

课题
17

Popsicle Chain Reaction



复旦大学

喻知博 孙雯思 方胤豪 吴晋渊 舒畅

1

课题描述



1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结

Wooden popsicle sticks can be joined together by **slightly bending** each of them so that they **interlock** in a so-called “**cobra weave**” chain. When such a chain has **one of its ends released**, the sticks rapidly dislodge, and **a wave front travels along the chain**. Investigate the phenomenon.

木质雪糕棍可通过**轻微的弯曲**彼此连接而形成“**眼镜蛇式编织**”链条。当这种链条的**一端**被释放时，木棒迅速脱落，且波前沿着链条传播。探究这一现象。

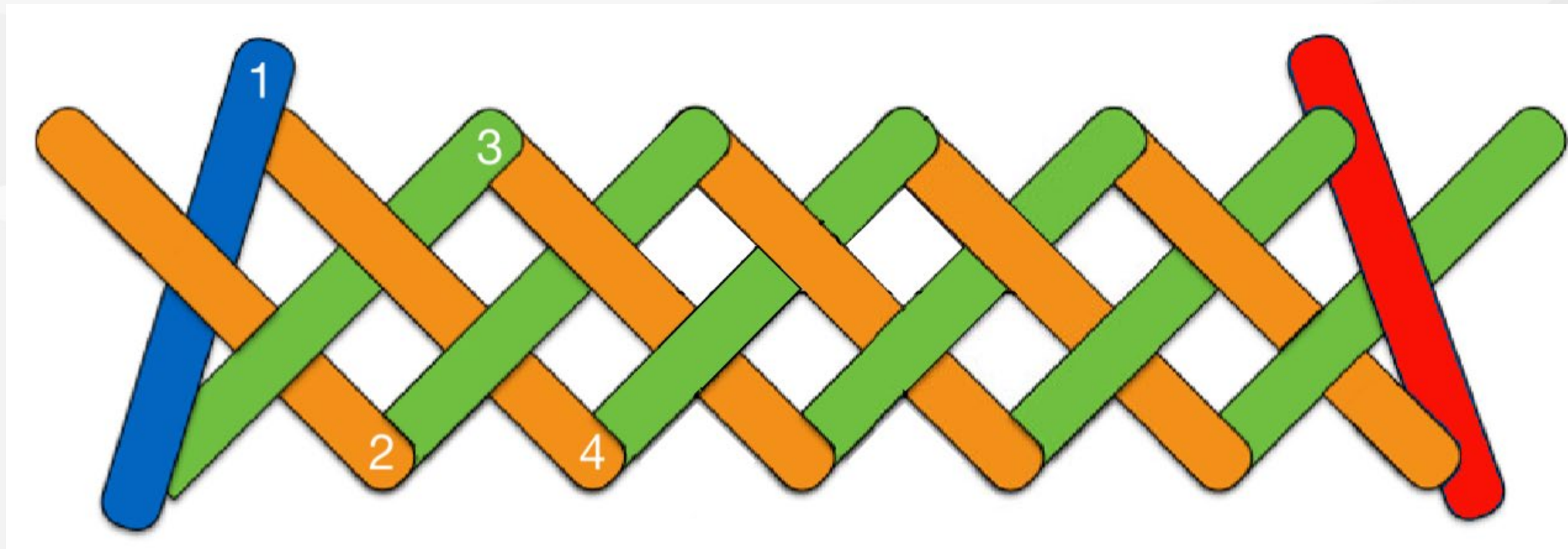
轻微弯曲

眼镜蛇式编织

一端释放



1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



由于编织结构的**不对称性**
两端释放的实验情况不同



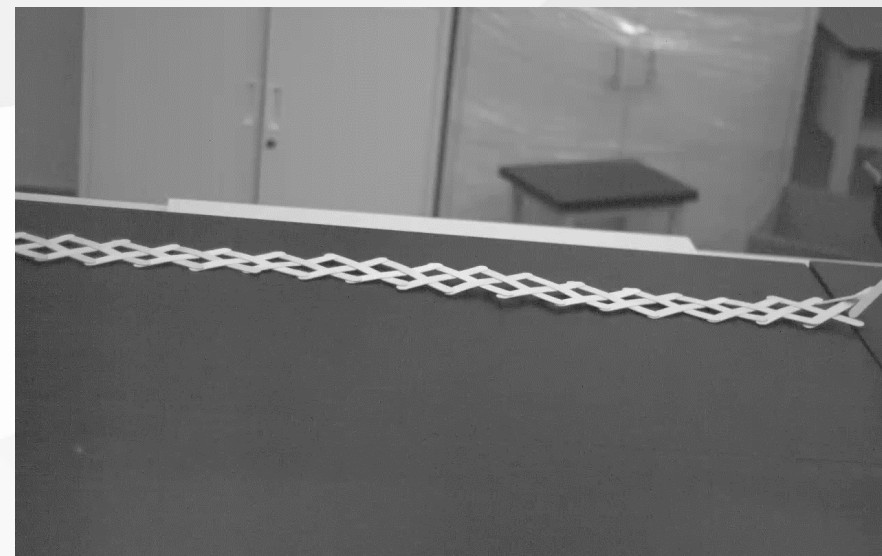
2.1 预实验图像：不对称释放

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

正向释放：



反向释放：



由高速摄像机拍摄，帧率为 1000 fps

正向释放可以形成眼镜蛇波，而反向释放不行

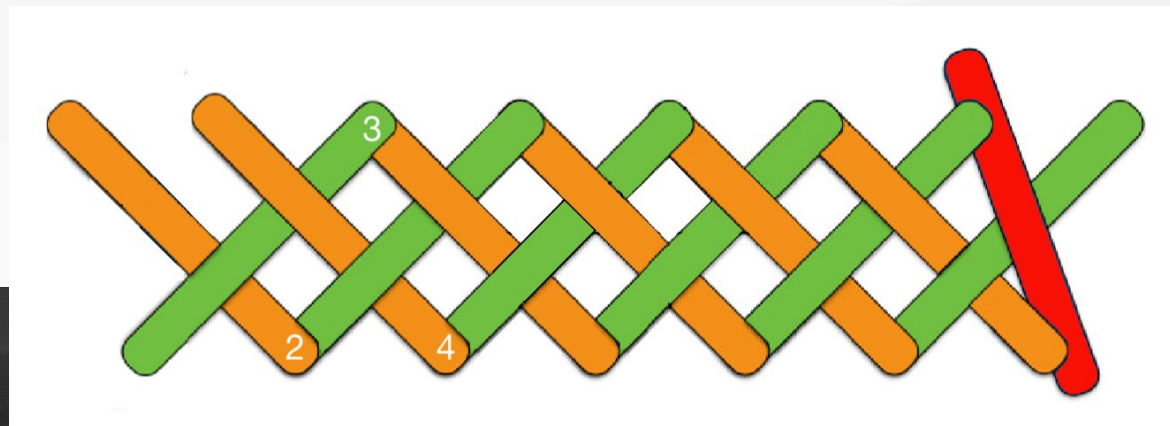
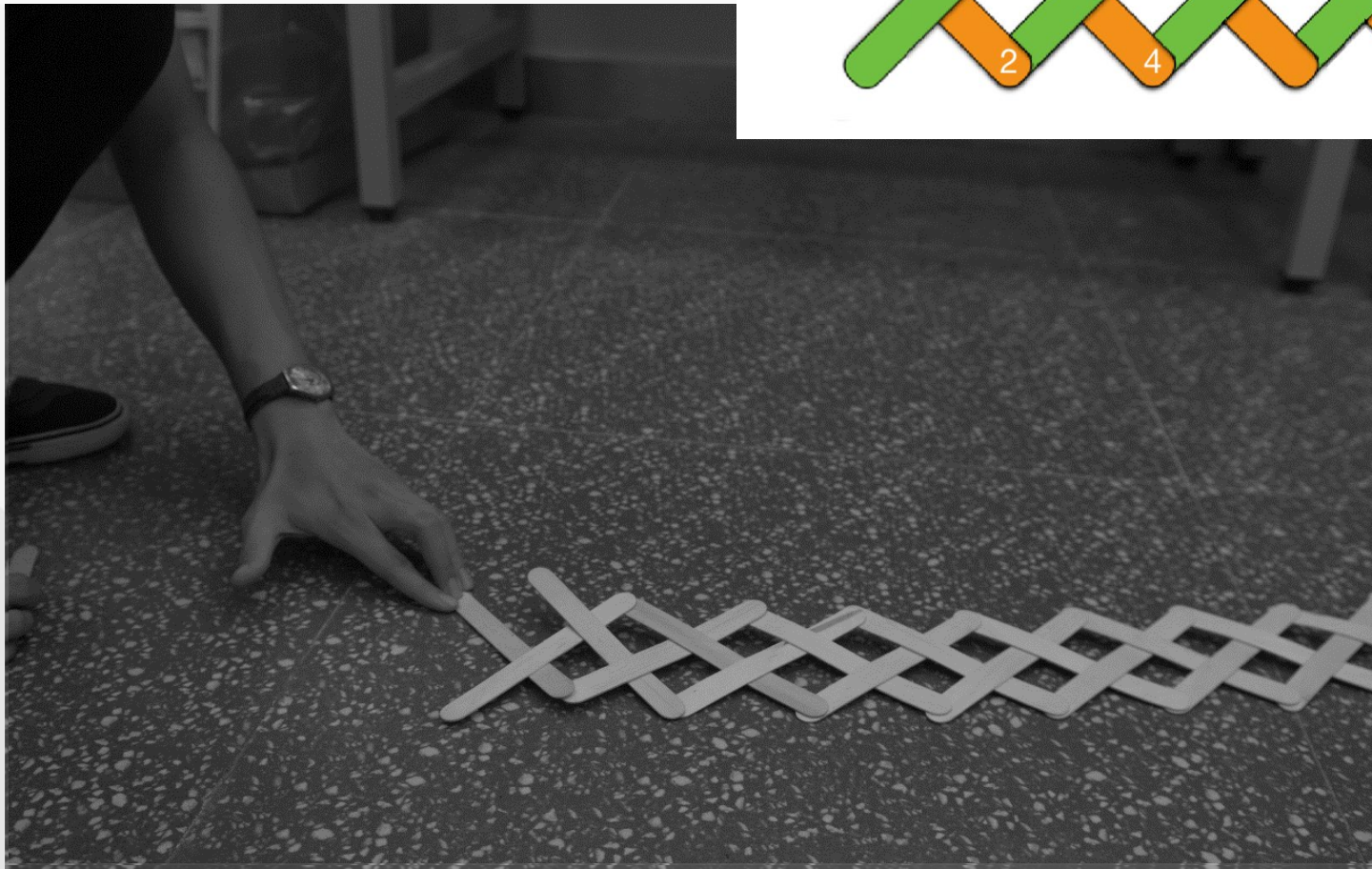
由于编织的不对称性，反向释放相当于将编织平面翻转再正向释放



2.2 探究不对称释放的原因

正向释放：

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



受限于编织结构，
第一根棒释放势能时头部抬起，
带动前方雪糕棒

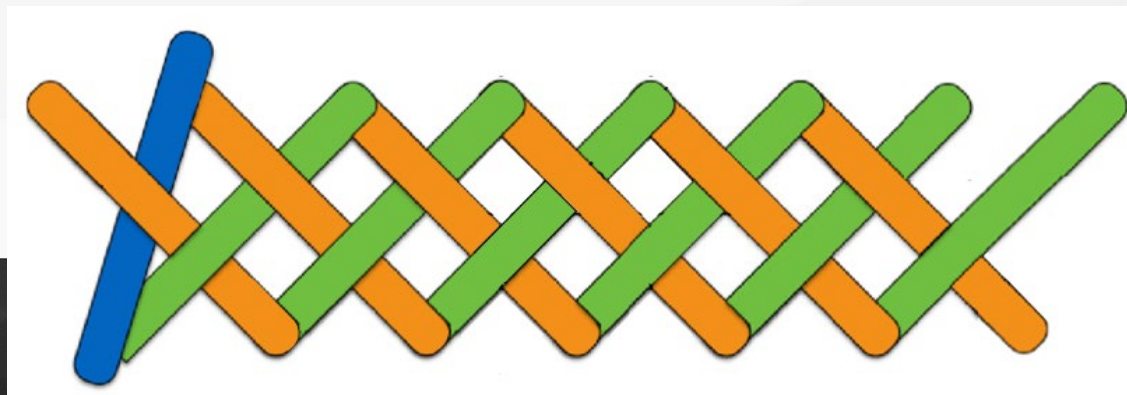
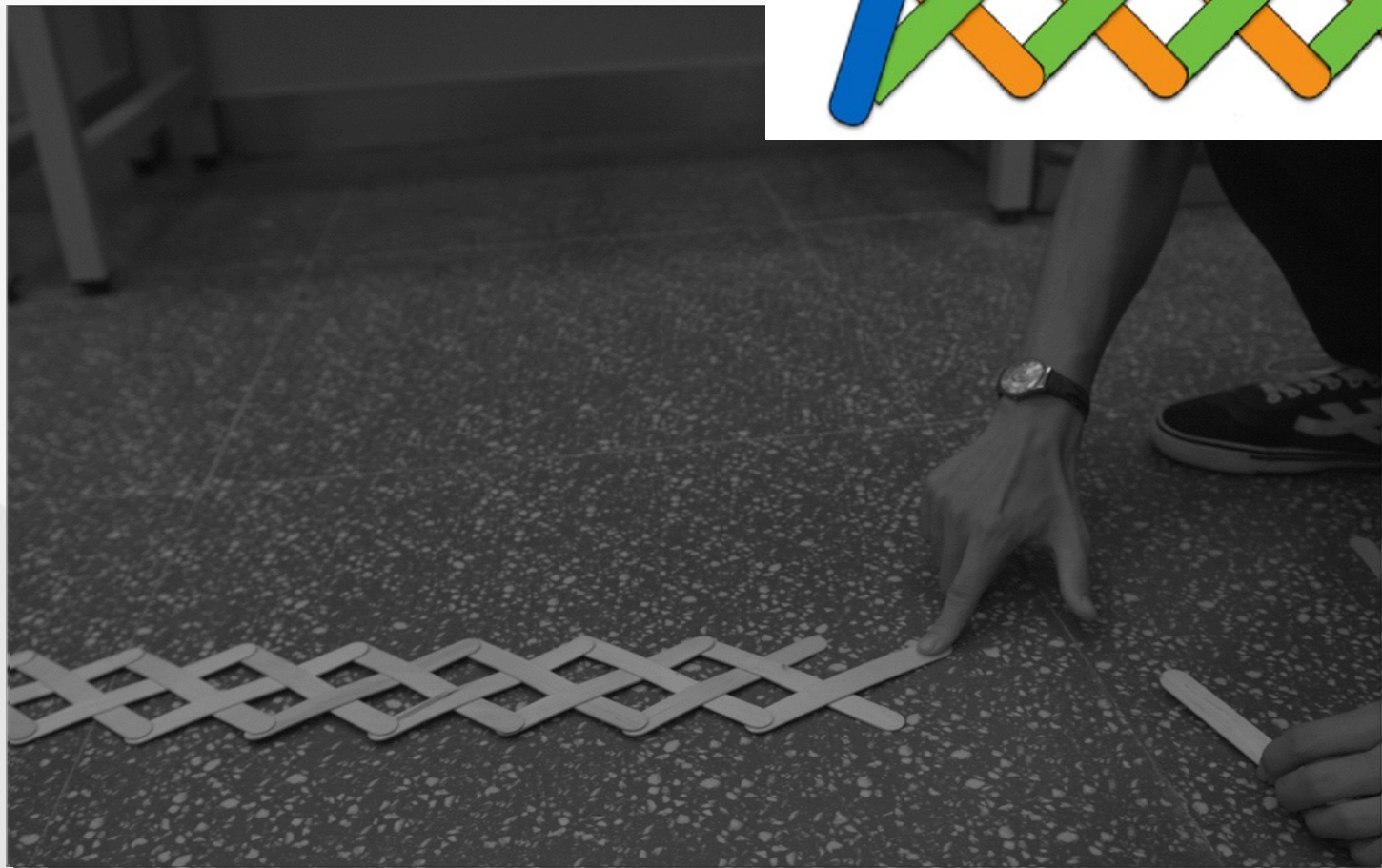
由高速摄像机拍摄，帧率为 1000 fps



2.2 探究不对称释放的原因

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

反向释放：



由于编织结构，
第一根棒尾部抬起，
无法带动前方雪糕棒

由高速摄像机拍摄，帧率为 1000 fps

3

理论推导

3.1 确定参量

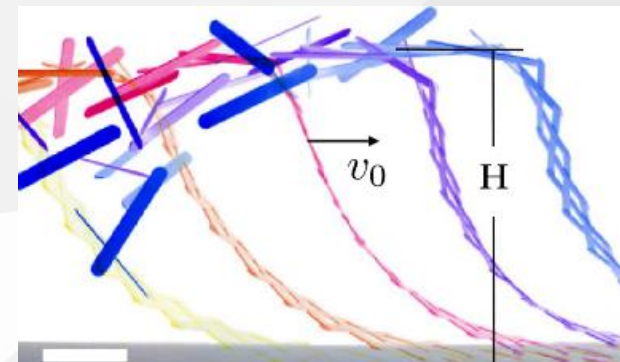
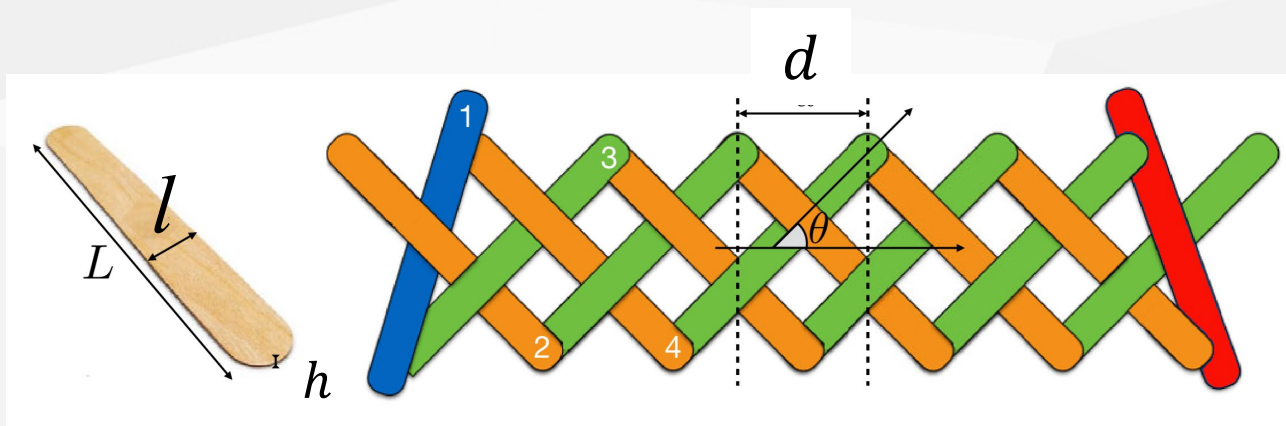
1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结



l 、 L 、 h 、 M ：木条的宽、长、厚、质量

θ 、 d ：链条中，雪糕棒与纵向的夹角、相邻端点之间的距离

v_0 、 H ：眼镜蛇波前传播的速度与高度



3.2 基本假设

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结

1

假设所有雪糕棒性质完全相同，并满足弹性力学的基本假定

2

假设“眼镜蛇编织”中所有接触点只在三等分点与端点处

3

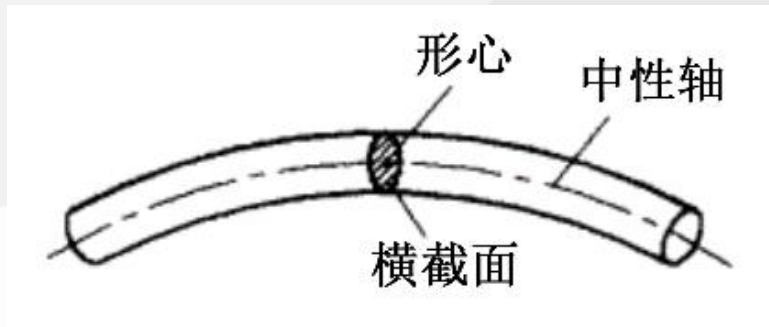
假设雪糕棒没有任何扭转，只有纯弯曲



3.3 物理模型

欧拉-伯努利梁 静力平衡方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = q$$



1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结

z : 中性轴的垂直位移, x : 水平坐标

E : 杨氏模量, q : 单位长度上的载荷

I : 截面惯性矩, 是用于衡量截面抗弯能力的一个几何参数

对于矩形的横截面, 有:

$$I = \frac{lh^3}{12}$$

雪糕棒较为细长
横截面不变
横截面始终与中性轴垂直

Euler-Bernoulli beam theory – Wikipedia

Boucher *et al*, Phys. Rev. Lett. 119, 084301 (2017)



3.3 物理模型：单根雪糕棒中储存的弹性势能

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

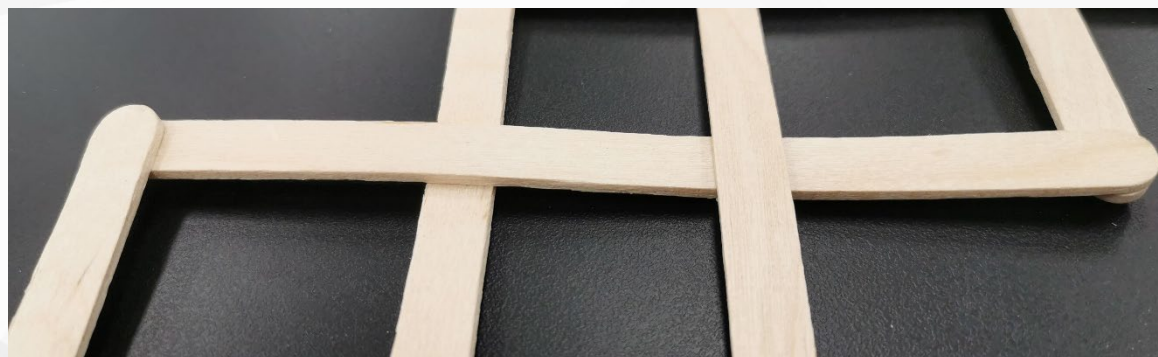
5. 总结



雪糕棒编织链条中单根雪糕棍的弯曲情况

假设单根雪糕棍节点处为**点支撑**

假设节点处的**横向形变量**等于雪糕棍的**厚度 h**





3.3 物理模型：单根雪糕棒中储存的弹性势能

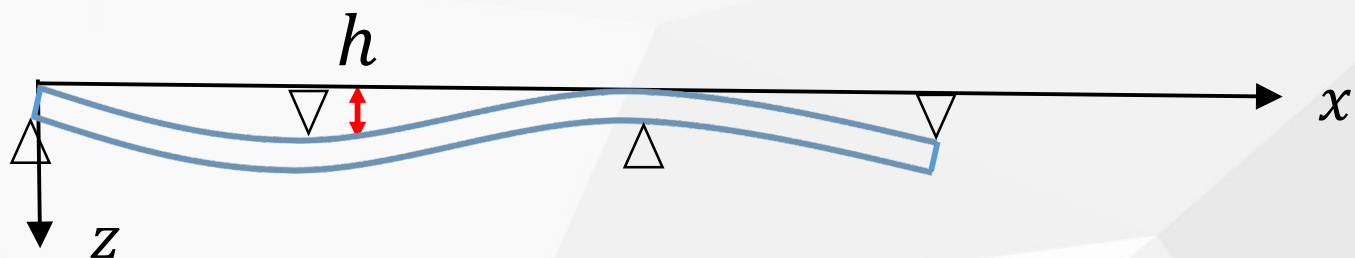
1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结



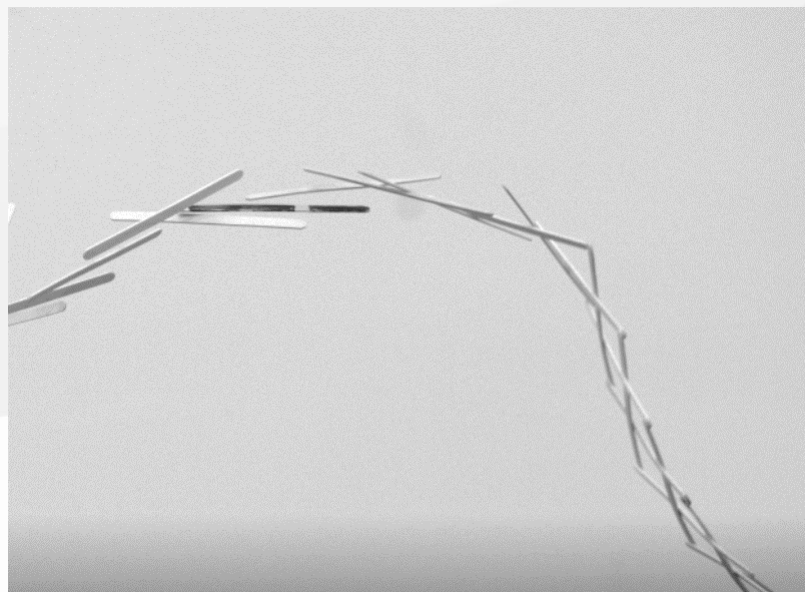
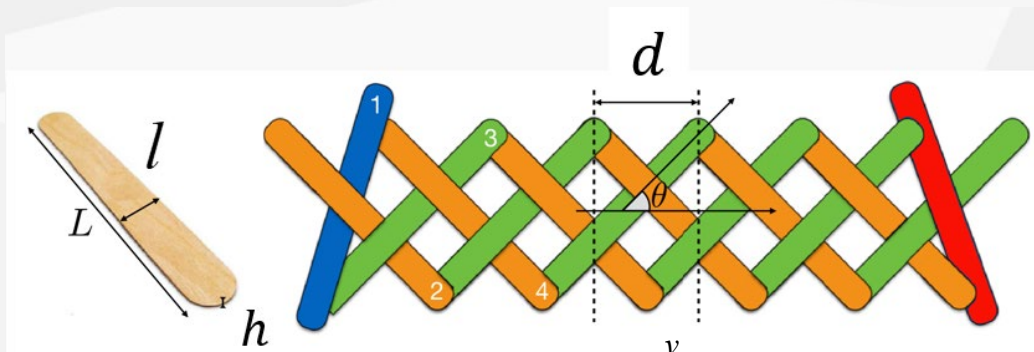
雪糕棒编织链条中单根雪糕棍的弯曲情况

$$U_{el} = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx$$

利用欧拉-伯努利梁方程得到雪糕棒的横向位移 z 与 x 坐标的关系

$$U_{el} = 216 \frac{EI}{L^3} h^2$$

3.3 物理模型：波阵面的速度



1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结

设 v 为单根雪糕棒弹出的速度

E_p 为即将弹出的编织链条中的弹性势能

$$E_p \propto \frac{EI}{L^3} h^2$$

$$Mv^2 \propto \frac{EI}{L^3} h^2$$

$$M = \rho L h l$$

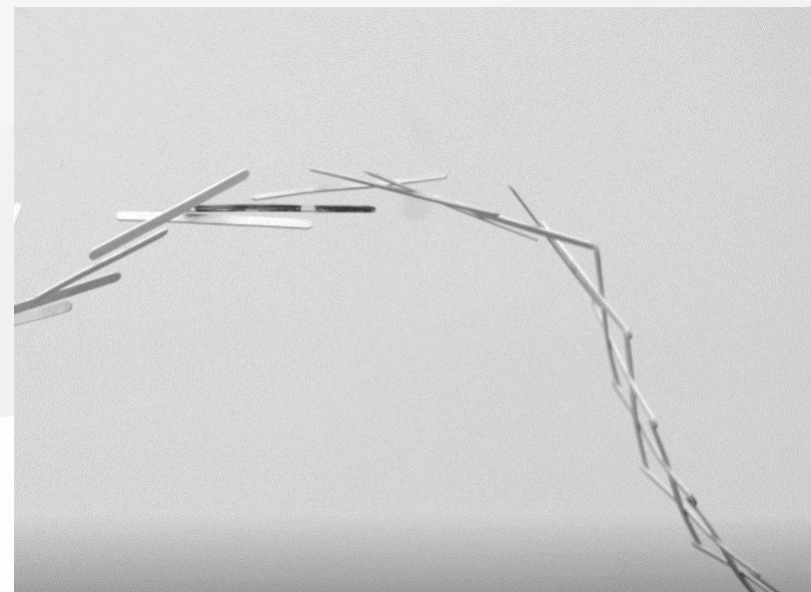
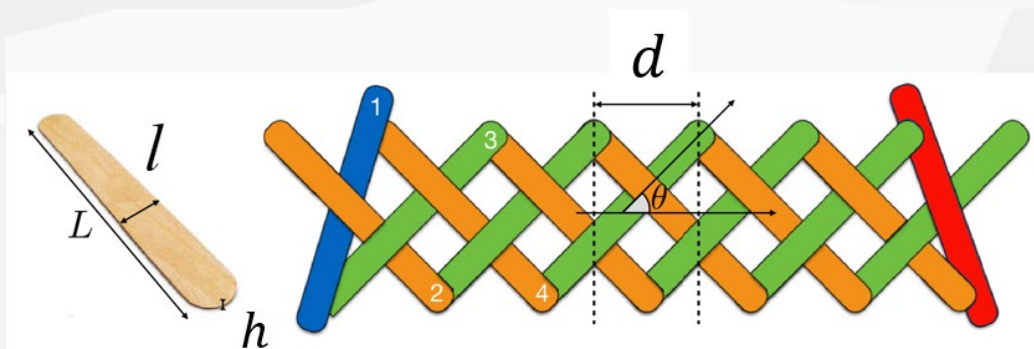
$$I = \frac{lh^3}{12}$$

$$v \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$



3.3 物理模型：波阵面的速度

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



单根雪糕棒弹出所需的时间 $\Delta t \approx \frac{L}{v}$

波阵面随着雪糕棒一根根的弹出而传播

$$\text{波阵面速度 } v_0 = \frac{d}{2\Delta t} \approx \frac{vd}{2L} = \frac{\cos\theta}{3} v$$

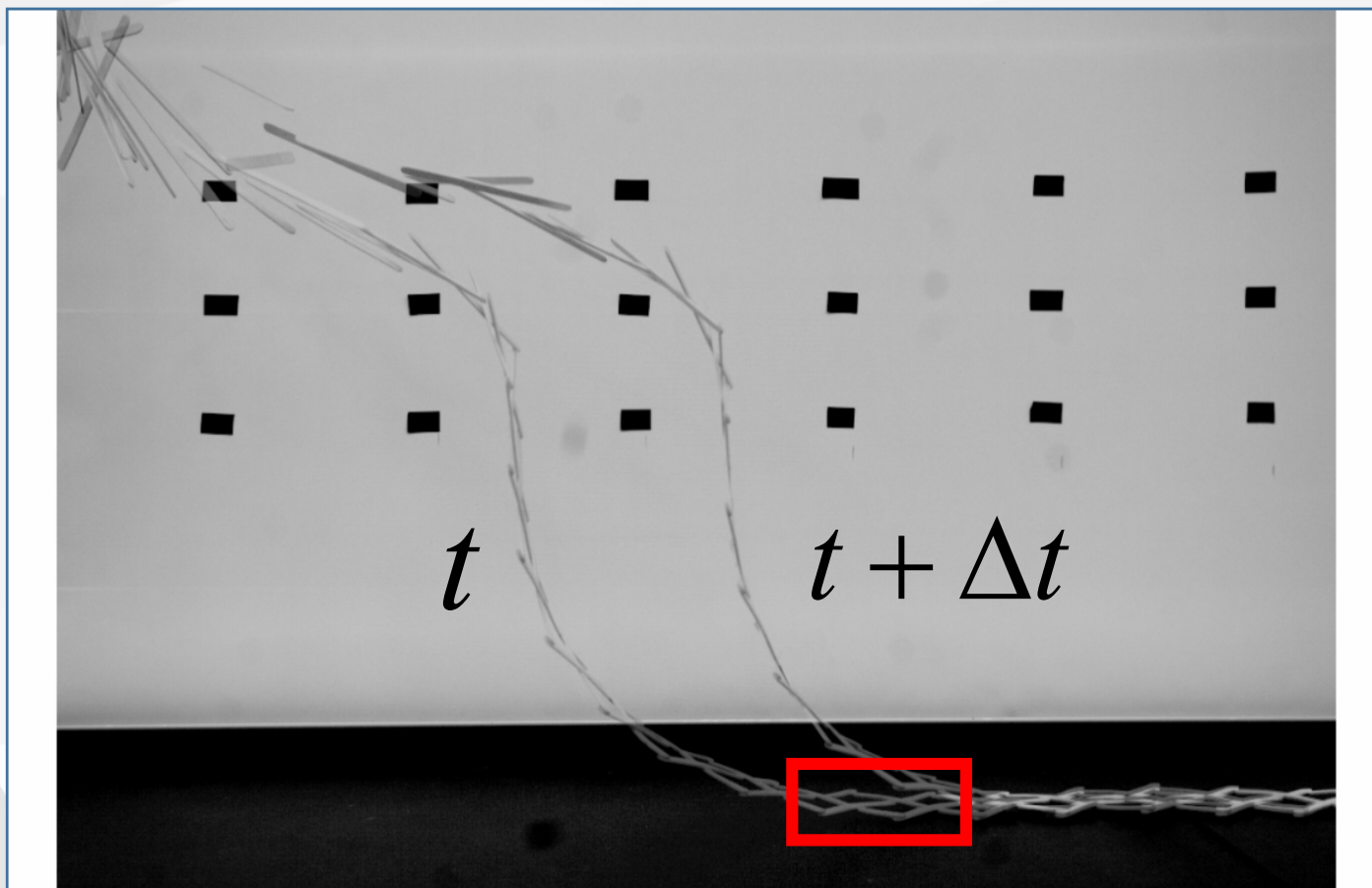
$$v_0 \propto v \cos\theta \propto \cos\theta \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$



3.3 波前传播过程中的能量转化

稳态系统中的**能量输入与输出平衡**

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



同一列雪糕棍编织不同时刻图像的叠加

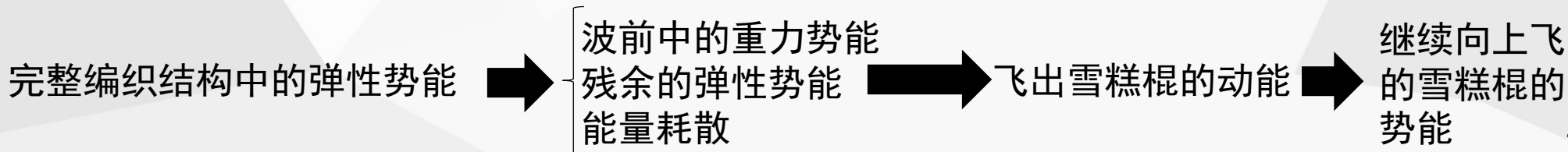
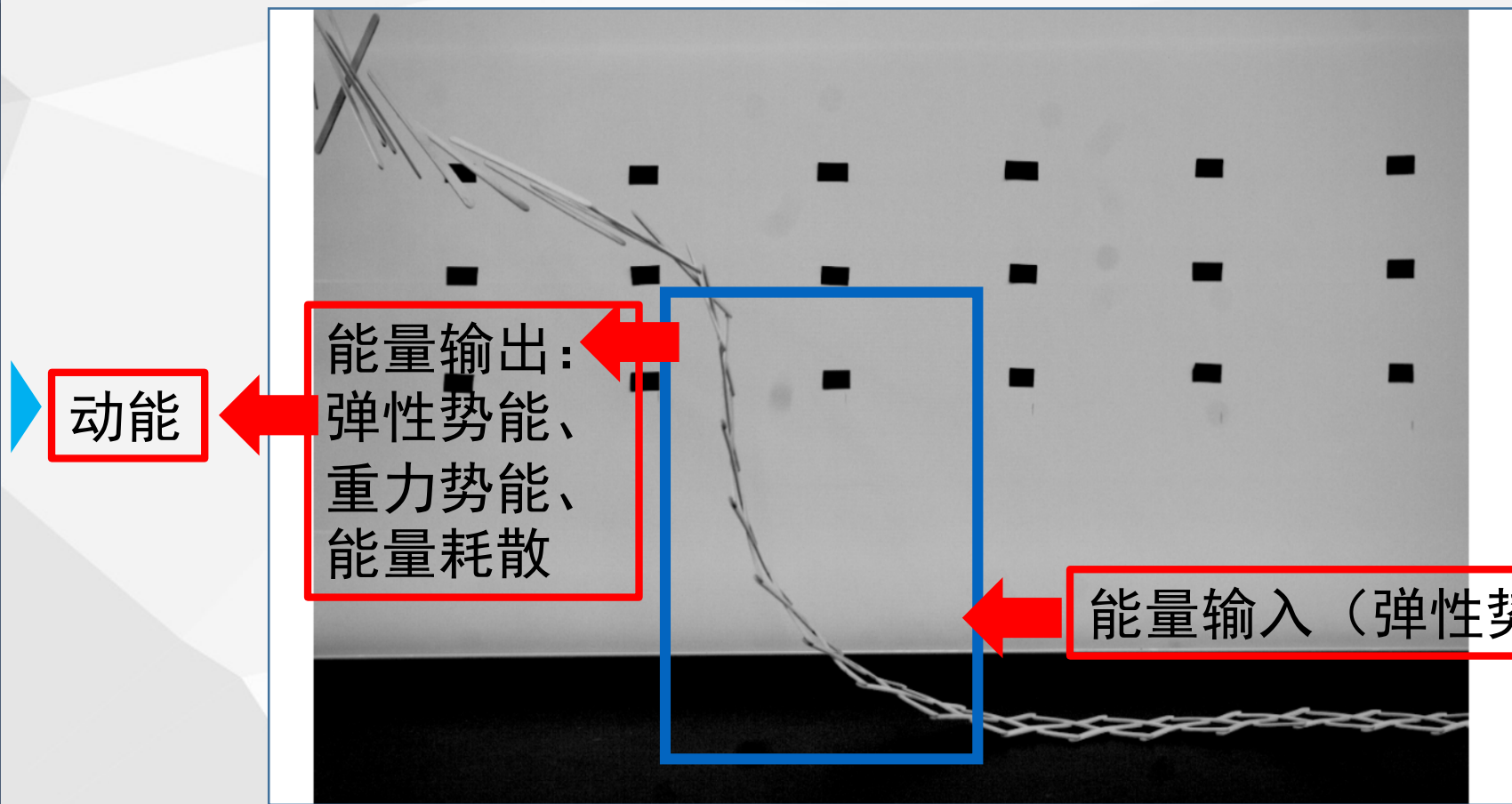
稳定传播时，各个时刻波前的状态相同



3.3 波前传播过程中的能量转化

稳态系统中的能量输入与输出平衡

- 1. 课题描述
- 2. 预实验
- 3. 理论推导
- 4. 实验探究
- 5. 总结



4

实验探究



4.1 实验一：探究眼镜蛇波能升起的主要原因

纵向释放：



由高速摄像机拍摄，帧率为 1000 fps

在没有桌面支持力的情况下，波前也可以形成
质心基本不发生水平位移

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结



4.1 实验一：探究眼镜蛇波能升起的主要原因

桌上释放：



由高速摄像机拍摄，帧率为 1000 fps

结论：桌面限制了编织链条的“向下弯曲”的趋势，给予链条**向上的支持力**，使**整体质心上移**，形成波前

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

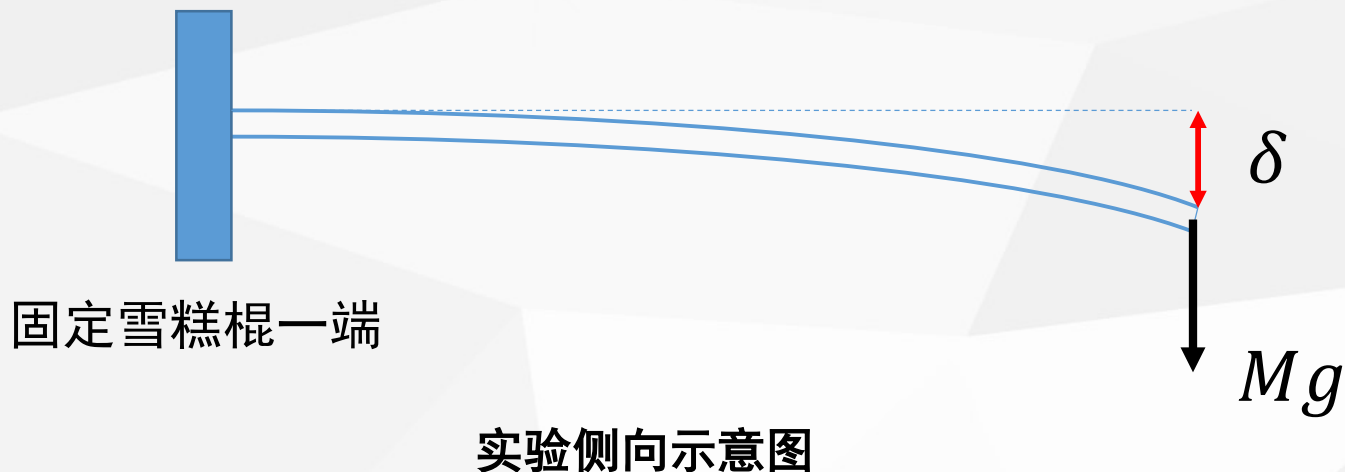
4. 实验探究

5. 总结



4.2 实验二：验证雪糕棍符合欧拉-伯努利梁方程

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



方程成立的前提条件：形变在一定范围内

雪糕棒规格：

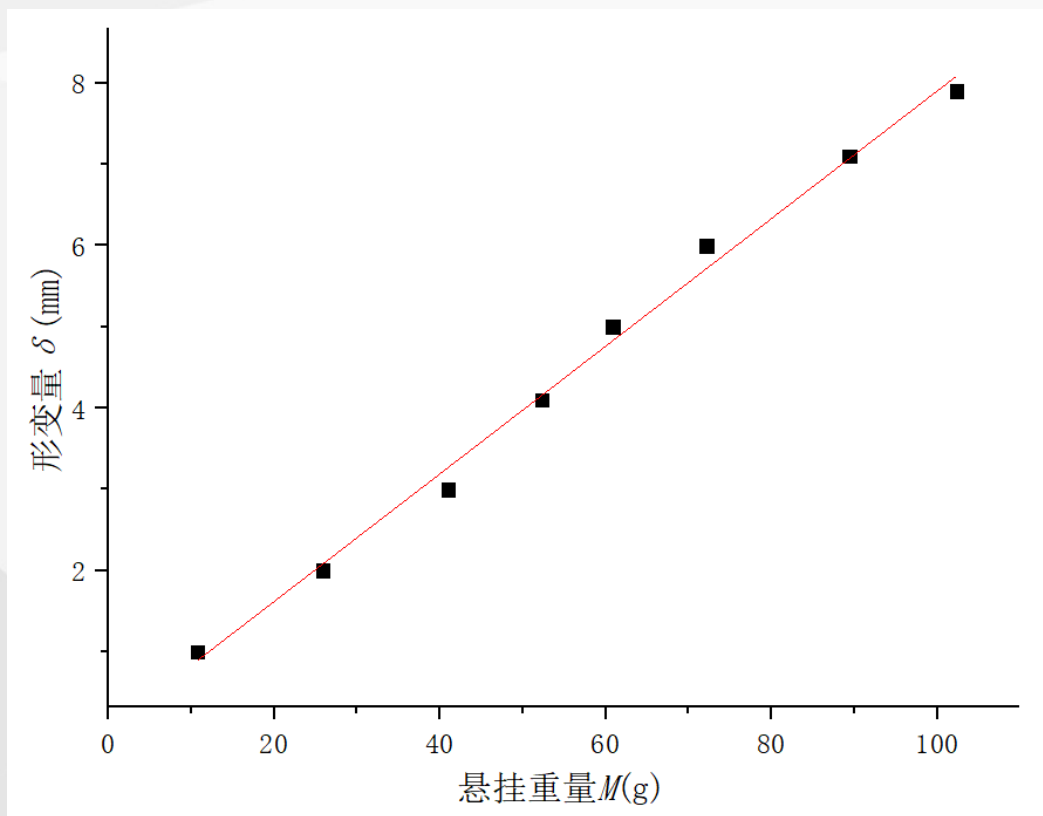
140×9.4×2.0mm；伸出长度104mm





4.2 实验二结果

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



由欧拉-伯努利梁公式推导出的形变 δ 与的悬挂质量 M 关系:

$$\delta = \frac{gL^3}{3EI} M$$

拟合得到的斜率为0.079

$$R^2 = 0.994$$

通过斜率的数值, 可以反推出雪糕棍的杨氏模量

$$E = 13.6 \text{ GPa}$$



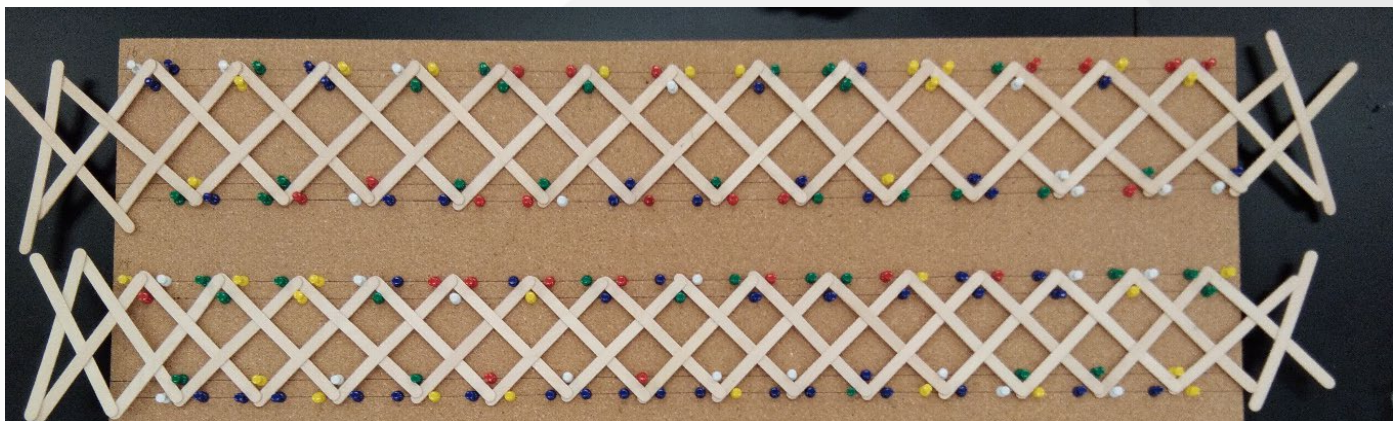
4.3 实验三：验证波前**实际传播速度**与理论的符合效果

实验方法：通过模具，调整**木条的摆放角度**、**木条的长度**以获得不同几何构型的链条，后用录像装置录像。

录像装置：高速摄像机

视频处理：Tracker

数据处理：Origin



1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结



4.5 实验三：验证波前**实际传播速度**与理论的符合效果

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



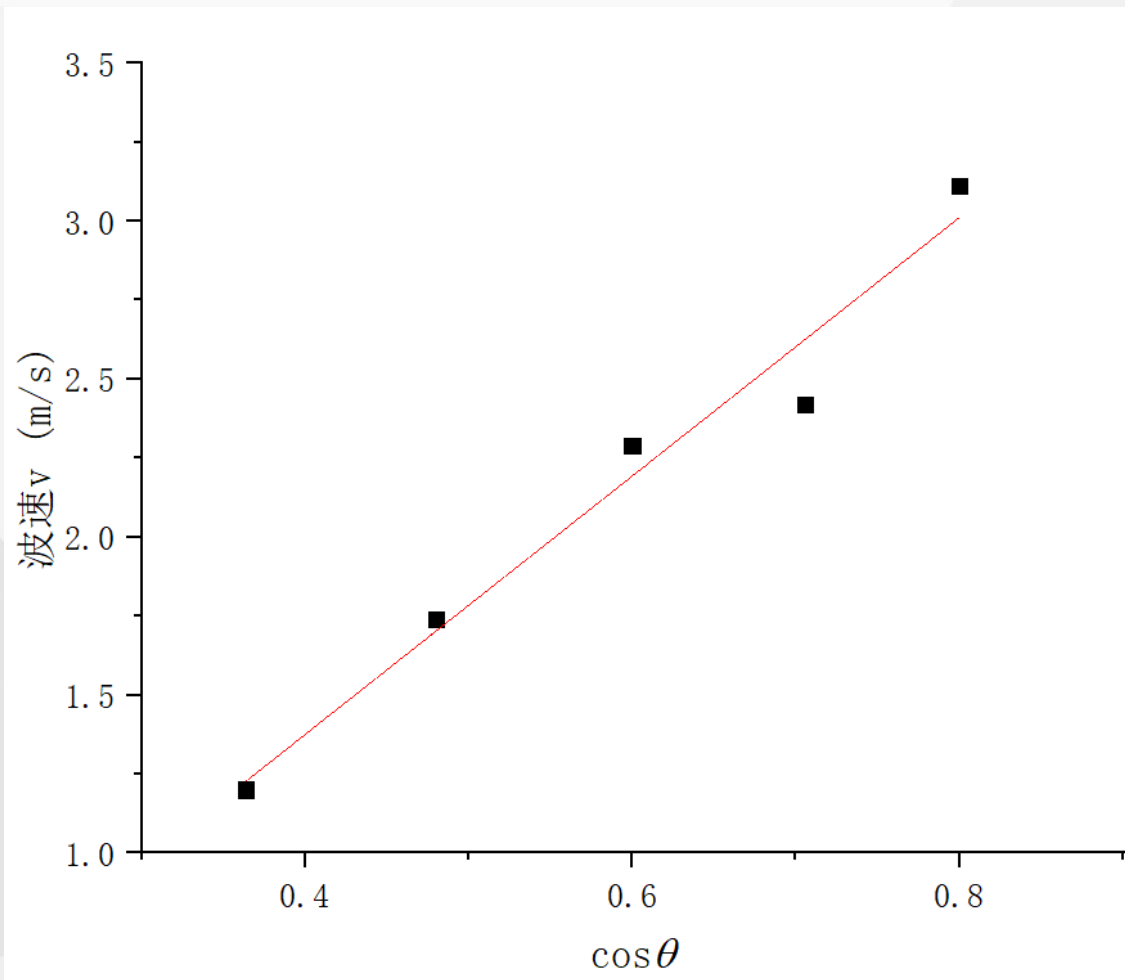


4.3 实验三：改变雪糕棍之间的夹角

波速 v_0 与摆放角度余弦值 $\cos\theta$ 的关系

$$\text{理论: } v_0 \sim \cos\theta \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



控制除 θ 外的参量不变

$$R^2 = 0.969$$

截距为 -0.3 ± 0.3

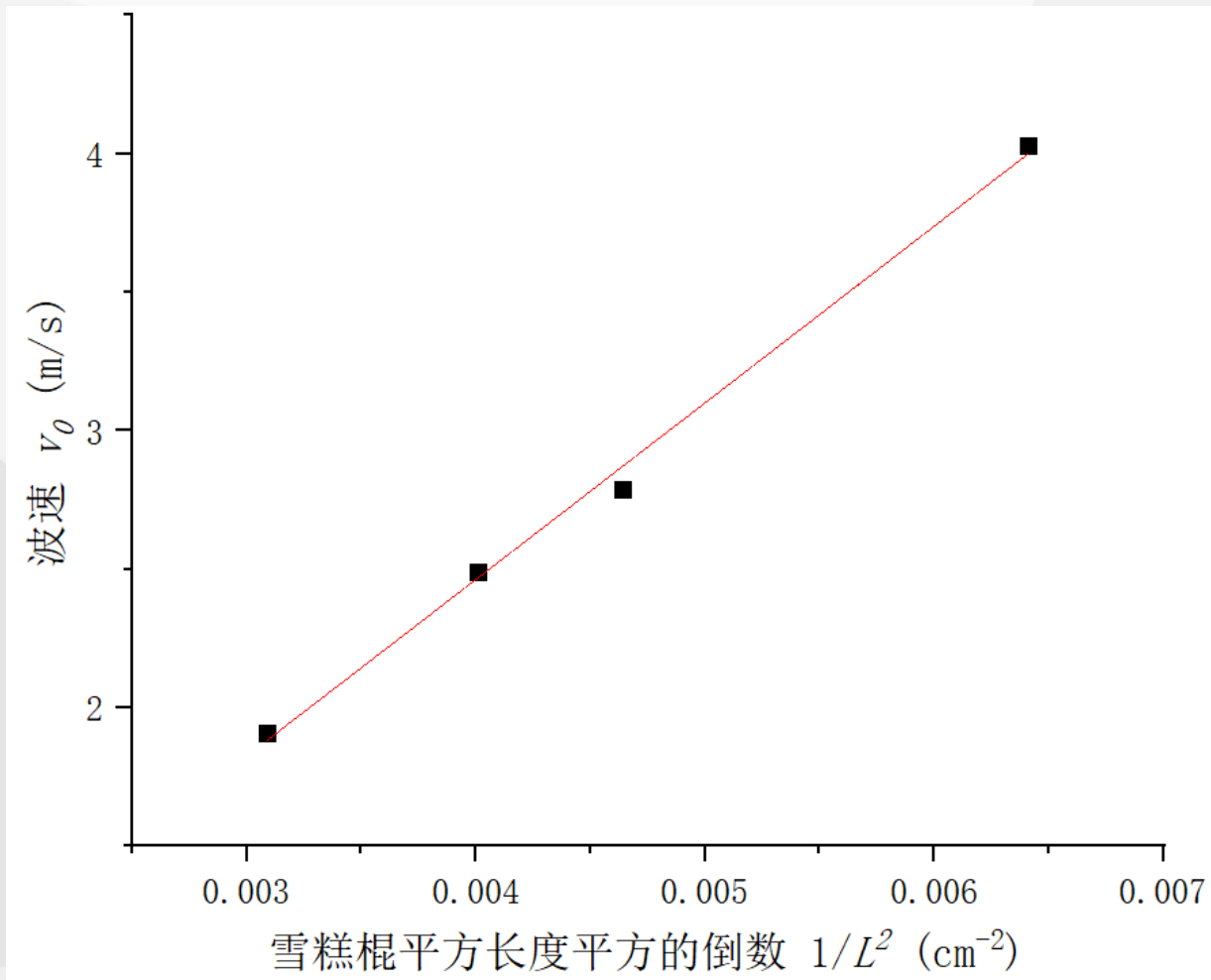
验证了波速与 $\cos\theta$ 的正比关系



4.3 实验三：改变雪糕棍的长度

波速 v_0 与 $(\frac{1}{L})^2$ 的关系

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



$$\text{理论: } v_0 \sim \cos\theta \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

实验控制 $\theta = 45^\circ$

$R^2 = 0.996$

斜率 $6.4 \pm 0.3 \times 10^2$

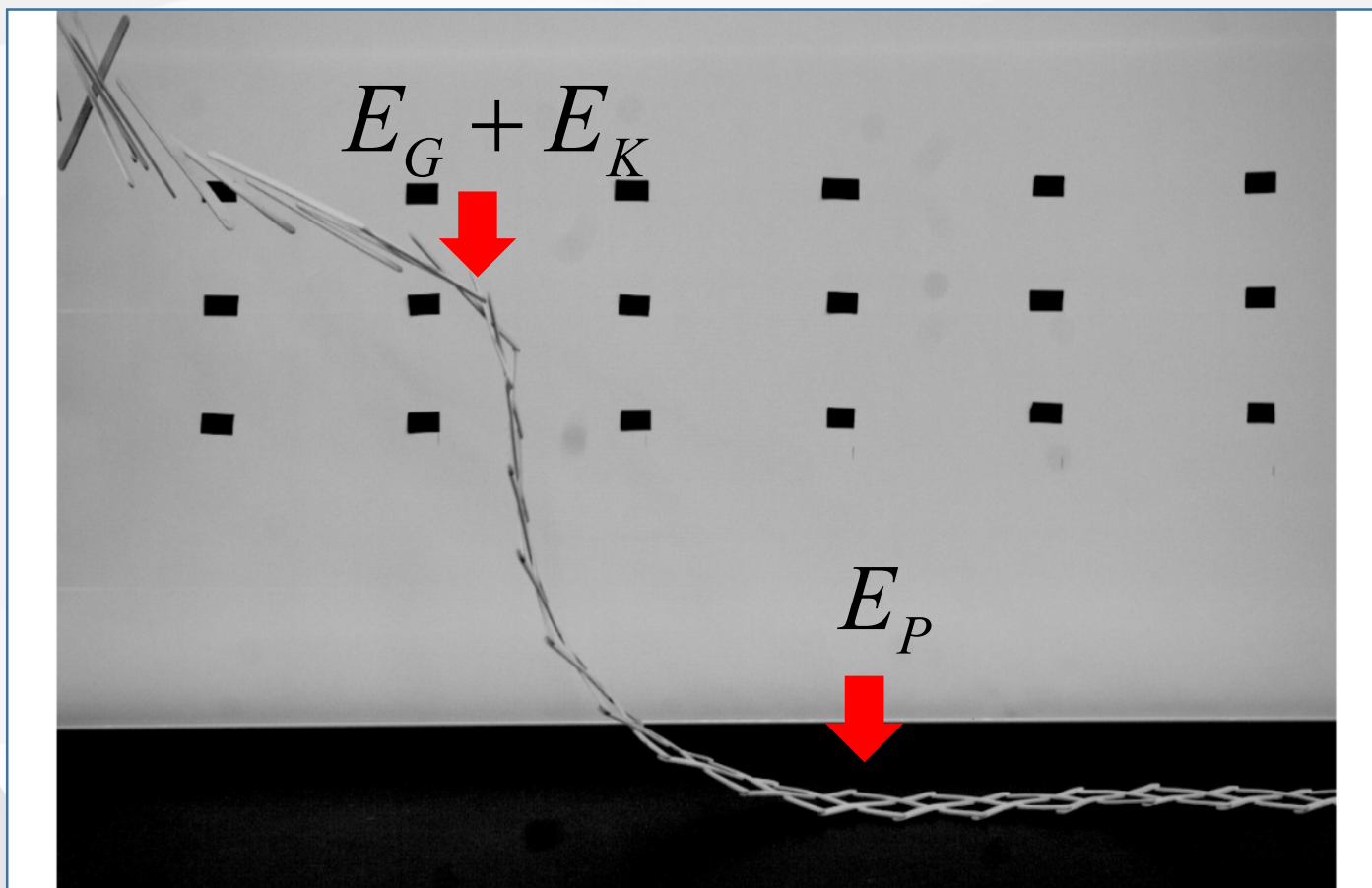
截距 -0.1 ± 0.1

除 L 外，其它量控制不变
验证了 v_0 与 L 的平方反比关系



4.3 实验四：考察波前传播过程中体系的能量转化率

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

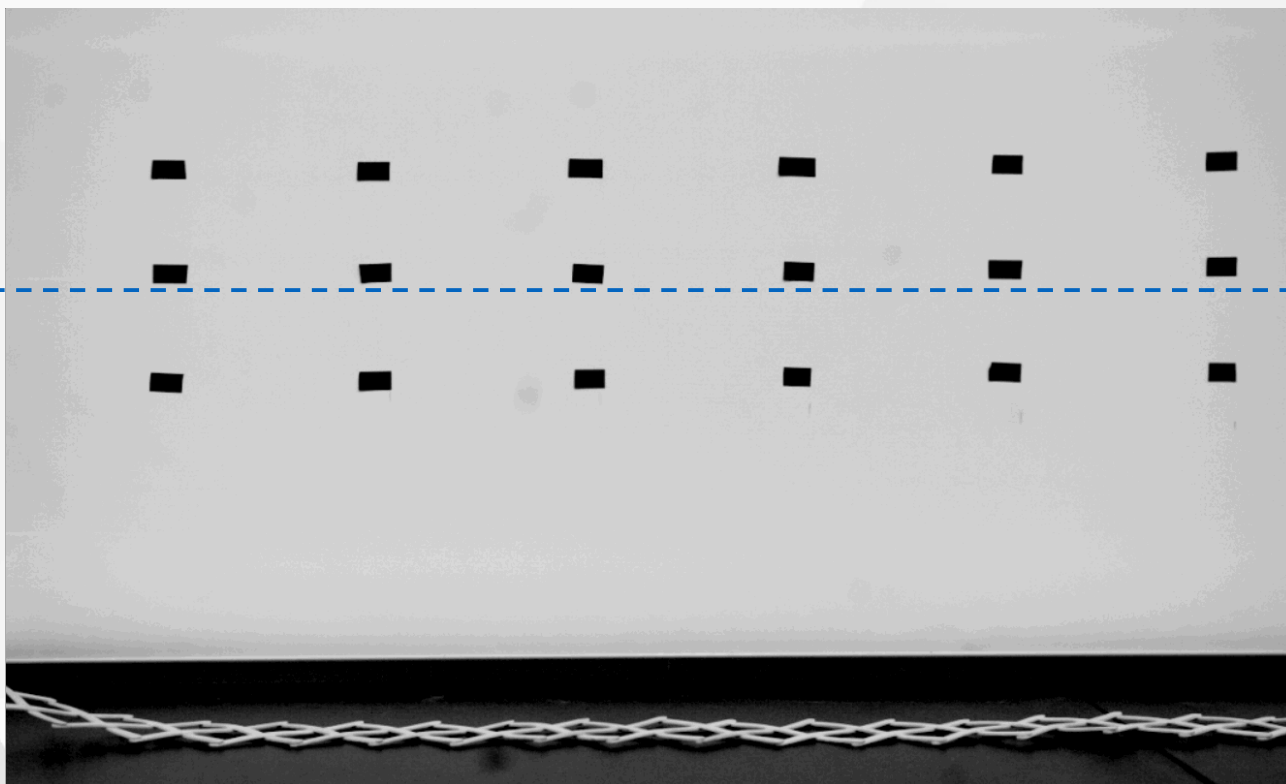


能量转化率：
$$\eta = \frac{E_G + E_K}{E_P} = \frac{MgH + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}{U_{el}}$$



4.3 实验四：考察波前传播过程中的能量转化率

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



$$H = 0.38\text{m}$$

$$M = 1.7\text{g}$$

$$v \approx 2.3\text{m/s}$$

侧向拍摄 (2000fps)

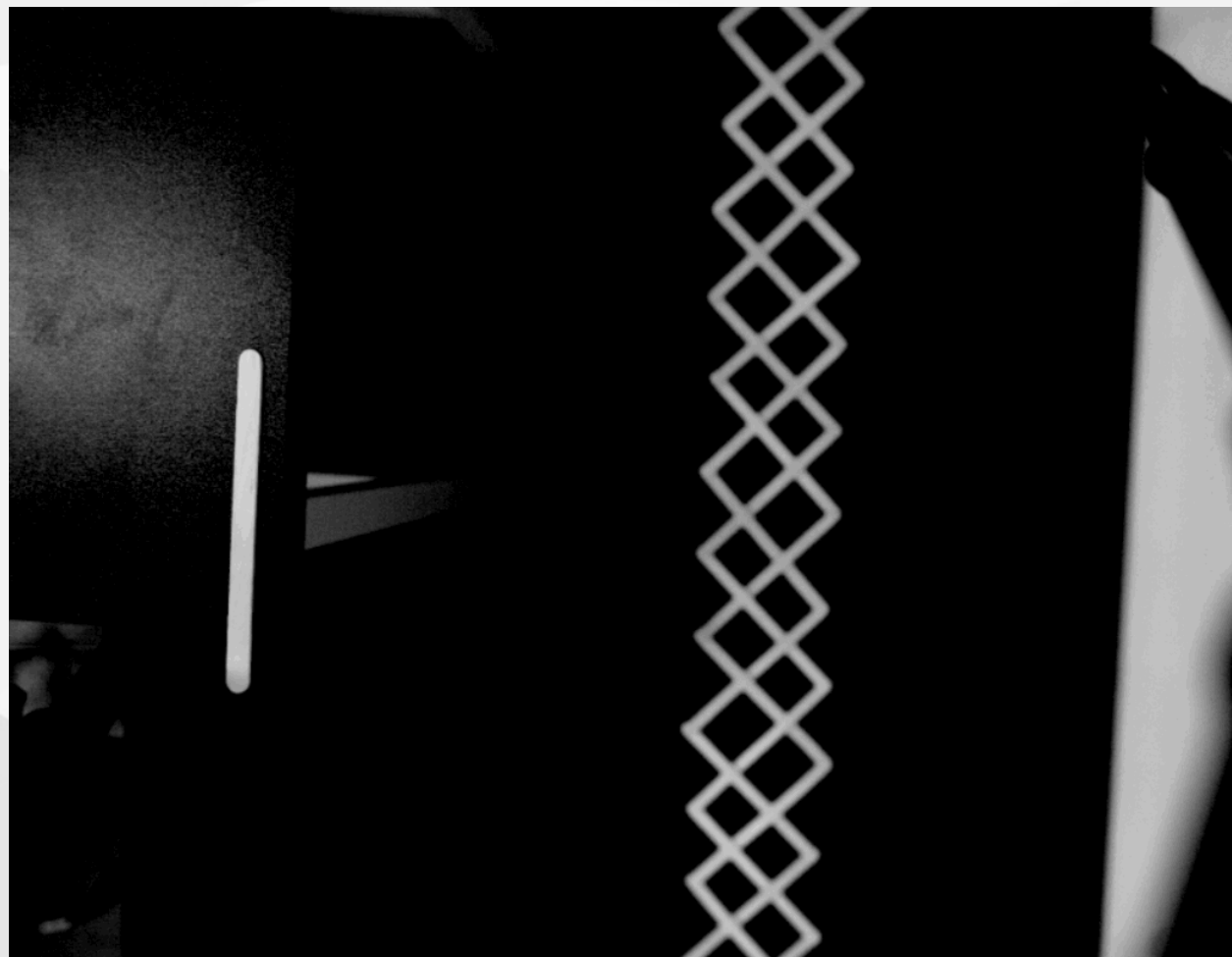
$$MgH = 0.0063\text{J}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = 0.0045\text{J}$$



4.3 实验四：考察波前传播过程中的能量转化率

- 1. 课题描述
- 2. 预实验
- 3. 理论推导
- 4. 实验探究
- 5. 总结



竖直向下拍摄（2000fps）

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

$$M = 1.7g$$

$$L = 140mm$$

$$\omega \approx 22rad/s$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = 0.00067J$$



4.3 实验四：考察波前传播过程中的能量转化率

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

$$MgH = 0.0063J$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = 0.0045J$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = 0.00067J$$

$$U_{el} = 0.027J$$

$$M = 1.7g$$

$$E = 13.6GPa$$

$$L = 140mm$$

$$l = 9.4mm$$

$$h = 2.0mm$$

$$\eta = \frac{E_G + E_K}{E_P} = \frac{MgH + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}{U_{el}} = 43\%$$



4.3 实验四：考察波前传播过程中的能量转化率

与单根棒中的能量转化率进行比较：



$$E_G + E_K = 0.024J$$

$$E_P = 0.038J$$

$$\eta' = \frac{E_G + E_K}{E_P} = 63\%$$

$$> \eta = 43\%$$

多根雪糕棍的编织结构
能量耗散**大于**单根雪糕
棍中的能量耗散

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结



4.3 误差分析

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

- 忽略了扭转
- 雪糕棒的质量不确定度: $1.7 \pm 0.2\text{g}$
- 雪糕棒在实验过程中可能产生了永久性形变



条宽度

5

总结



5 总结

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

1. 发现并解释了眼镜蛇编织链条释放的**不对称性**，利用纵向释放的实验说明了**桌面支持力**对于眼镜蛇波形成的重要作用
2. 验证了实验过程中欧拉-伯努利梁方程的适用性
3. 从**能量转化**的角度建立了波前的**波速**相关的理论模型，并对模型进行了实验验证
4. 探究了波前传递过程中的**能量转化率**，与单根雪糕棒的能量转化情况进行了对比



参考文献

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

- 徐芝纶 《弹性力学简明教程》
- Euler–Bernoulli beam theory – Wikipedia
- Boucher *et al*, Phys. Rev. Lett. 119, 084301 (2017)
- J. Sautel *et al*, Am. J. Phys. 85, 10, 783-790 (2017)
- L. D. Landau *et al*, *Theory of Elasticity*

感谢聆听



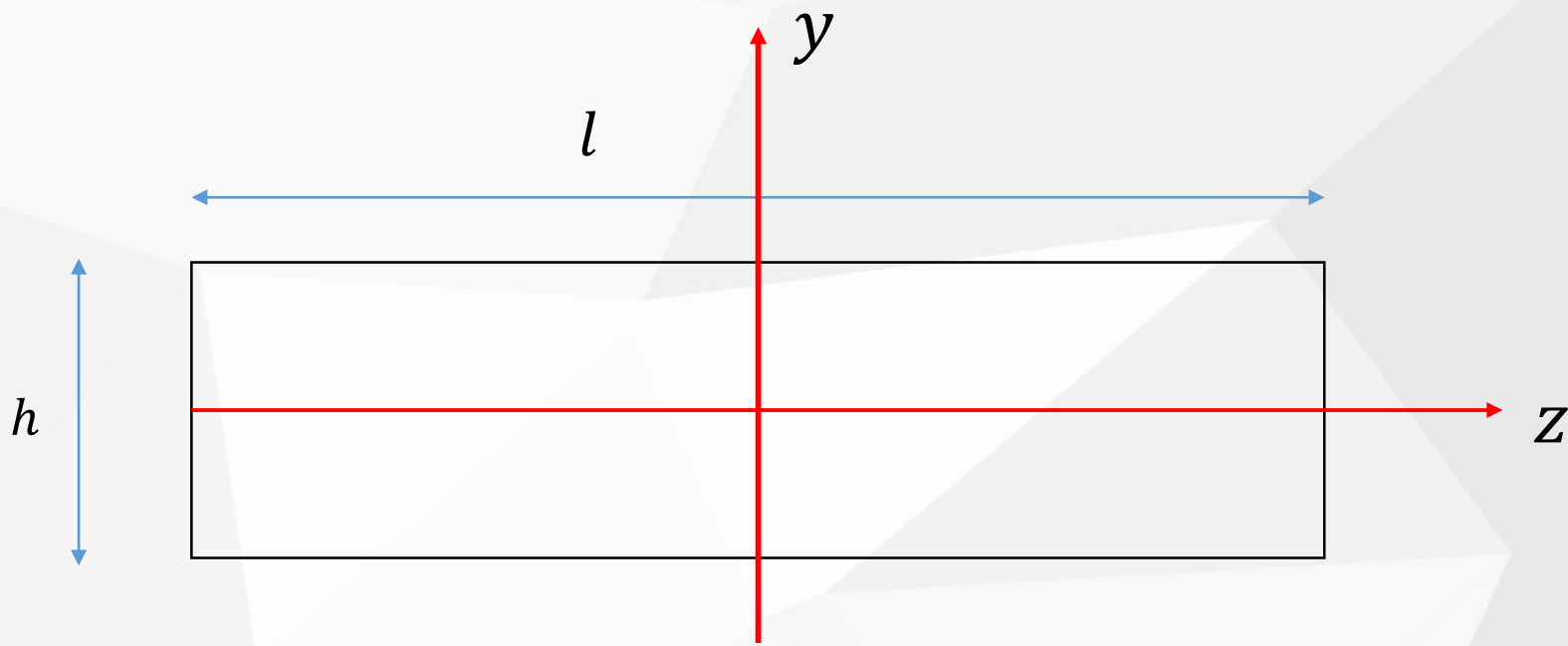
复旦大学

喻知博 孙雯思 方胤豪 吴晋渊 舒畅



附录

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

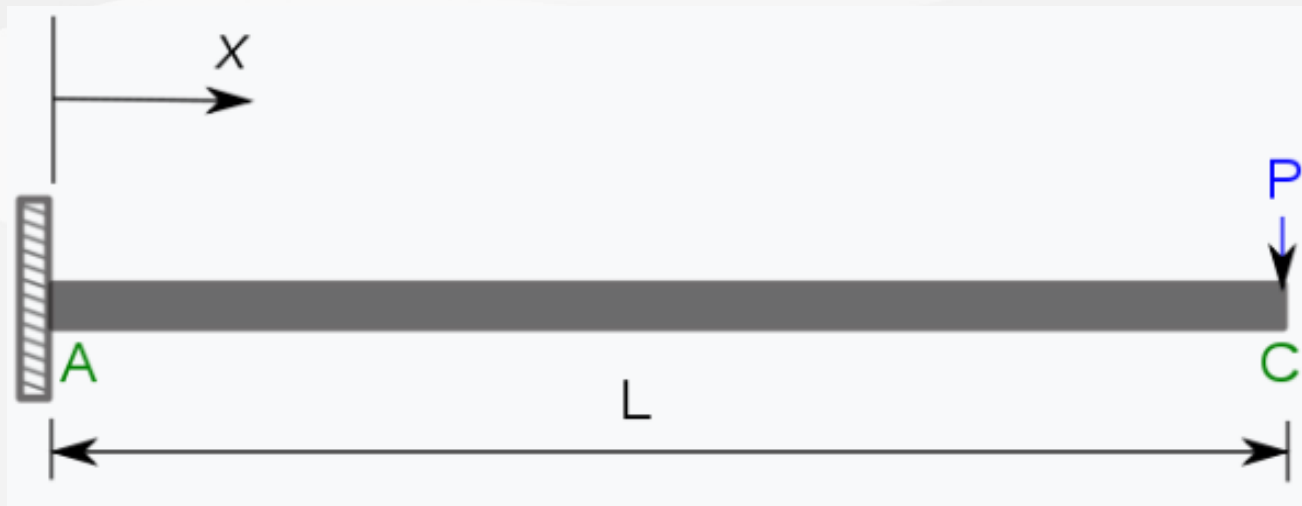


$$I_z = \iint y^2 dydz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ly^2 dy = \frac{lh^3}{12}$$



附录

根据欧拉-伯努利梁方程推导得到的形变量与悬挂质量关系



$$EI \frac{d^4 z}{dx^4} = 0$$

$$z|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad -EI \frac{d^3 z}{dx^3} = F$$

得 $z = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3) \quad z|_{x=L} = \frac{FL^3}{3EI}$

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

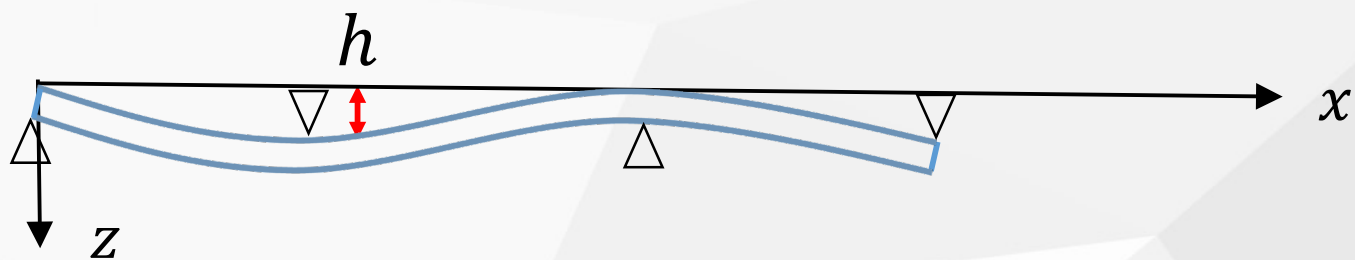
4. 实验探究

5. 总结



附录

根据欧拉-伯努利梁方程推导弹性势能的表达式



1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

4. 实验探究

5. 总结

$$z_1^{(4)}(x) = z_2^{(4)}(x) = z_3^{(4)}(x) = 0$$

$$z_1(0) = z_2\left(\frac{2}{3}L\right) = z_3\left(\frac{2}{3}L\right) = 0 \quad z_1\left(\frac{L}{3}\right) = z_2\left(\frac{L}{3}\right) = z_3(L) = h$$

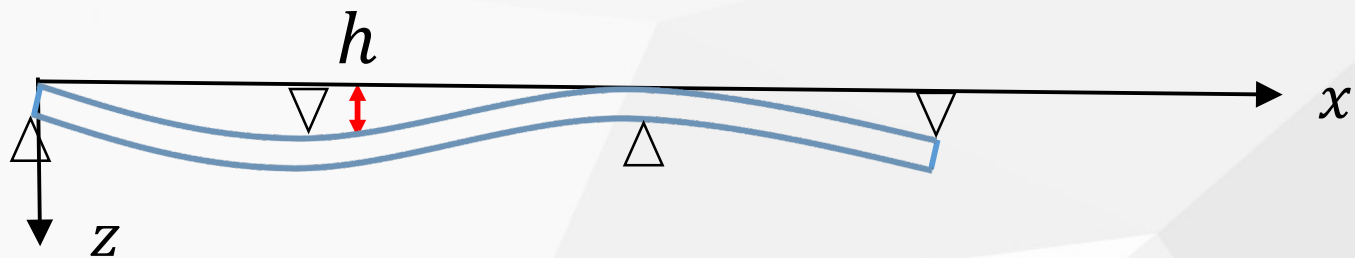
$$z_1^{(1)}\left(\frac{L}{3}\right) = z_2^{(1)}\left(\frac{L}{3}\right) \quad z_2^{(1)}\left(\frac{2L}{3}\right) = z_3^{(1)}\left(\frac{2L}{3}\right) \quad z_1^{(2)}(0) = z_3^{(2)}(L) = 0$$

$$z_1^{(2)}\left(\frac{L}{3}\right) = z_2^{(2)}\left(\frac{L}{3}\right) \quad z_2^{(2)}\left(\frac{2L}{3}\right) = z_3^{(2)}\left(\frac{2L}{3}\right)$$



附录

根据欧拉-伯努利梁方程推导弹性势能的表达式



$$z_1(x) = \frac{(36x^3 - 10L^2x + L^3)d}{2L^3}$$

$$z_2(x) = \frac{(72x^3 - 108Lx^2 + 46L^2x + 5L^3)d}{2L^3}$$

$$z_3(x) = \frac{(-36x^3 + 108Lx^2 - 98L^2x + 27L^3)d}{2L^3}$$

1. 课题描述

2. 预实验

3. 理论推导

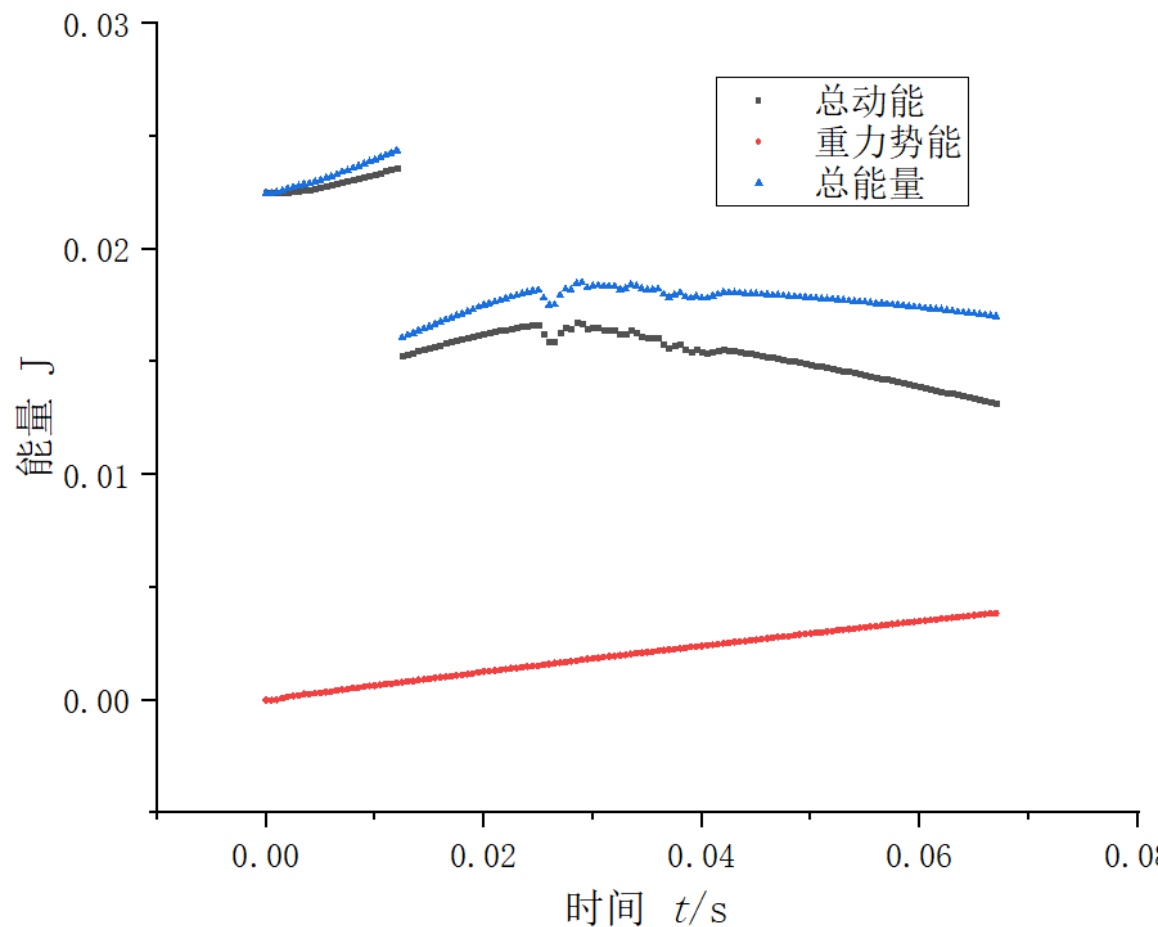
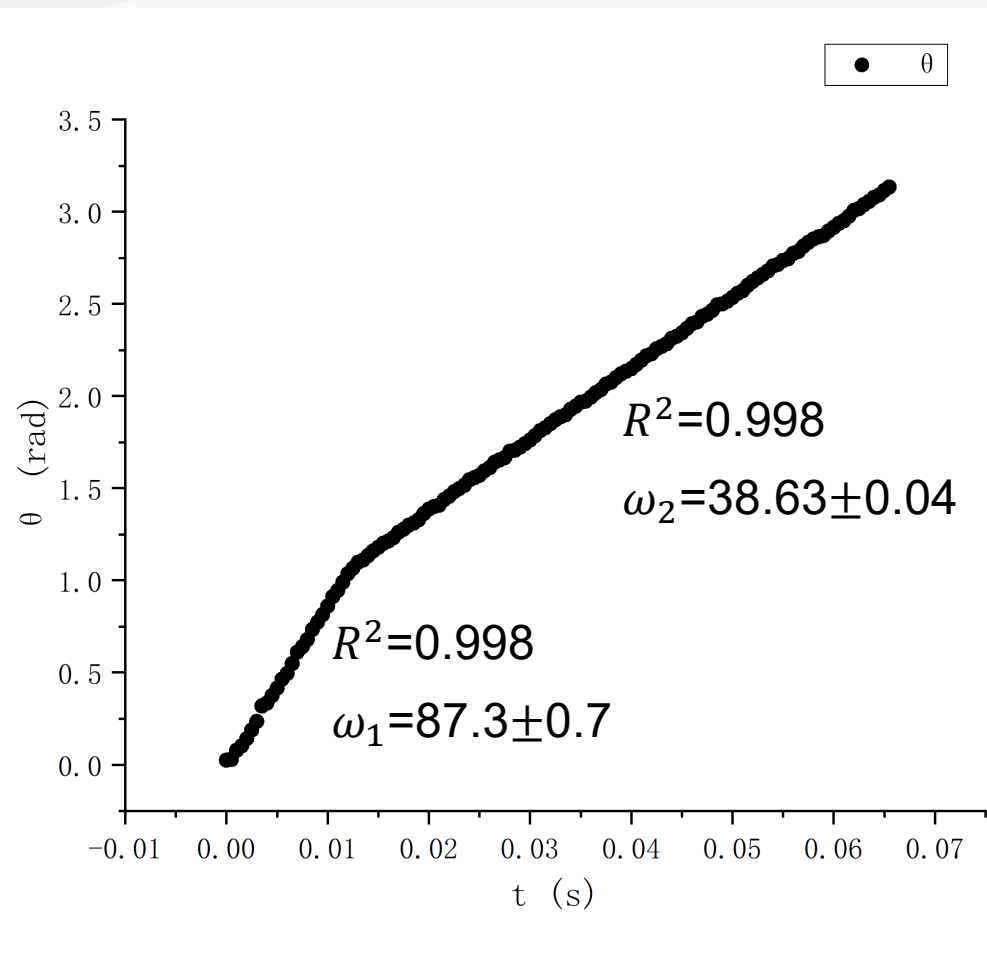
4. 实验探究

5. 总结



附录 单根雪糕棍中的能量转化

- 1. 课题描述
- 2. 预实验
- 3. 理论推导
- 4. 实验探究
- 5. 总结

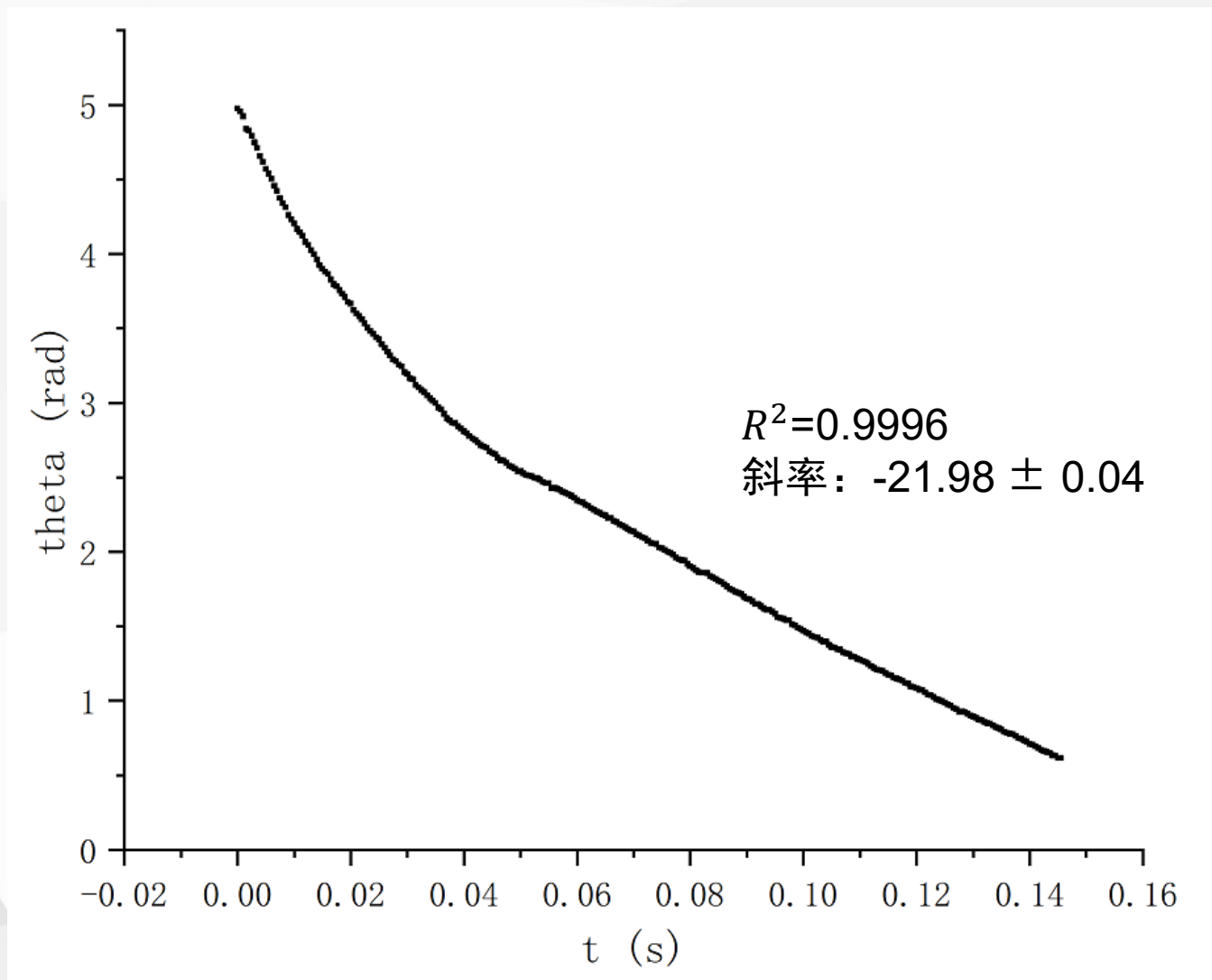


雪糕棍的转动角度-时间图像



附录 眼镜蛇编织中雪糕棍弹出时的情况

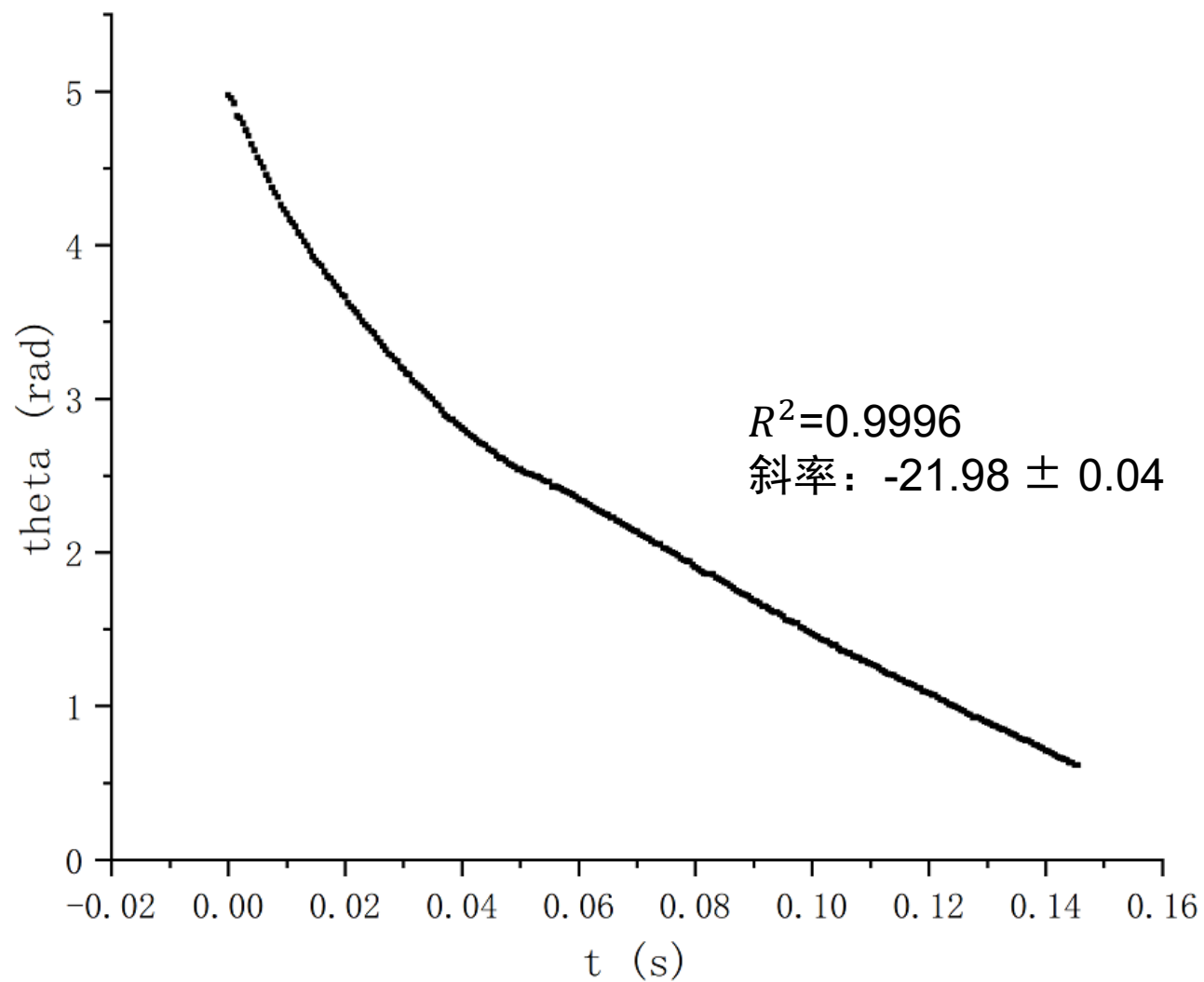
1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结





附录 眼镜蛇编织中雪糕棍弹出时的情况

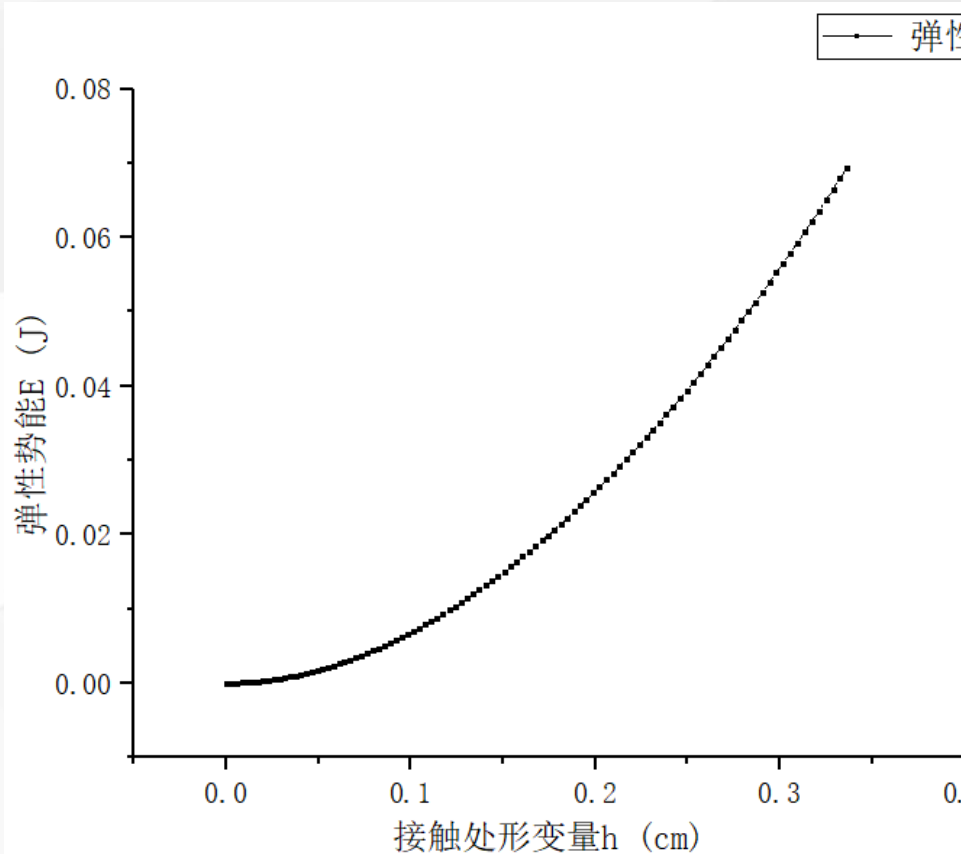
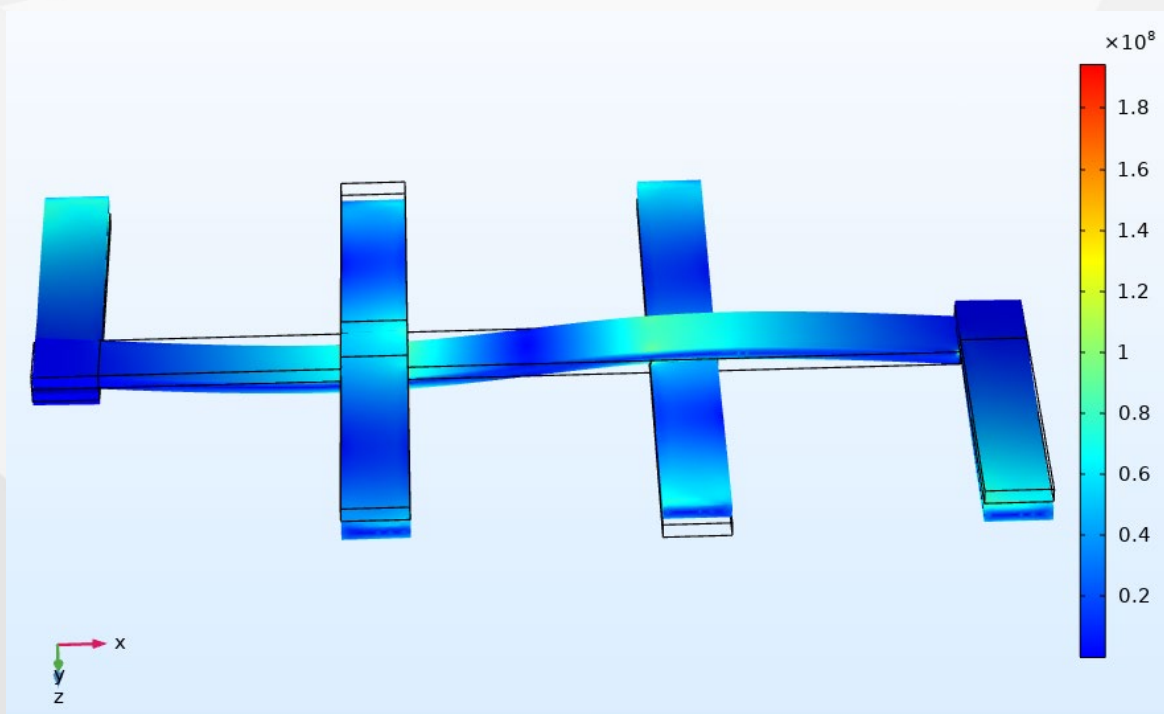
1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结





附录 单根雪糕棍实际弯曲情况Comsol模拟

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



模拟情况：

$h = 0.2\text{cm}$ 时，弹性势能 $E = 0.026\text{J}$

单点支撑理想模型：

$h = 0.2\text{cm}$ 时，弹性势能 $E = 0.027\text{J}$



附录：探究波高与木条摆放角度(木条端点距离)的关系

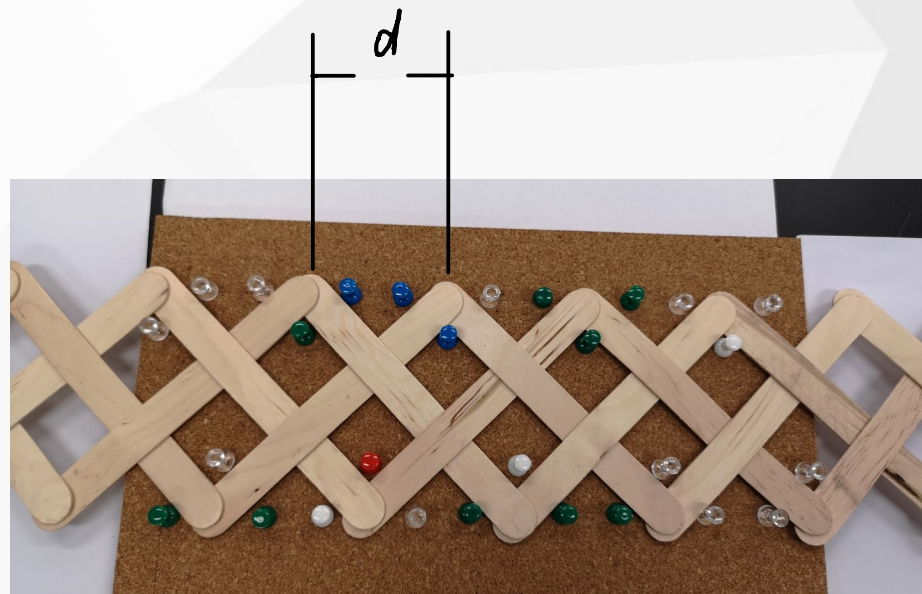
1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

实验方法：通过模具，**控制木条的摆放角度**（调整相邻平行木条端点距离 d ），并通过改变模具而获得不同摆放角度的链条。

录像装置：高速摄像机

视频处理：Tracker

数据处理：Origin



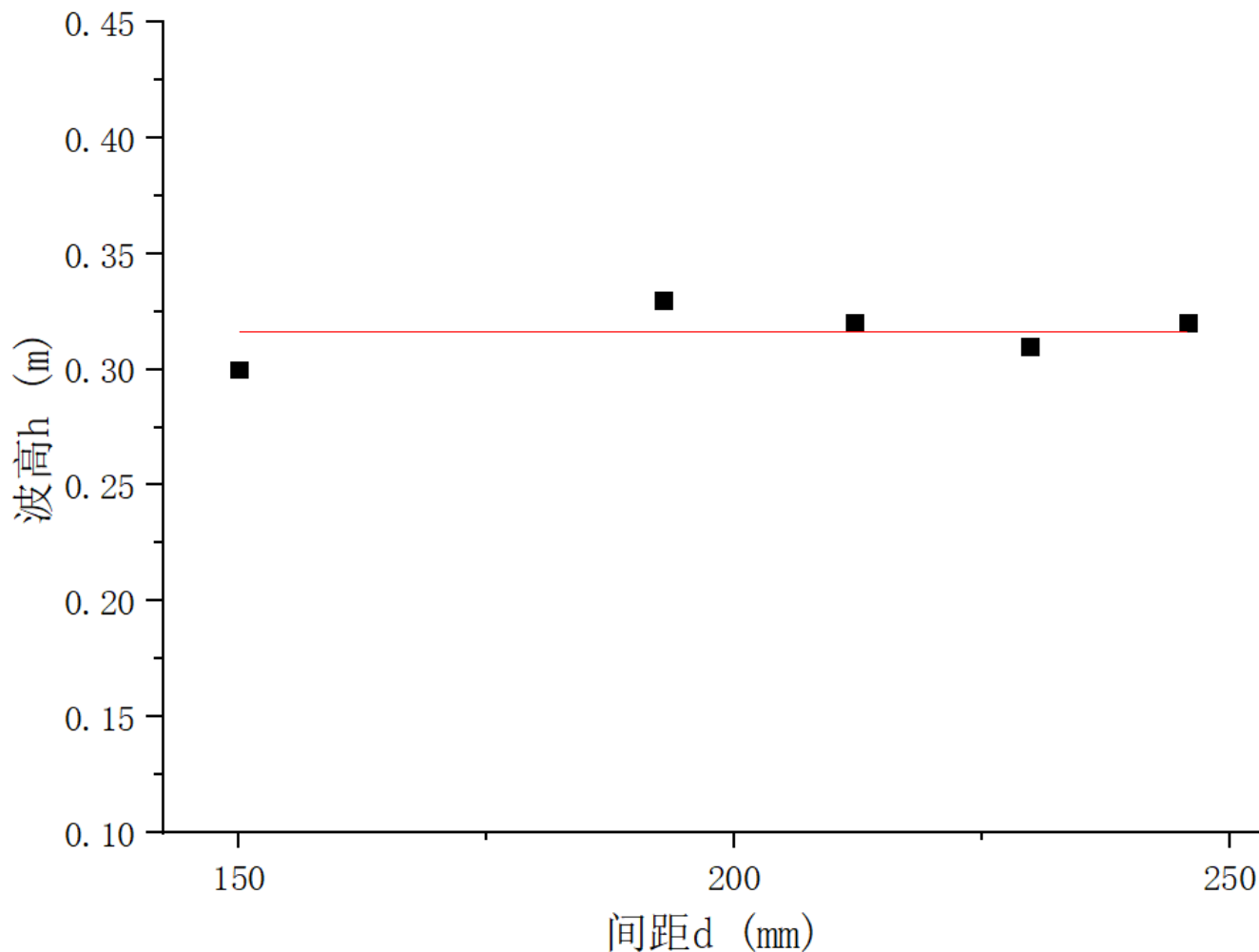


4.3 实验三：改变雪糕棍之间的夹角

理论：弹性势能大小决定波高

改变角度不会较大改变形变情况

波高H与不同间距d的关系



残差平方和为 5.25×10^{-4}
在雪糕棍长度相同时，
斜率不显著异于0，说明波高
角度的变化可以用相邻
雪糕棍端点之间的距离
表征
(或者按摆放雪糕棒
的角度) 无明显关系

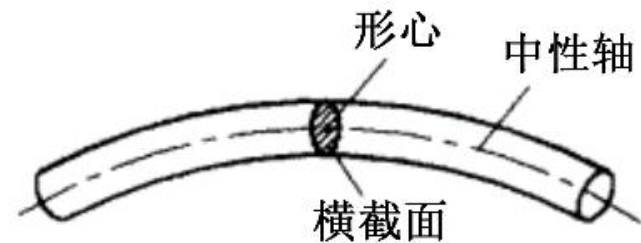
1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结



3.3 物理模型

欧拉-伯努利梁 静力平衡方程及振动方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = q \quad EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{m}{L} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$



1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

z : 中性轴的垂直位移, x : 水平坐标

E : 杨氏模量, q : 单位长度上的载荷

I : 截面惯性矩, 是用于衡量截面抗弯能力的一个几何参数

对于矩形的横截面, 有:

$$I = \frac{lh^3}{12}$$

雪糕棒较为细长
横截面不变
横截面始终与中性轴垂直

Euler-Bernoulli beam theory – Wikipedia

Boucher *et al*, Phys. Rev. Lett. 119, 084301 (2017)



3.3 物理模型

本征模角频率：

$$\omega_n = \alpha_n \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

α_n 是一个几何前因子

特征角频率：

$$\omega^* \equiv \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

特征周期：

$$T^* = \sqrt{\frac{L^4}{h^2 E} \left(\frac{m}{lhL} \right)} = \frac{L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{L^2}{hc_0}$$

特征速度：

$$v^* = \frac{L}{T^*} = \frac{hc_0}{L}$$

c_0 是该材质中的声速

1. 课题描述
2. 预实验
3. 理论推导
4. 实验探究
5. 总结

课题
17

Popsicle Chain Reaction

正方总结



复旦大学队

