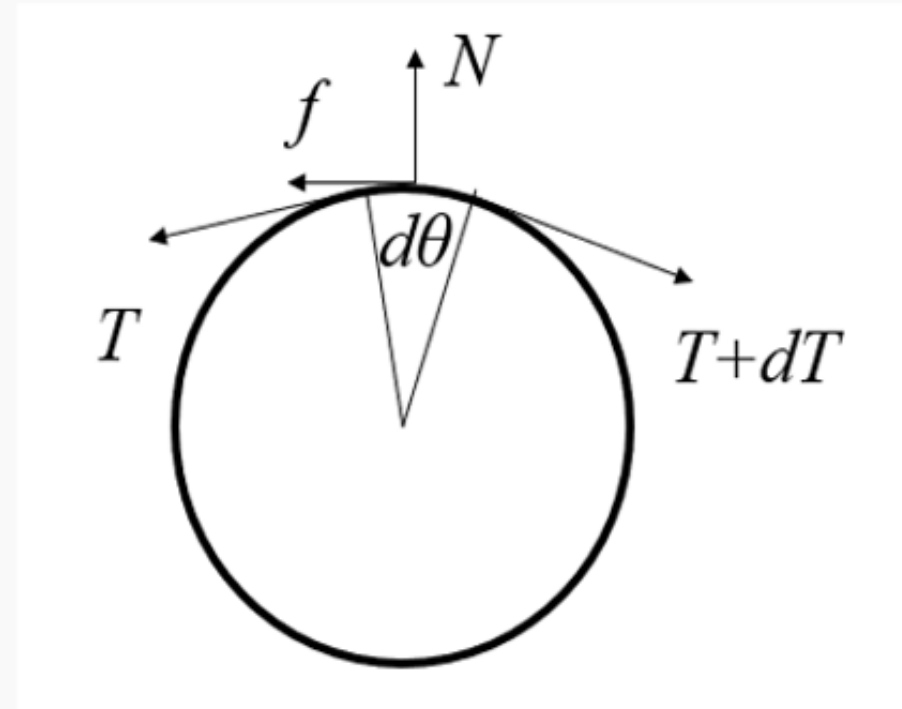


侧视图

- 杆的半径 R
- 杆与绳之间的动摩擦因数 μ
- 小物体侧的初始绳长 h_0
- 两物体的绳子的初始夹角 θ_0
- 大、小物体质量比 n

理论建模：第一阶段

Capstan方程 (绞盘方程)



$$\begin{cases} dT \cos \frac{d\theta}{2} = f = \mu N \\ N = (2T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dT = \mu N \\ N = T d\theta \end{cases} \Rightarrow dT = \mu T d\theta$$

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta \Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \mu \theta \Rightarrow T = T_0 e^{\mu \theta}$$

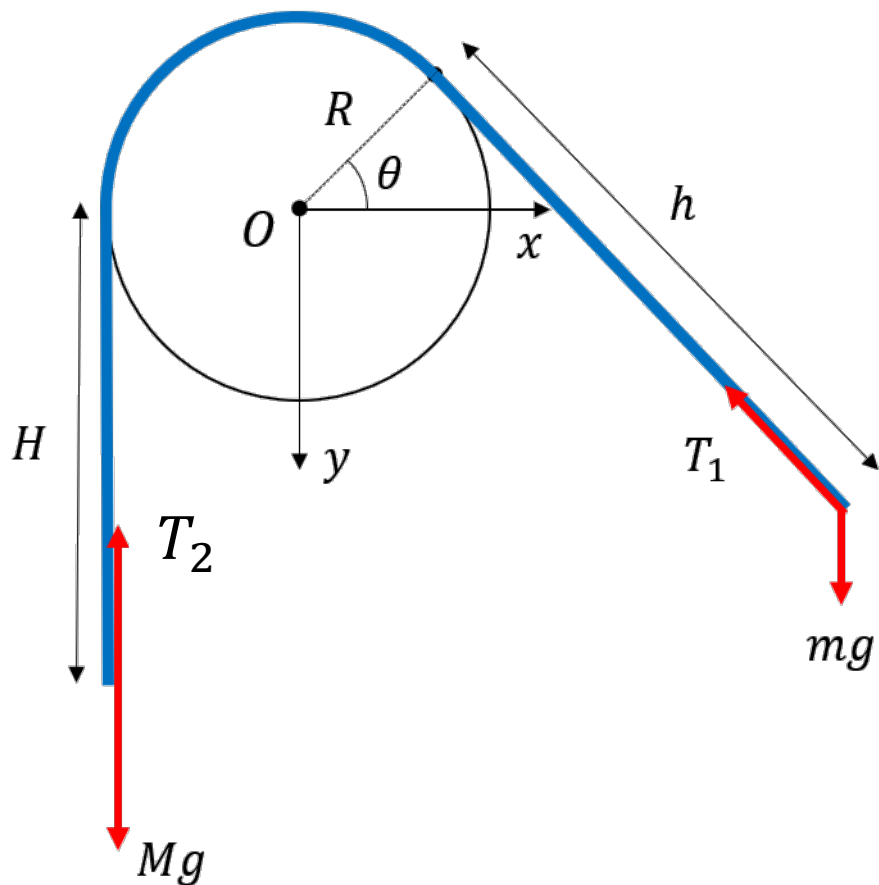
滑动摩擦

$$T_{max} = T e^{\mu \theta}$$

静摩擦

理论建模：第二阶段

第二阶段（大物体静止）：
以逆时针方向为 θ 的正方向



$$\begin{aligned}x &= R\cos\theta + h\sin\theta \\y &= h\cos\theta - R\sin\theta \\T_1\sin\theta &= m\ddot{x} \\mg - T_1\cos\theta &= m\ddot{y}\end{aligned}$$

小物体受力

$$R\dot{\theta} = \dot{h}$$

绳长不变

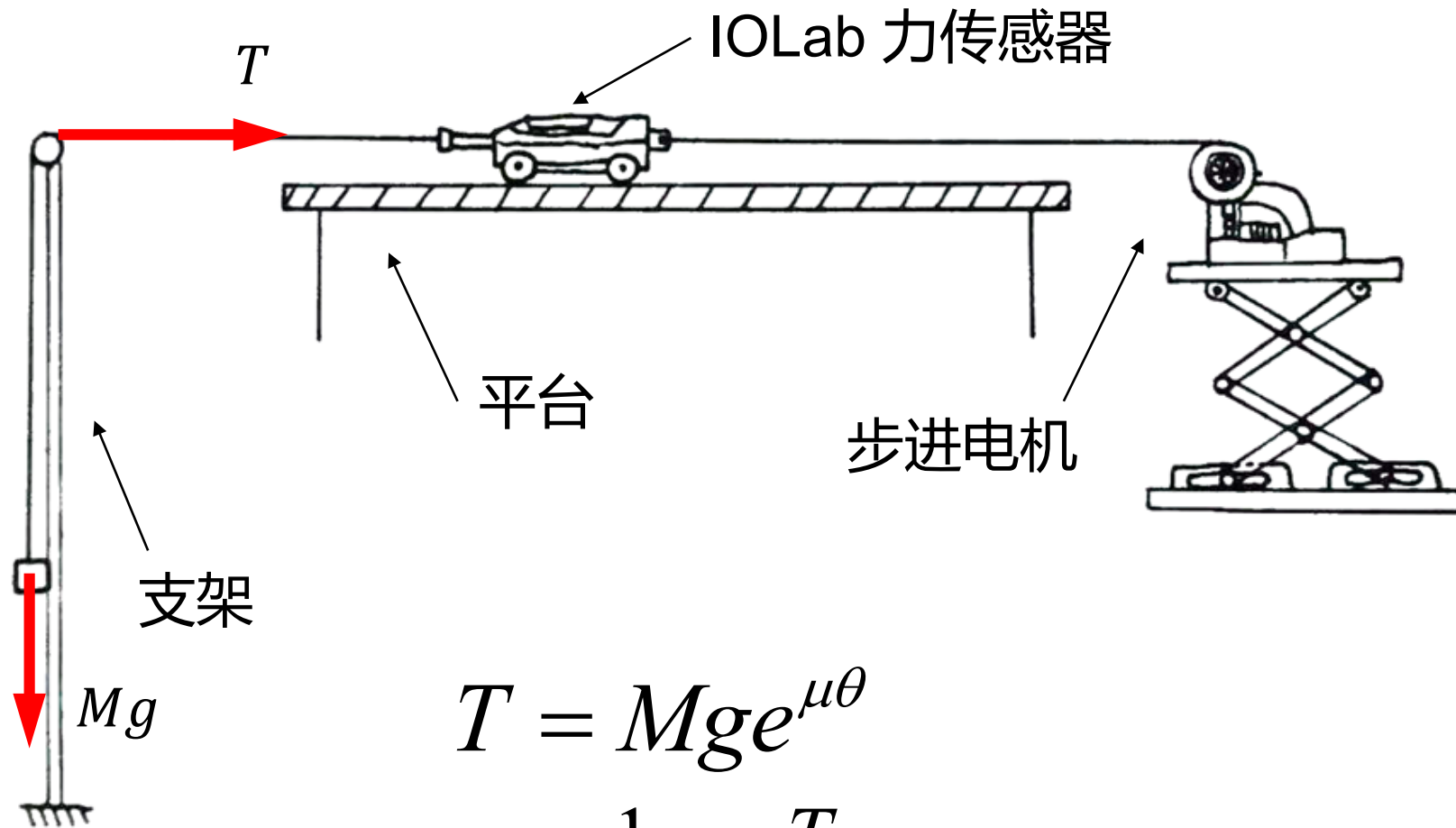


实验探究

03

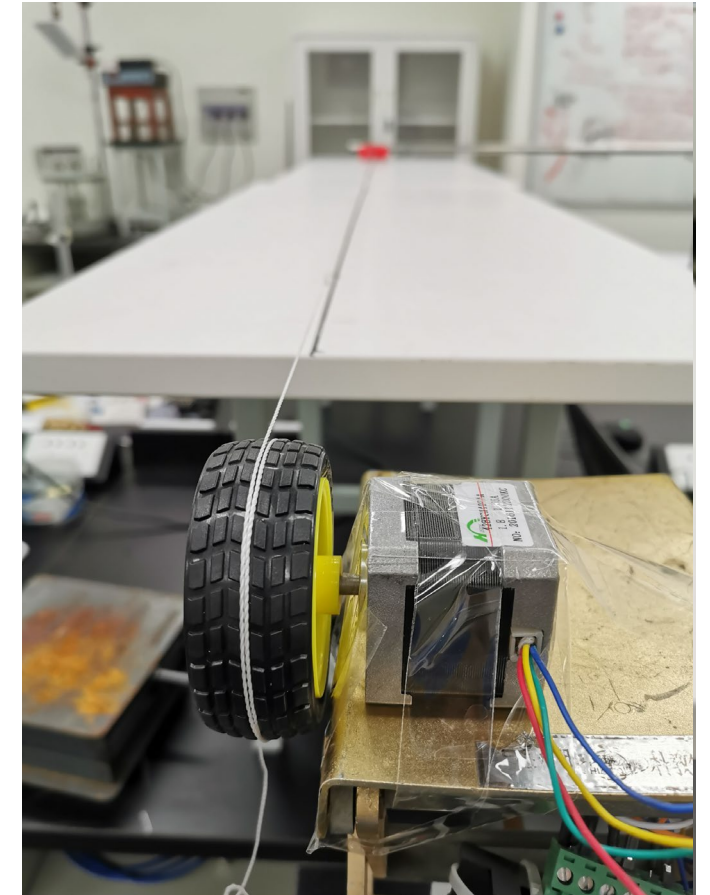
针对大物体停止后不再运动的现象
参数 μ , θ_0 , n , h_0 , R 的影响

测量动摩擦因数 μ

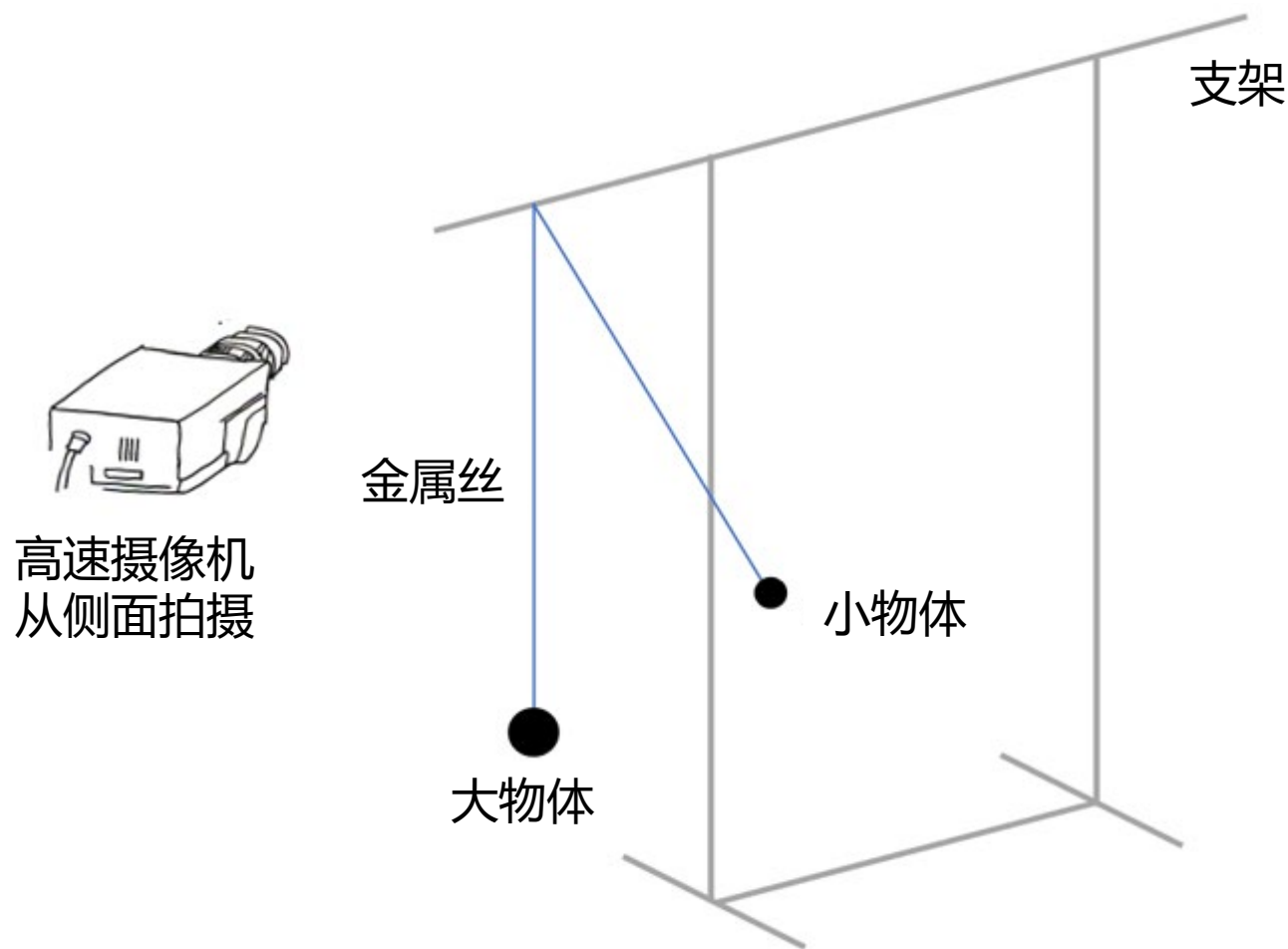


$$T = Mge^{\mu\theta}$$

$$\mu = \frac{1}{\theta} \ln \frac{T}{Mg}$$



实验装置



实验装置示意图

实验器材

支架, 重物, 小金属球, 金属丝, 1000fps高速摄像机, 电磁铁, 塑料套筒

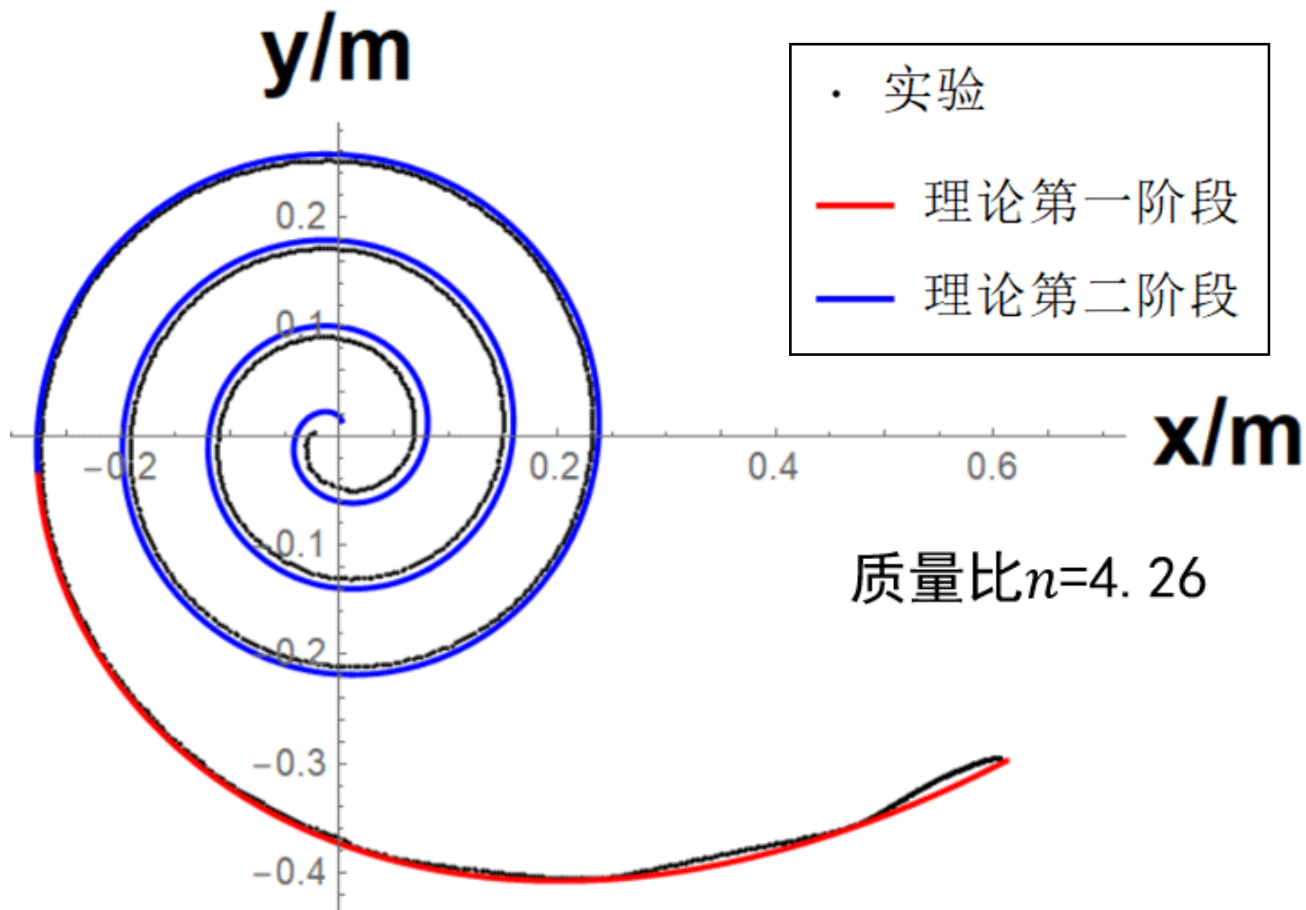
软件: Tracker, Mathematica



测量动摩擦因数 μ 结果

	悬挂重物质量 M	缠绕角度 θ	IO Lab测得拉力T	动摩擦因数 μ	
金属丝 与金属支架	52.1g	$5/2\pi$	$1.93 \pm 0.20\text{N}$	0.170 ± 0.013	取 $\mu=0.17$
			$1.88 \pm 0.21\text{N}$	0.166 ± 0.014	
			$1.94 \pm 0.20\text{N}$	0.170 ± 0.013	
			$1.90 \pm 0.21\text{N}$	0.167 ± 0.014	
	74.2g	$5/2\pi$	$2.71 \pm 0.15\text{N}$	0.168 ± 0.007	
			$2.60 \pm 0.20\text{N}$	0.162 ± 0.010	
金属丝与30mm 直径套筒	48.1g	$5/2\pi$	$1.49 \pm 0.13\text{N}$	0.147 ± 0.011	取 $\mu=0.15$
			$1.61 \pm 0.12\text{N}$	0.156 ± 0.009	
			$1.48 \pm 0.15\text{N}$	0.146 ± 0.013	
金属丝与40mm 直径套筒	67.9g	$5/2\pi$	$1.99 \pm 0.10\text{N}$	0.140 ± 0.006	
			$2.15 \pm 0.13\text{N}$	0.149 ± 0.008	
			$2.19 \pm 0.13\text{N}$	0.152 ± 0.008	

质量比 n 对于小物体的影响



$$\theta_0=1.11\text{rad}, h_0=0.68\text{m}, \mu=0.17, R=1.250\text{cm}$$

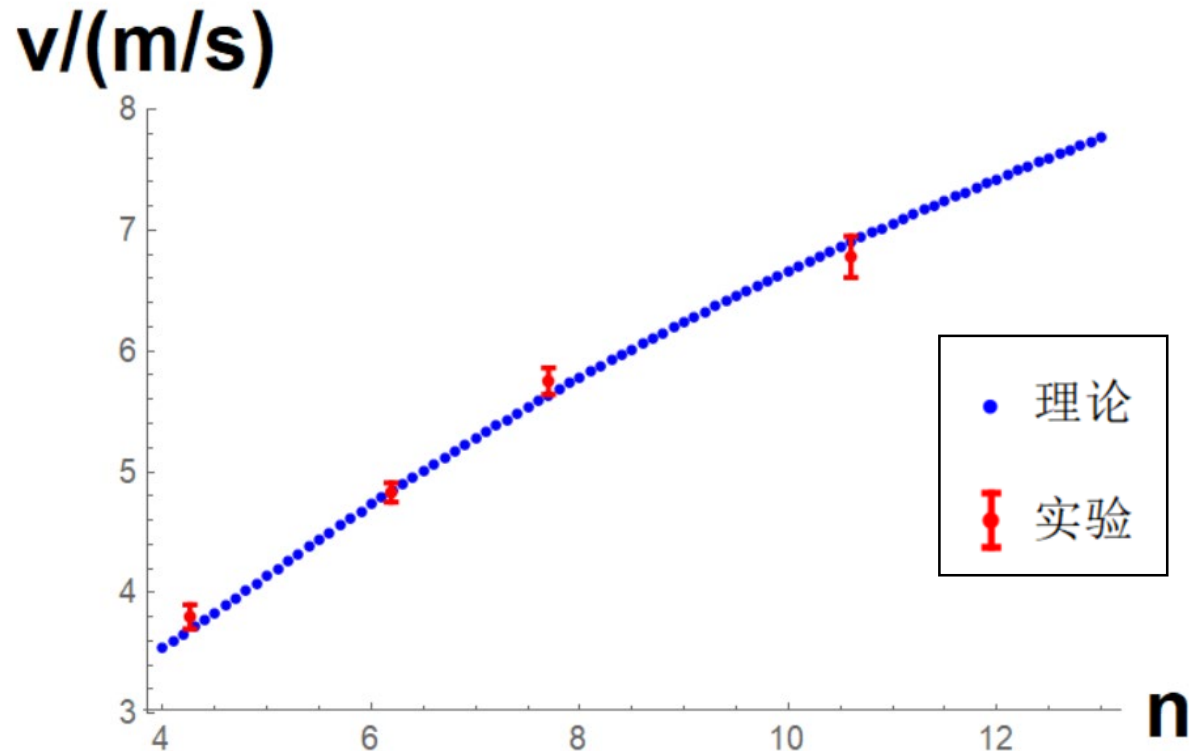
小物体运动轨迹图

现象:

随着质量比的增大

- 小物体缠绕圈数逐渐减少
- 进入第二阶段时绳子在杆上缠绕的角度逐渐增大
- 更多的势能转化为动能，小物体的速度更快，绳收短的速度快
- 需要更大的摩擦力才能拉住大物体

质量比 n 对于进入第二阶段时小物体速度 v 的影响



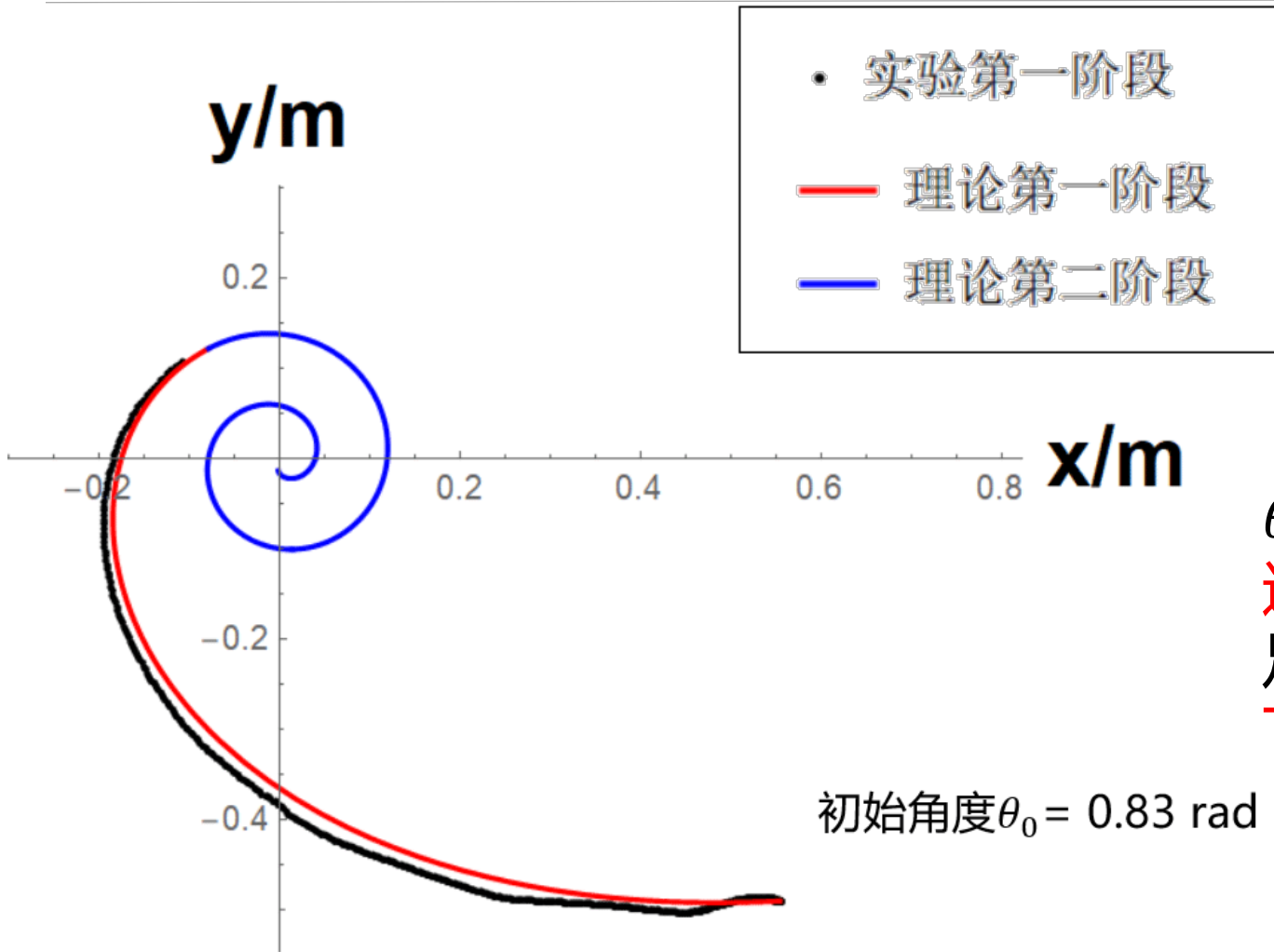
$\theta_0=1.11\text{rad}$, $h_0=0.68\text{m}$, $\mu=0.17$, $R=1.250\text{cm}$

质量比越大，进入第二阶段时小物体速度越快

n 过小：小物体的速度不够，绳无法完整缠绕绕杆

n 过大：小物体速度足够，绳完整缠绕绕杆，但摩擦无法支持大物体的重力，大物体最后仍会缓慢下落

初始角度 θ_0 对于小物体的影响



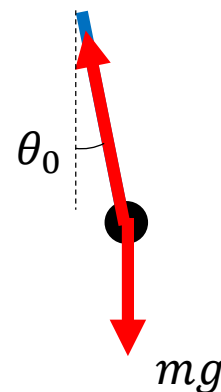
$n=7.70, h_0=0.75\text{m}, \mu=0.17, R=1.250\text{cm}$

现象:

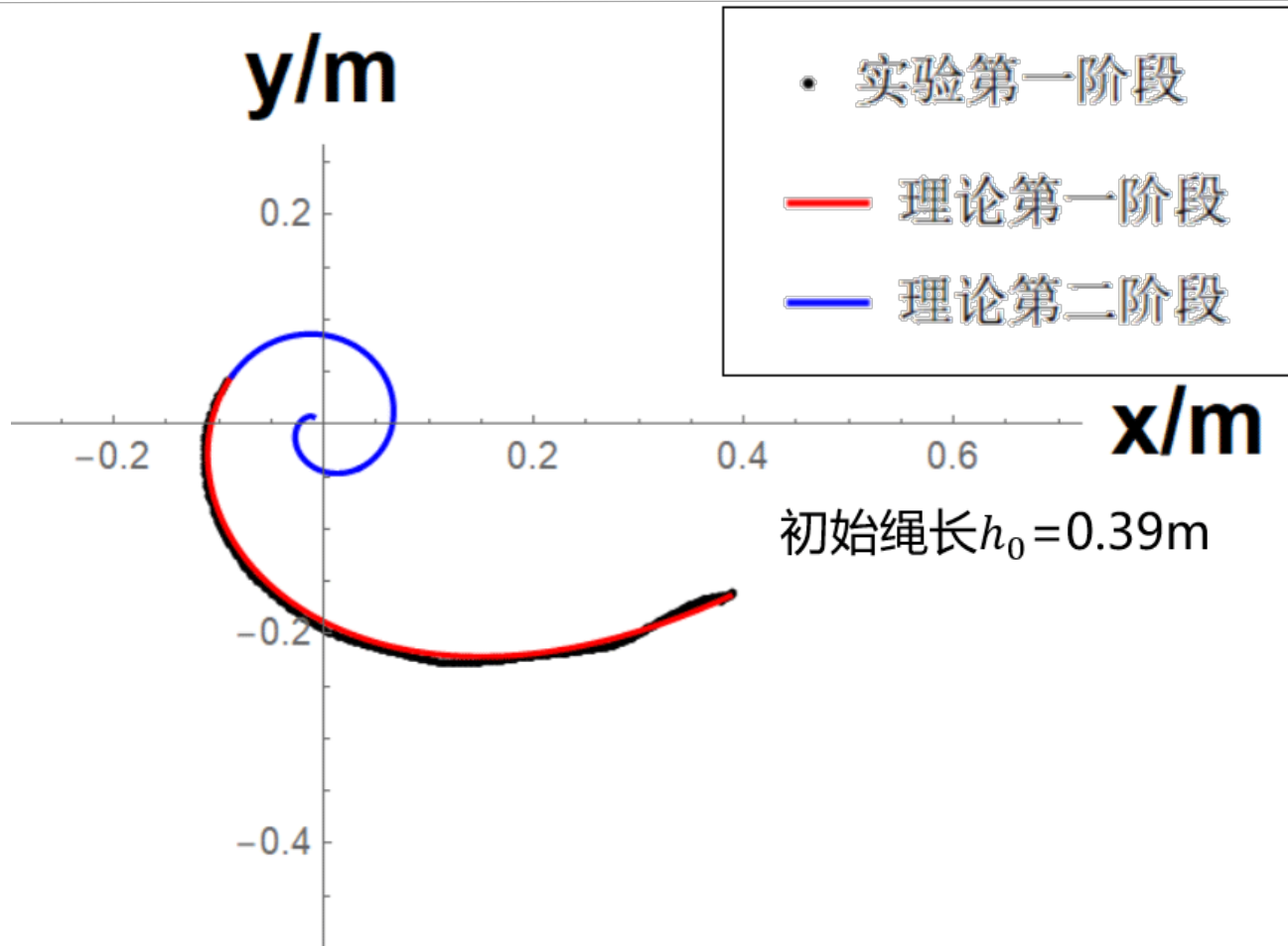
随着初始角度的增大

- 小物体缠绕圈数逐渐增大

θ_0 过小: 小物体在**与绳垂直方向的速度太小**, 无法使绳子在杆上缠绕足够的角度。摩擦**无法使大物体停下**



初始绳长 h_0 对于小物体的影响



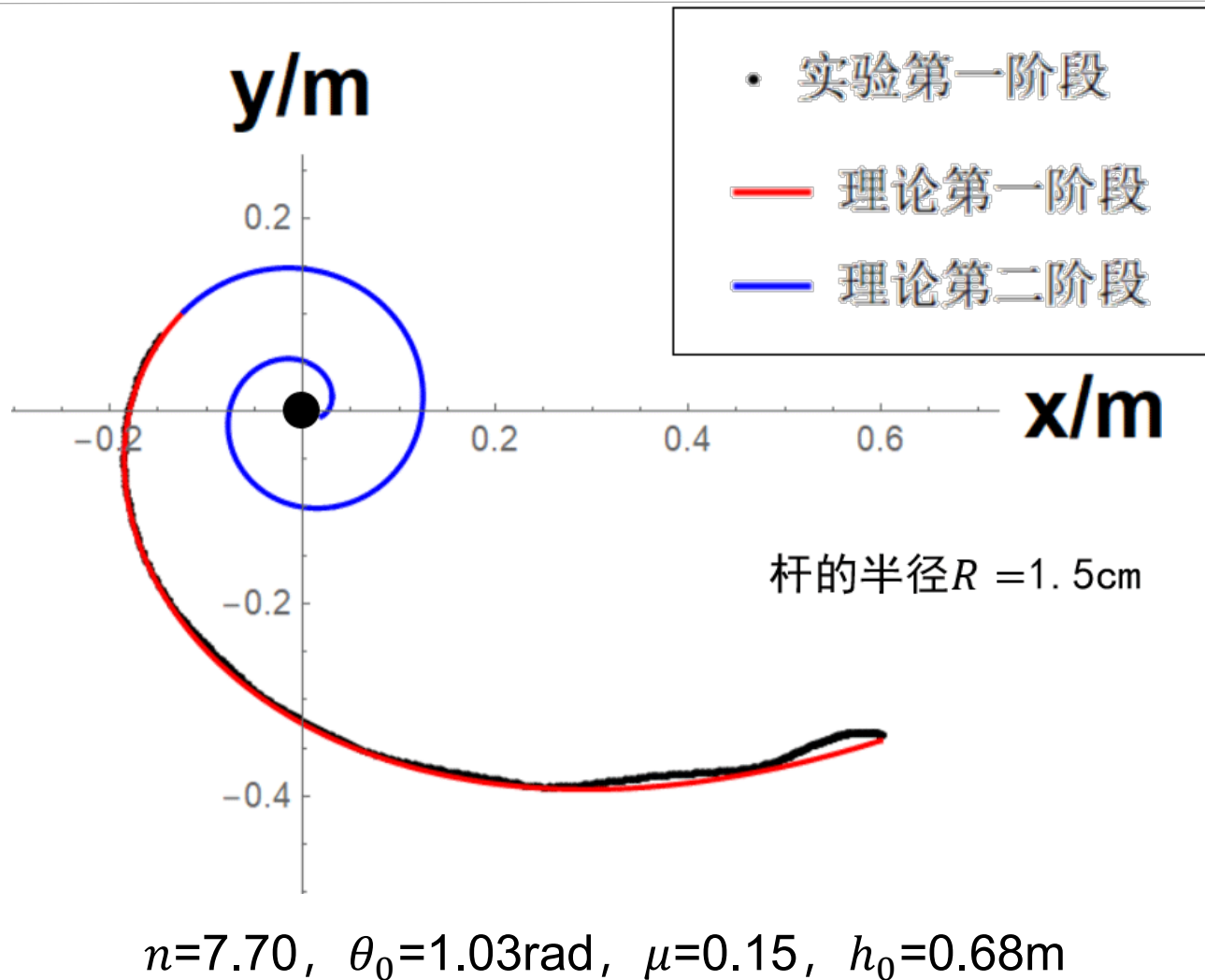
$n=7.70$, $\theta_0=1.14\text{rad}$, $\mu=0.17$, $R=1.250\text{cm}$

现象:

随着初始绳长的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐增加
- 进入第二阶段时绳子的长度逐渐增大

杆的半径 R 对于小物体的影响

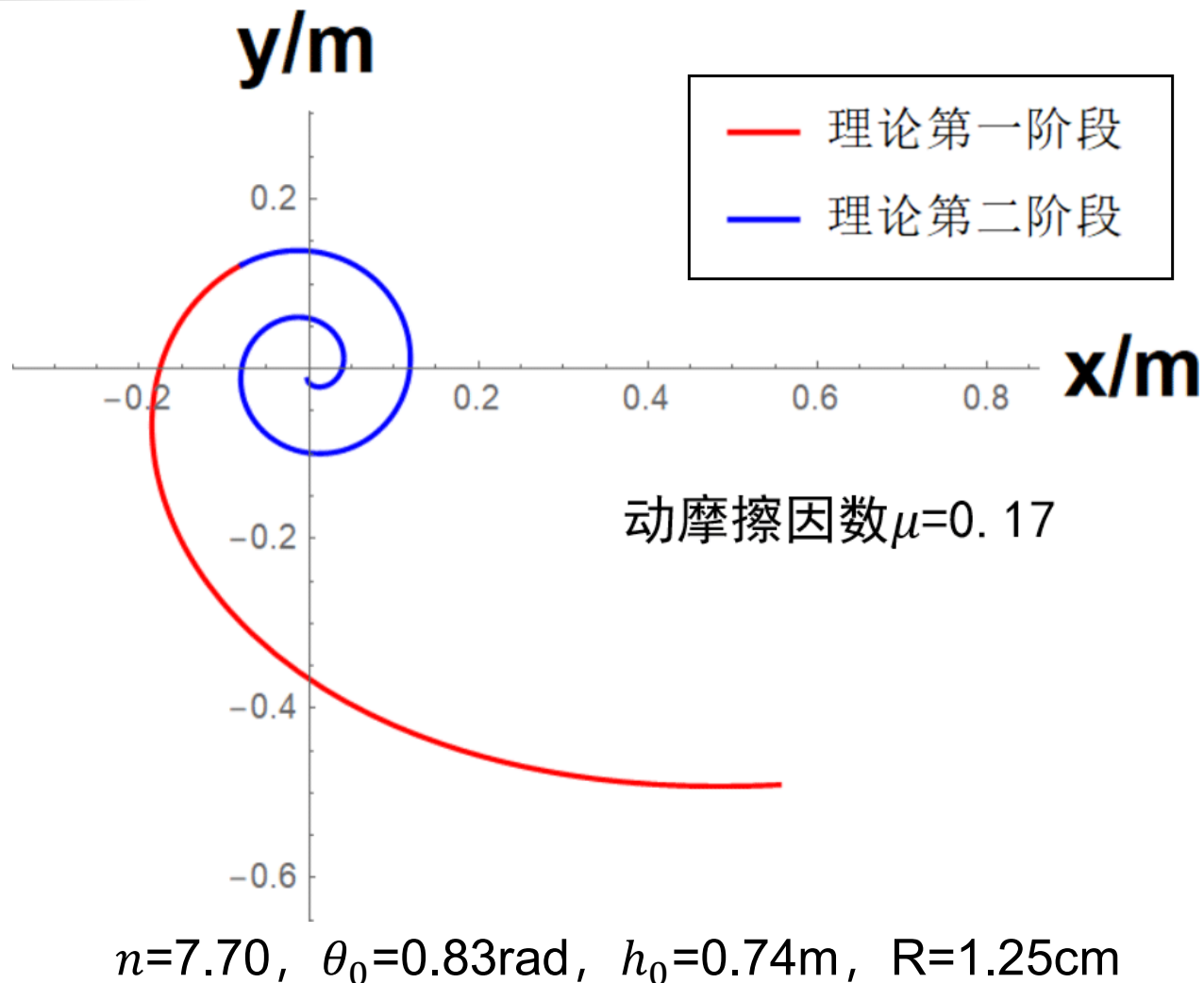


现象:

随着杆的半径的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐减少
- 进入第二阶段时绳子的长度逐渐减小

动摩擦因数 μ 对于小物体的影响



现象:

随着动摩擦因数的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐增加
- 进入第二阶段时绳子在杆上缠绕的角度逐渐减小
- 绳滑动时所需克服的阻力越大, 绳的滑动越慢, 进入第二阶段时绳长更长



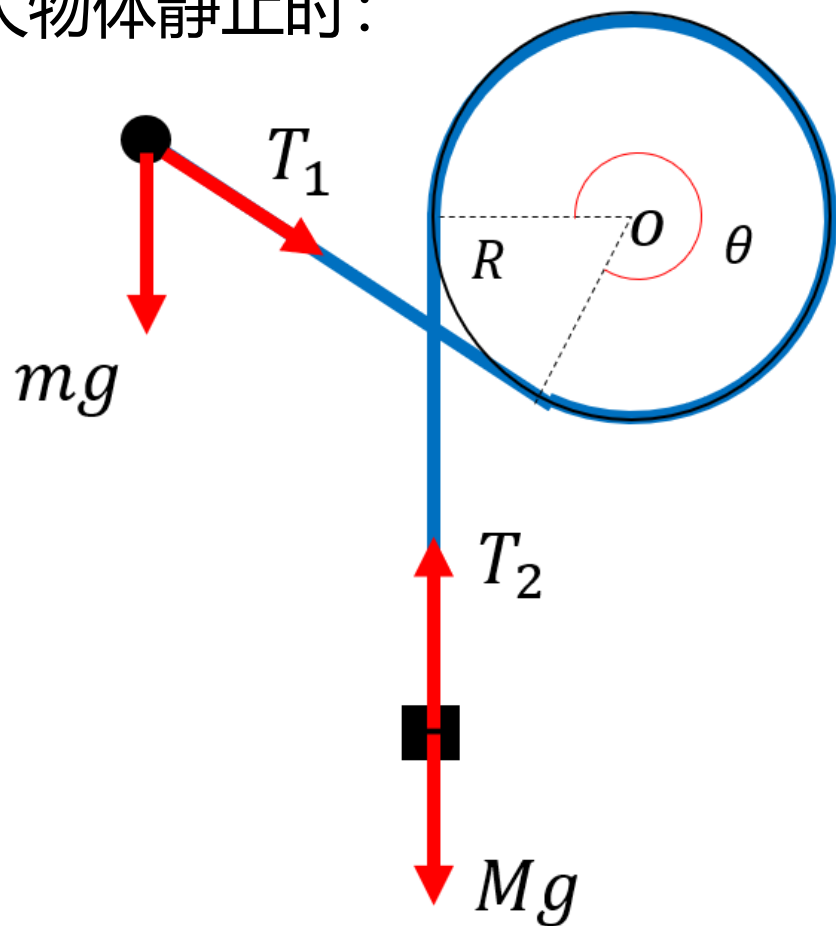
不同实验现象的出现条件讨论

04

主要研究大物体停止后重新运动

大物体静止后再次运动的现象解释

大物体静止时:



绳子不滑动的条件

$$T_1 e^{-\mu\theta} < T_2 < T_1 e^{\mu\theta}$$

- 物体速度较小时, T_1 较小

$$Mg > T_{2\max} = T_1 e^{\mu\theta}$$

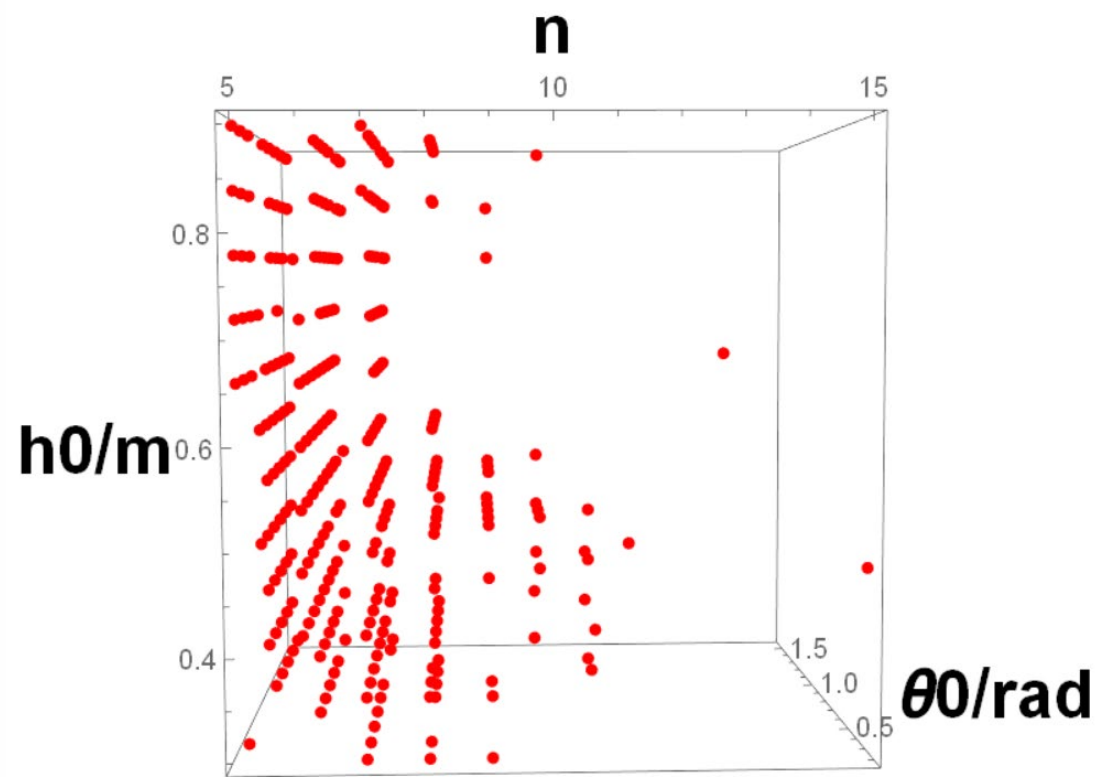
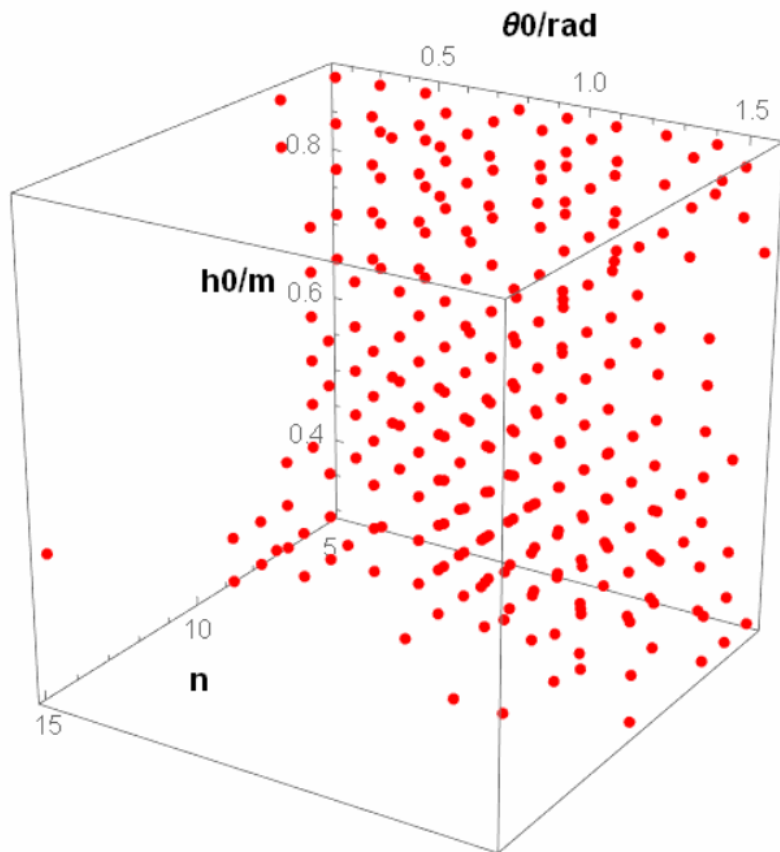
大物体下落

- 物体速度较大时, T_1 较大

$$Mg < T_{2\min} = T_1 e^{-\mu\theta}$$

大物体上升

制作“相图” 对大物体静止后重新下落进行预测



控制 $\mu = 0.40$, $R = 1.25\text{cm}$. 选择一组初始条件 (n, θ_0, h_0) , 计算其是否满足大物体静止后重新向下掉落的条件。如果满足, 就在三维空间中做出这个点

制作“相图”对结果进行预测

控制

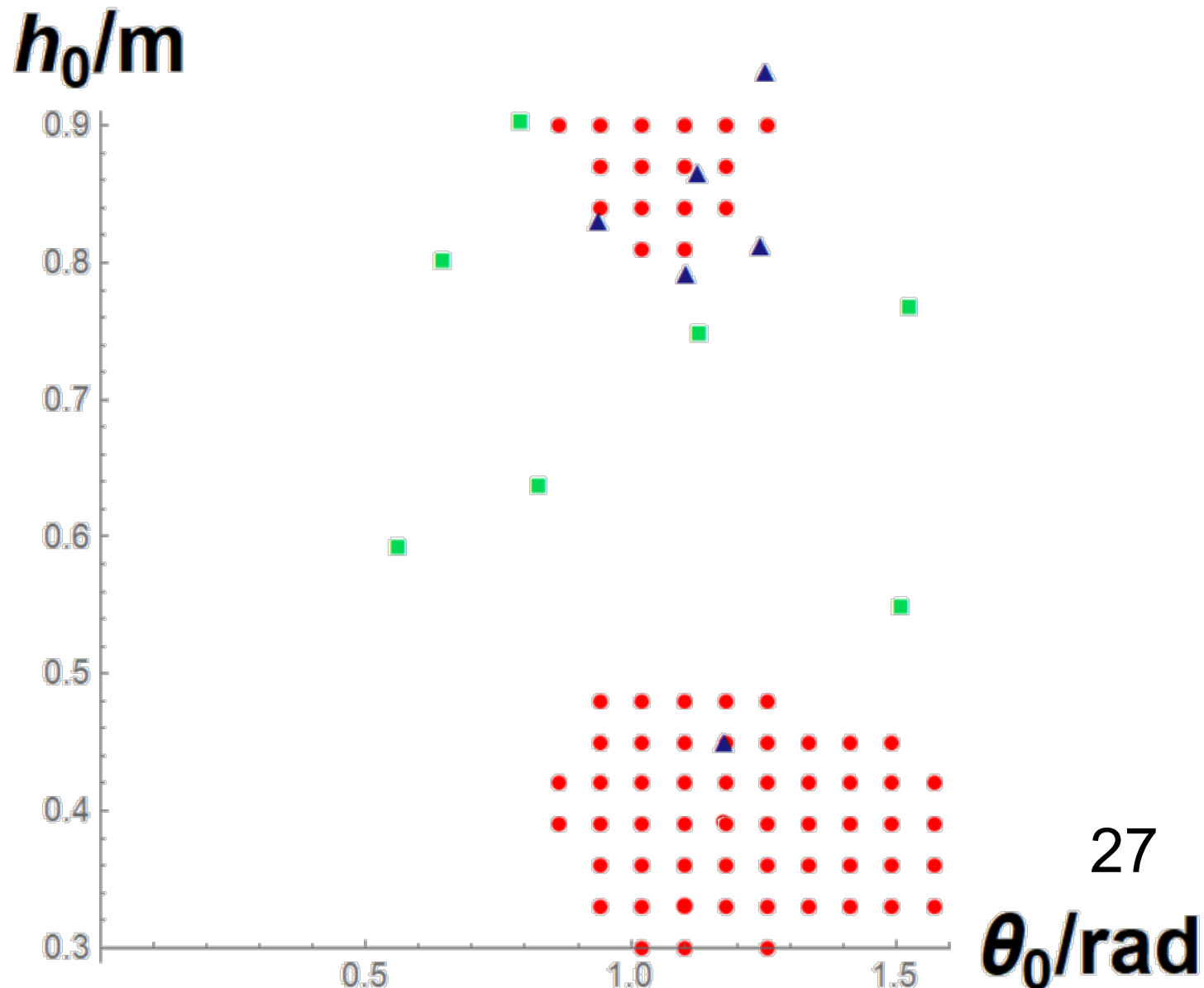
$$n=8.45$$

$$\mu=0.40$$

$$R=1.250\text{cm}$$

获得 (θ_0, h_0) 二维“相图”

- 理论中静止后继续下落
- ▲ 实验中静止后继续下落
- 实验中只停一次





总结

05

总结

1. 分阶段建立了理论模型

- 对多组不同初始条件的小物体运动轨迹图进行了数值模拟，与实验测量值较为符合

2. 讨论了参数对于实验结果的影响

- n 主要影响系统中势能转化为动能的情况。太小导致**速度不够**；太大则可能导致最后**摩擦不足以维持大物体静止**
- θ_0 、 h_0 、 R 影响大物体停止后，小物体绳长与缠绕杆的速度→**能否完整缠绕、缠绕圈数**
- μ 反映**摩擦耗散能量的效果**，对于小物体速度、绳缩短的速度有较大影响

3. 发现了大物体存在不停/停1次/停后重新下落/停后被拉起的四种实验现象，并对此进行了解释

4. 通过“相图”给出了在某些初始条件下，大物体是否会停后重新下落的预测

参考文献

- Capstan Equation, Wikipedia
- Konyukhov, A. (2015), Contact of ropes and orthotropic rough surfaces. Z. Angew. Math. Mech.
- Ivan Ilin. (2018) Петлевой маятник - численное моделирование. ТЮФ
Looping pendulum



Thanks

复旦大学队

喻知博 孙雯思 方胤豪 吴晋渊 舒畅

附录

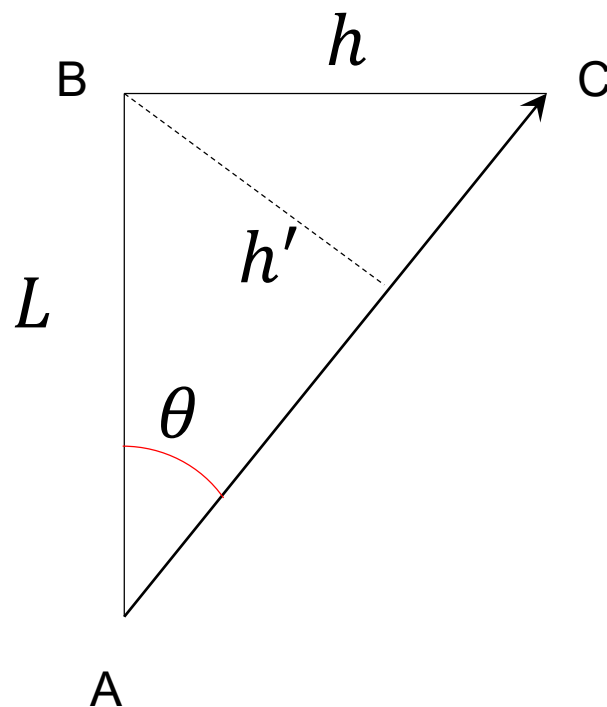
小物体：直径1.5cm的小钢球

大物体：近似看成圆柱体，高6.0cm，底面直径3.0cm

附录

视角：拍摄距离： $L=4.5\text{m}$ ，绳长： $h<0.9\text{m}$ ， $\theta<12^\circ$ ， $\Delta h<0.02\text{m}$

- A：相机镜头位置
- B：杆截面所在位置
- BC：绳子



$$\Delta h = h - h'$$

俯视图

附录：绳的在杆上的螺旋缠绕

绳以固定曲率螺旋缠绕在圆柱杆上

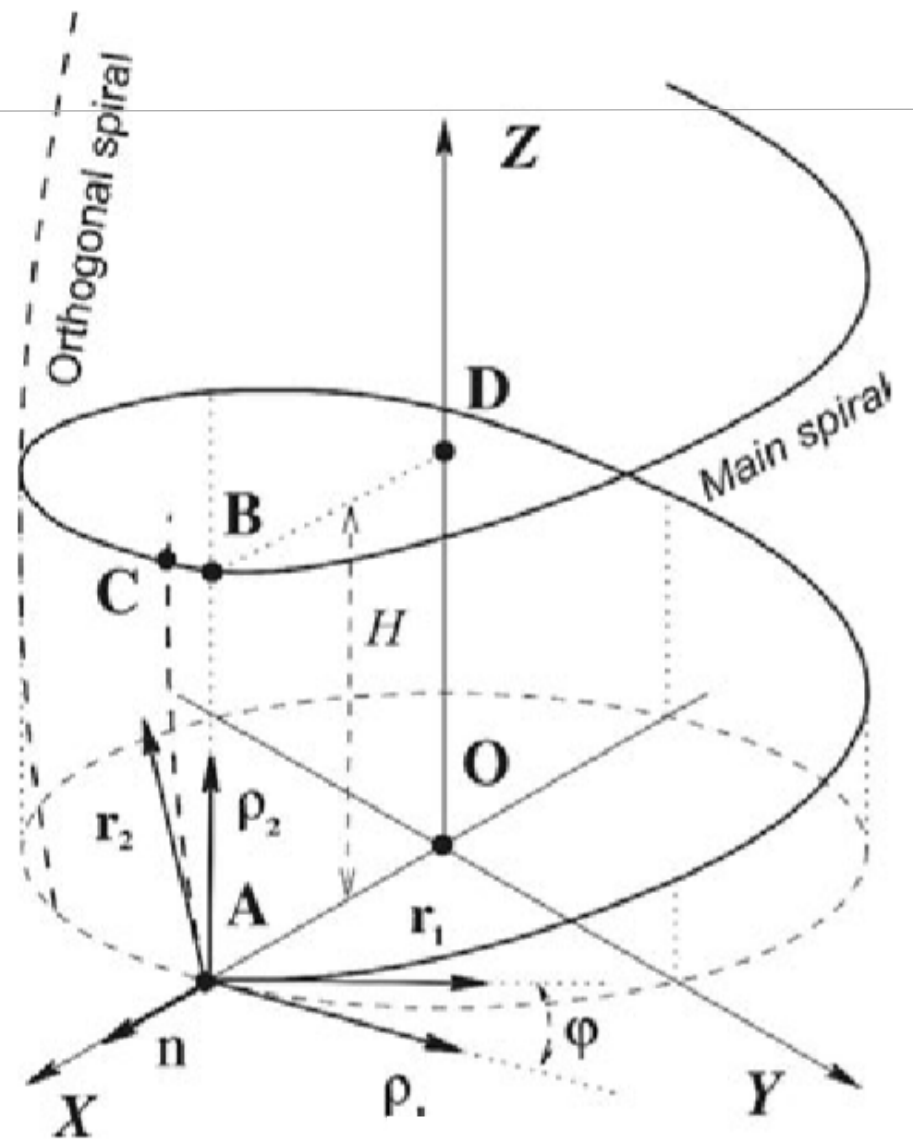
$$T' = T_0 \exp\left(\mu\theta \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}}\right)$$

- μ : 摩擦因数
- θ : 缠绕角度
- R : 杆的半径
- H : 绳缠绕的螺距

$$R=12.50\text{mm}, H\approx 2\text{mm}$$

$$\mu=0.4, \theta=8\pi \text{ 时}$$

$$\frac{T'}{T} \approx 0.997$$



附录：空气阻力带来的速度偏差

小物体运动时，周围空气的雷诺数 $R_e = \frac{\rho v r}{\eta} \approx 9750$

$$\eta \approx 10^{-5} \text{ Pa/s}$$

$$\rho = 1.3 \text{ g/cm}^3$$

$$v \approx 5 \text{ m/s}$$

$$r = 1.5 \text{ cm}$$

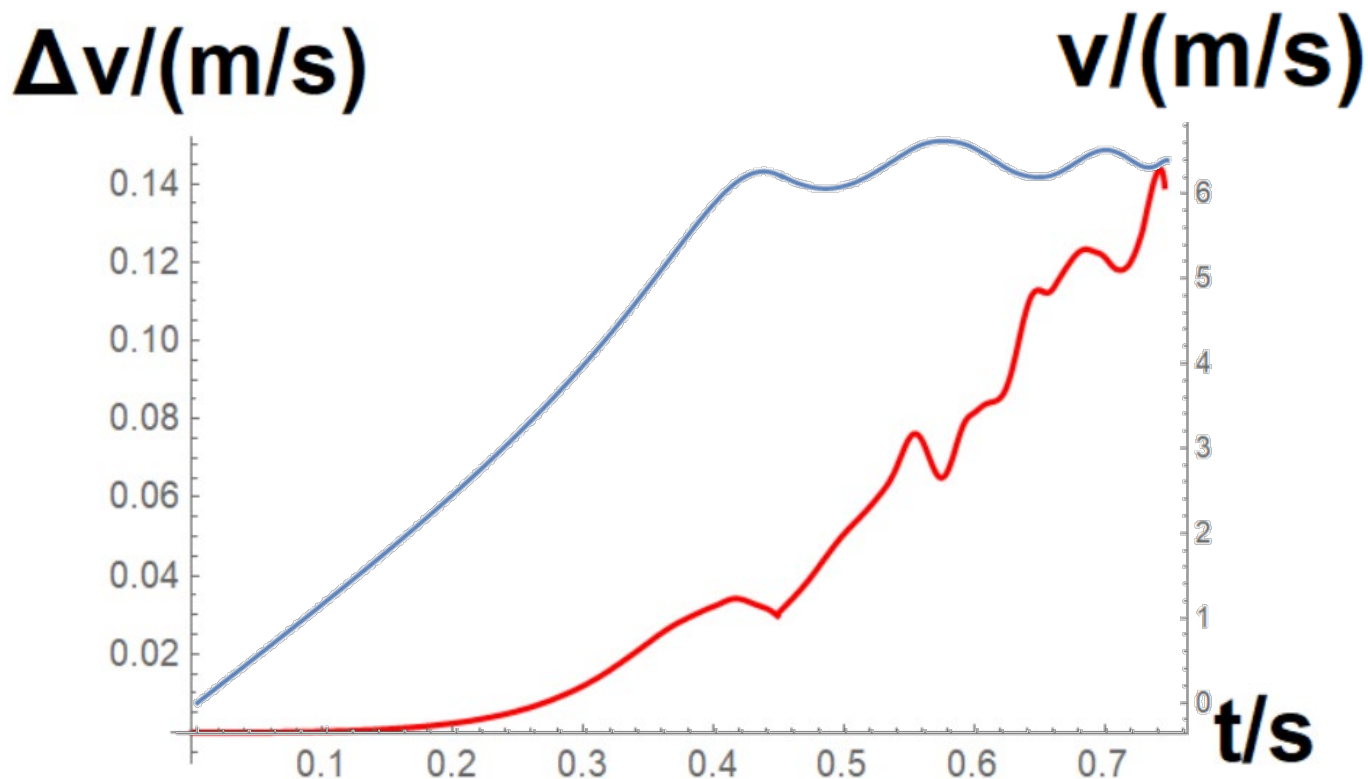
牛顿阻力定律：

$$f = \frac{1}{2} C_d \rho v^2 A$$

C_d ：阻力系数，对于圆球取0.5

A ：迎风面积

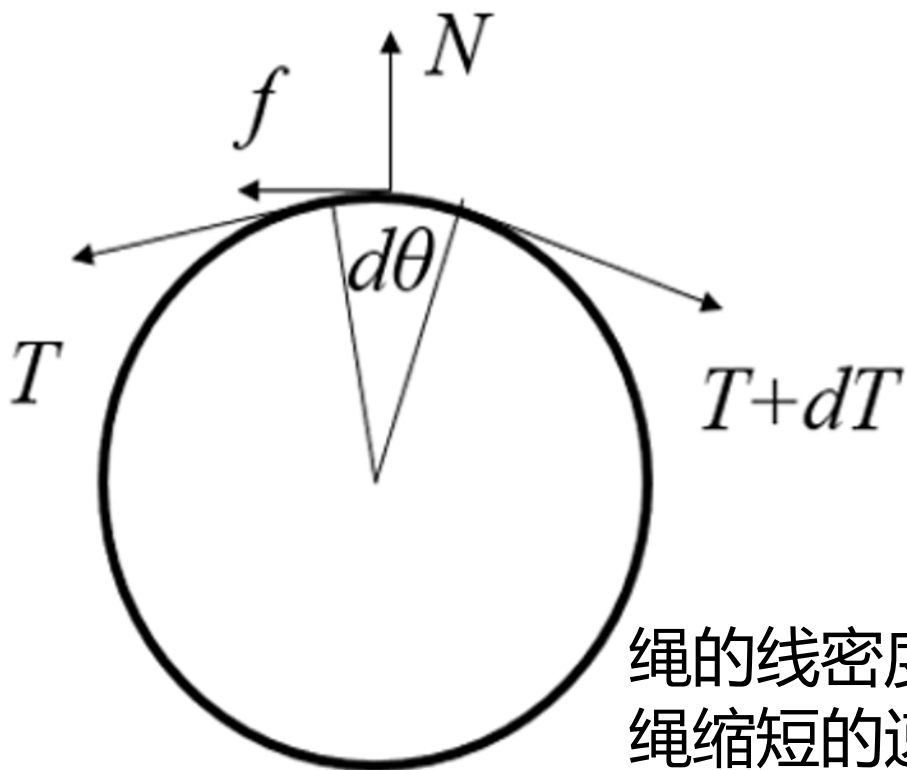
— 空气阻力带来的速度变化量
— 不考虑空气阻力时的速度



$n=7.70, \theta_0=1.19\text{rad}, \mu=0.17, h_0=0.80\text{m}, R=1.25\text{cm}$

Reference: Drag Coefficient – Wikipedia

附录：绳的质量对于摩擦力的影响



$$(T + T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - N = \lambda d\theta R \frac{v^2}{R}$$

$$T + dT - T - f = m\dot{v}$$

$$T = \left[T_0 + \frac{\lambda(R\dot{v} - v^2\mu)}{\mu} \right] e^{\mu\theta} - \frac{\lambda(R\dot{v} - v^2\mu)}{\mu}$$

绳的线密度

$$\lambda = 0.37 \text{ g/m}$$

绳缩短的速度

$$v = 6 \text{ m/s}$$

动摩擦因数

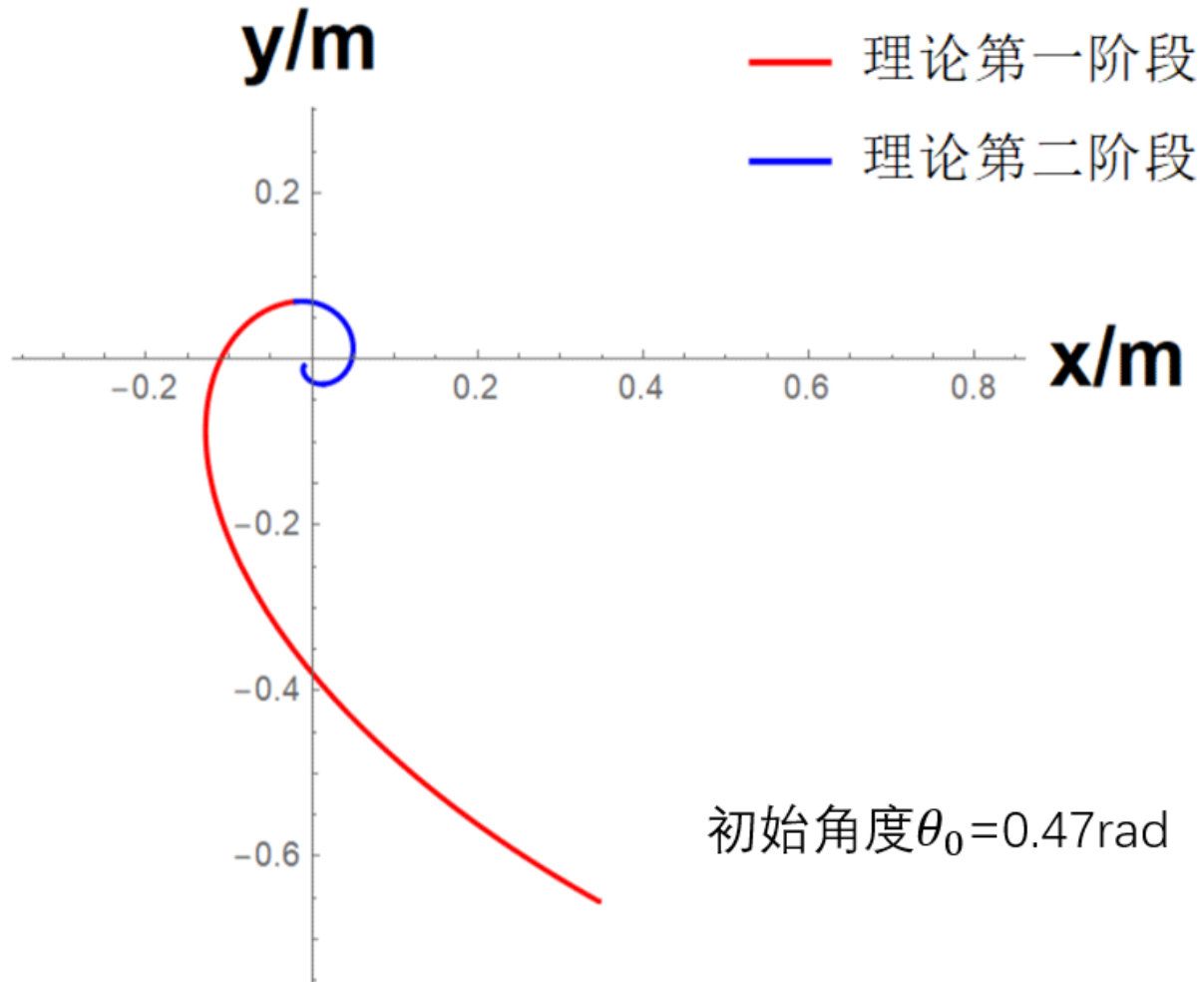
$$\mu = 0.4$$

$$\frac{\lambda(R\dot{v} - v^2\mu)}{\mu} < 0.013 \text{ N}$$

$$R = 1.250 \text{ cm}$$

$$\dot{v} = 20 \text{ m/s}^2$$

定性解释：初始角度 θ_0 对于小物体的影响

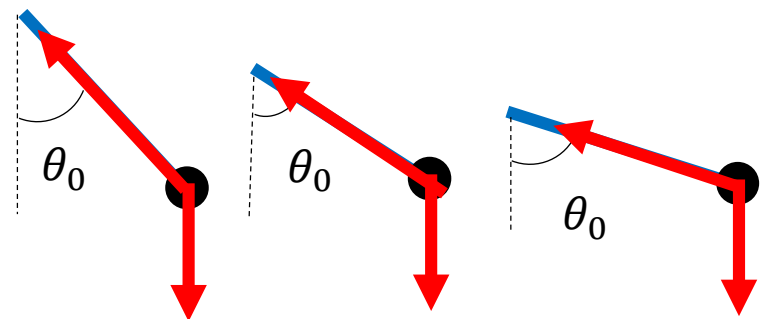


$n=7.70, h_0=0.75\text{m}, \mu=0.17, R=1.250\text{cm}$

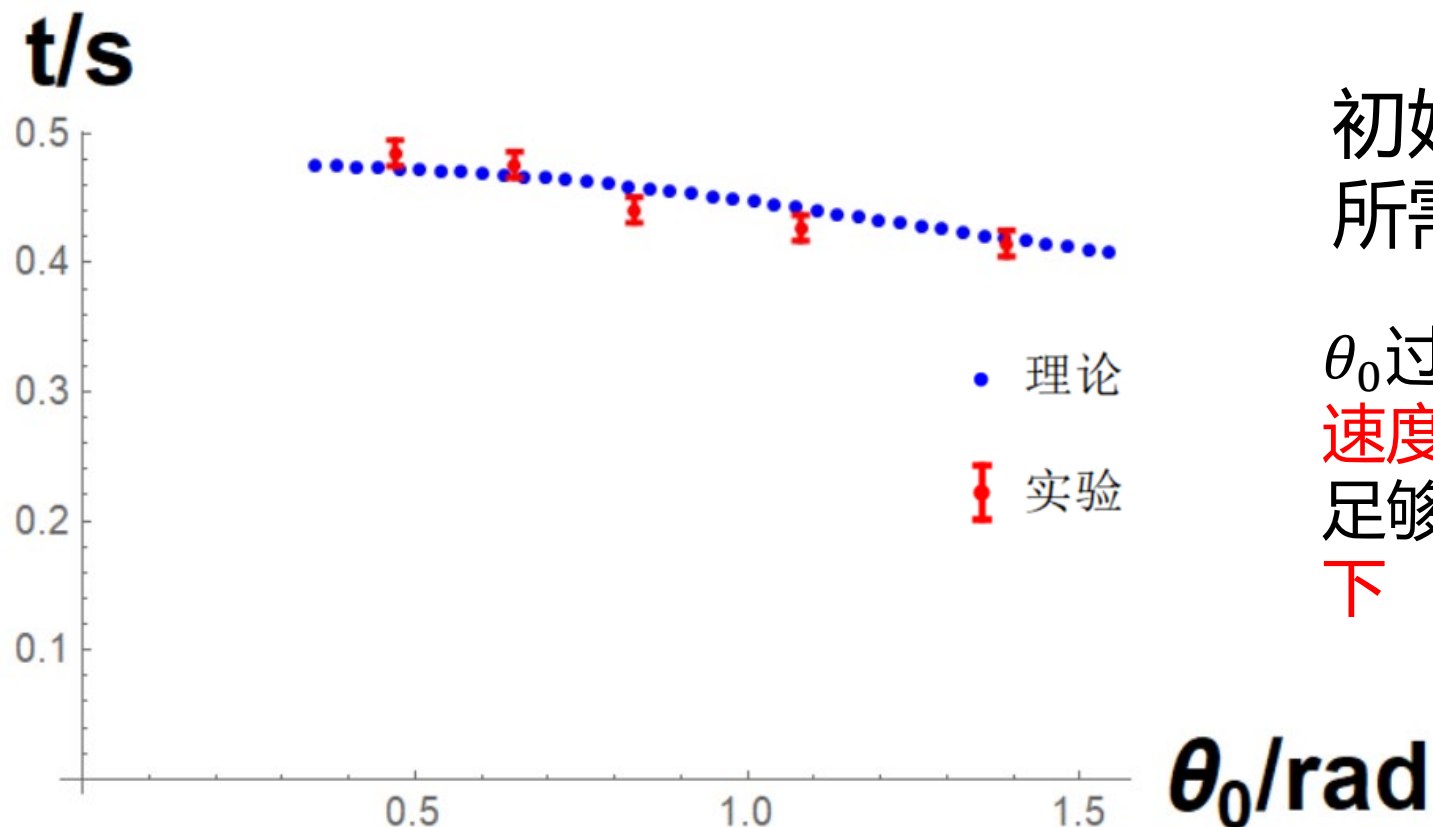
现象：

随着初始角度的增大

- 小物体缠绕圈数逐渐减少
- 小物体重力的沿绳分量逐渐减小，导致沿绳收缩方向上的加速度减小，绳收缩更快

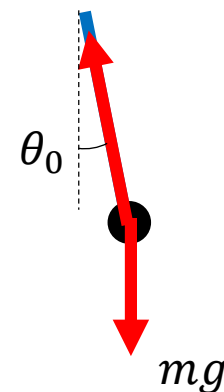


定性解释：初始角度 θ_0 对于大物体静止时刻的影响



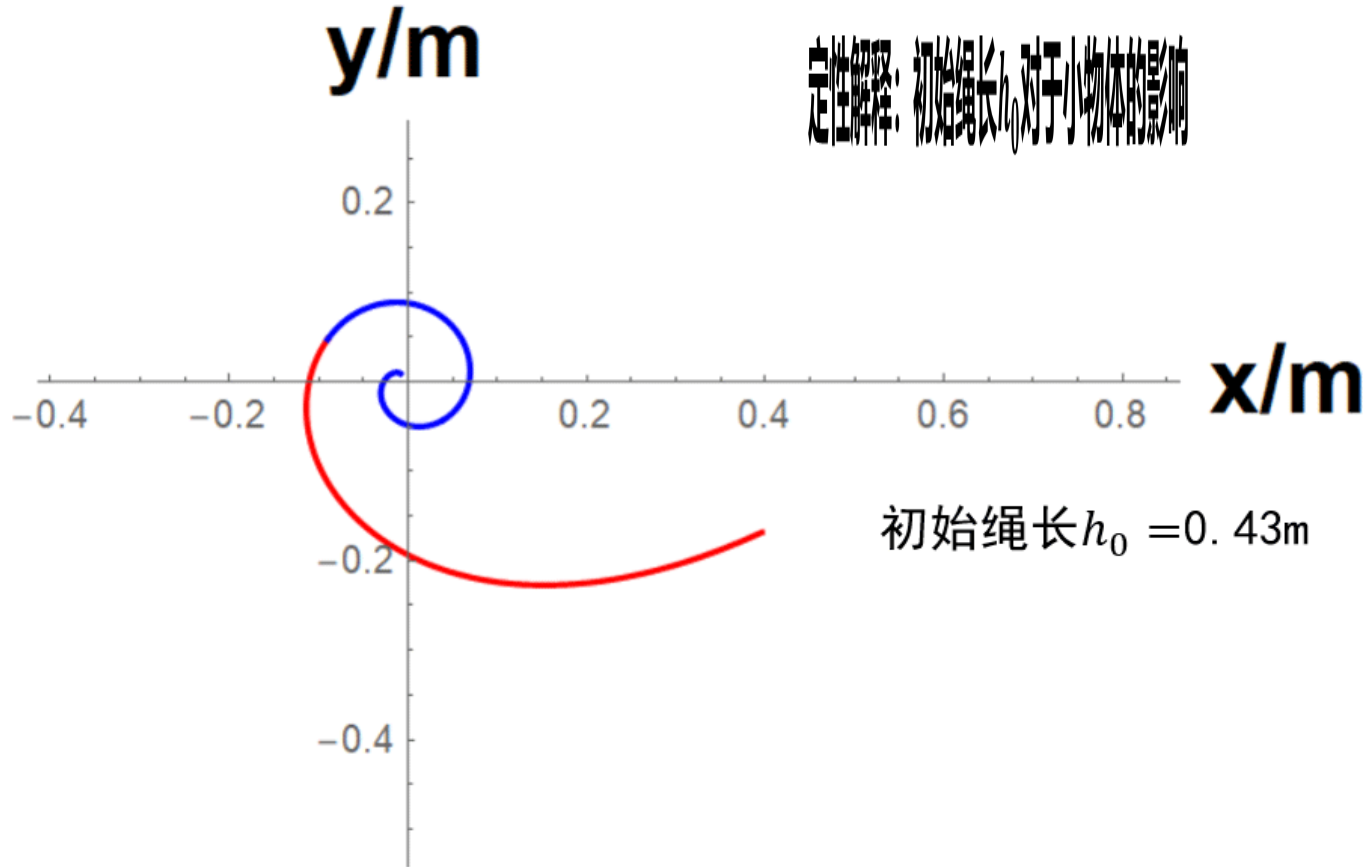
初始角度越大，大物体静止所需时间越短

θ_0 过小：小物体在与绳垂直方向的速度太小，无法使绳子在杆上缠绕足够的角度。摩擦无法使大物体停下



$n=7.70, h_0=0.75\text{m}, \mu=0.17, R=1.250\text{cm}$

定性解释：初始绳长 h_0 对于小物体的影响



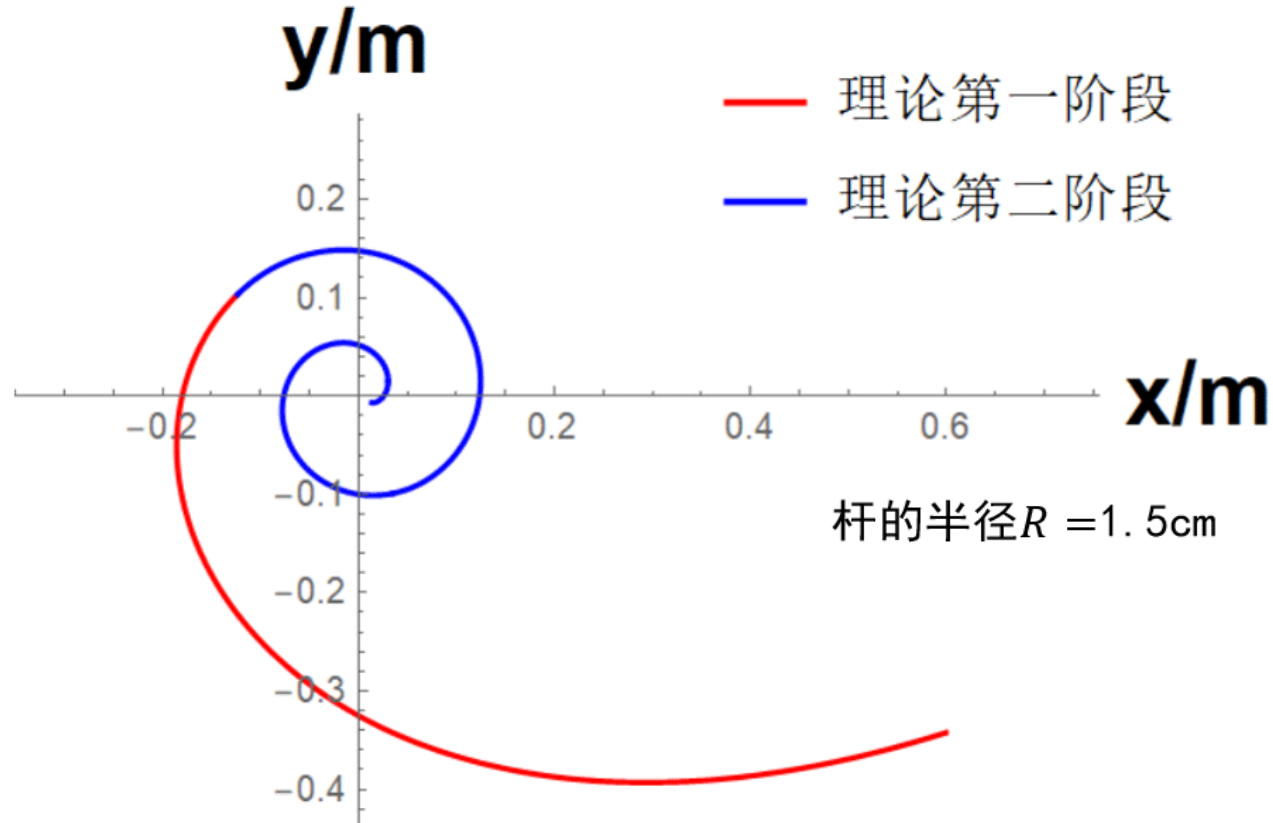
$$n=7.70, \theta_0=1.14\text{rad}, \mu=0.17, R=1.250\text{cm}$$

现象：

随着初始绳长的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐增加
- 进入第二阶段时绳子的长度逐渐增大

定性解释：杆的半径 R 对于小物体的影响

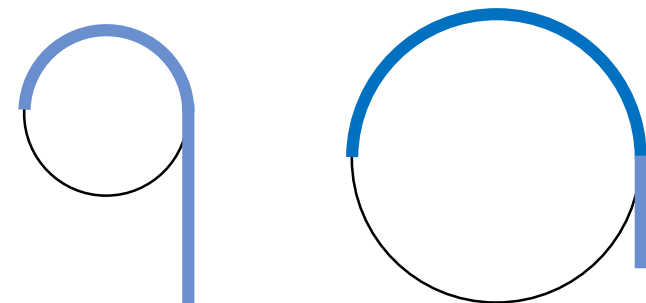


$$n=7.70, \theta_0=1.03\text{rad}, \mu=0.17, h_0=0.68\text{m}$$

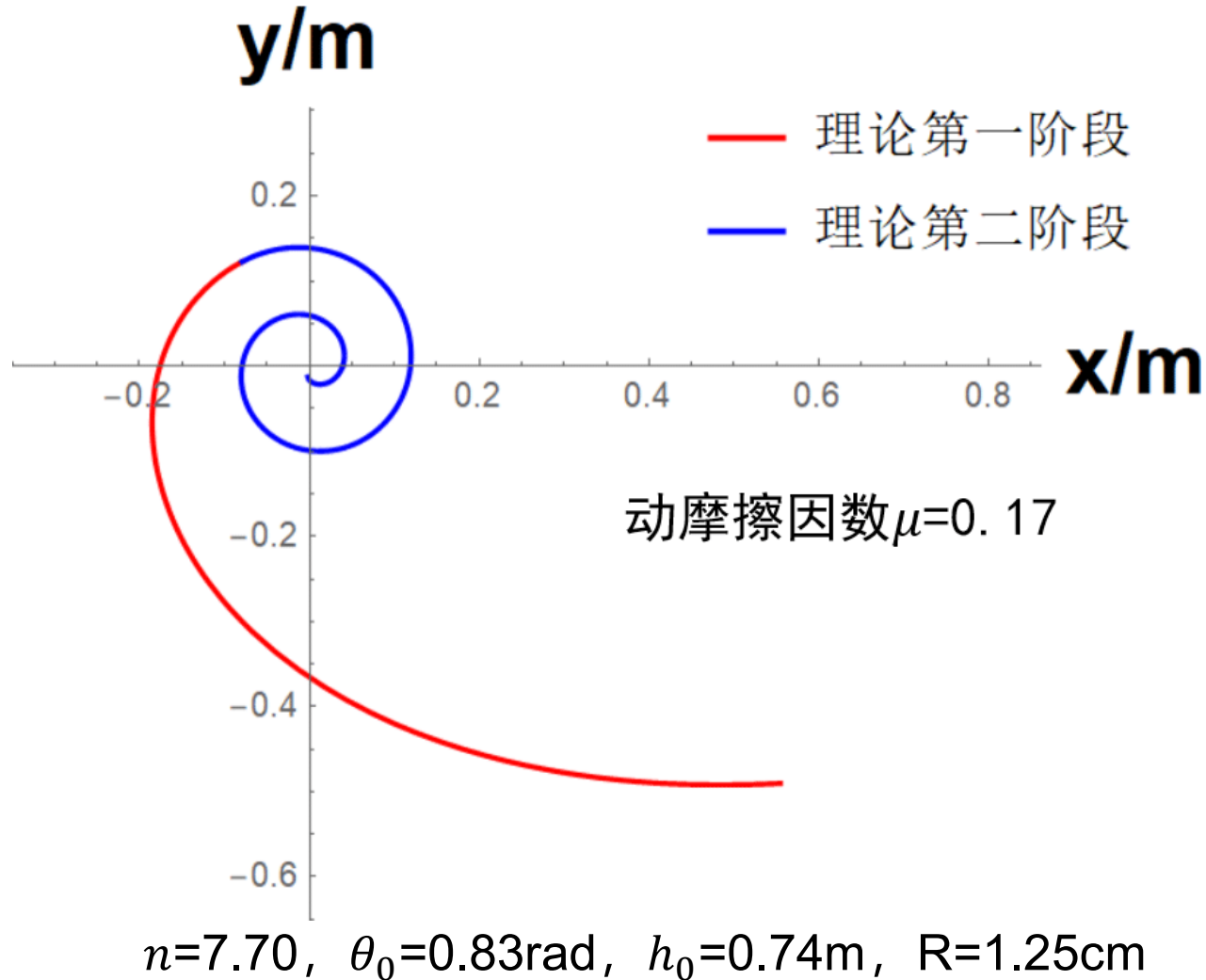
现象：

随着杆的半径的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐减少
 - 进入第二阶段时绳子的长度逐渐减小
- 半径越大，缠绕角度、总绳长一定时，小物体侧绳子越短



定性解释：动摩擦因数 μ 对于小物体的影响

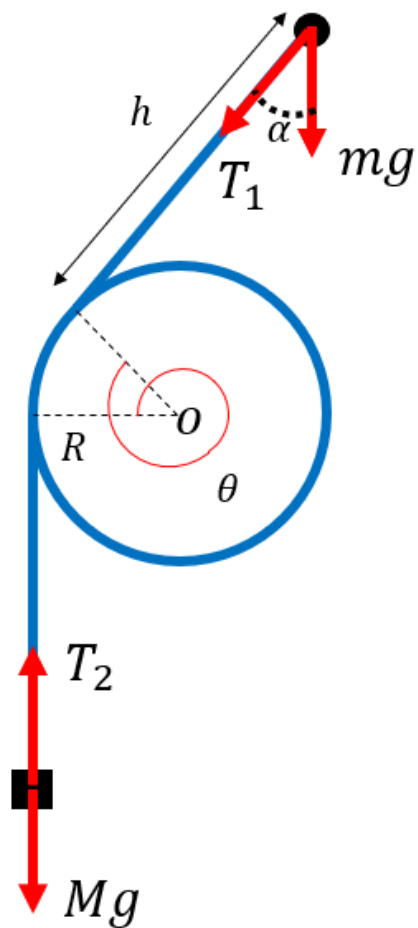


现象：

随着动摩擦因数的增加

- 小物体缠绕圈数逐渐增加
- 进入第二阶段时绳子在杆上缠绕的角度逐渐增大
- 动摩擦因数增大，大物体更容易停下，小物体的运动更早进入第二阶段

附录：验证小物体拉起大物体的猜想



小物体刚刚拉起大物体时

$$F_n = T_1 + mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{h}$$

$$T_1 = T_2 e^{\mu \theta}$$

$$T_2 = Mg$$

$\alpha = 19^\circ$ 缠绕角度 $\theta = 379^\circ$

小物体速度 $v = 6.8 \text{ m/s}$

小物体侧绳长 $h = 0.12 \text{ m}$

质量比 $n = \frac{M}{m} = 10.6$

$\mu = 0.19$ 与实验测量值 0.17 相近