

2014 年美国大学生数学建模大赛参赛后记

李楠¹ 钟鸣远¹ 吕浩² 俞熹¹

(1.复旦大学物理学系; 2.复旦大学化学系; 上海 200433)

摘要: 以本文作者参与的 2014 年美国大学生数学建模竞赛(MCM / ICM) 为例, 介绍该竞赛的由来以及对于物理学系学生的参与意义, 详细阐述和讨论了 2014 年交叉学科建模竞赛(ICM)的题目及解题思路, 展现了物理视角在数学建模中的优势.

关键词: 数学建模; 物理; MCM; ICM

中图分类号: ; **文献标识码:** A; **文章编号:** 140316

美国大学生数学建模竞赛暨交叉学科建模竞赛(MCM/ICM), 是一项国际级的竞赛项目, 其着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性.竞赛以三人(本科生)为一组, 在四天时间内, 就指定的某些现实问题完成从建立模型、求解、验证到论文撰写的全部工作.2014 年有 6755 支队伍参加数学建模竞赛(MCM), 遍及五大洲; 1028 组参加交叉学科建模竞赛(ICM)的团队, 主要来自美国和中国(含香港特别行政区)[1].

本文作者团队参与了 2014 年度竞赛, 颇受锻炼.本文的目的在于以我们的参赛实践为例, 介绍该项赛事, 阐发数学建模与物理学之间的内在联系, 鼓励更多的物理系同学发挥自己的物理思维优势, 在竞赛和现实生活中尝试建立模型, 评价和改善身边事物.

1. 数学建模中的物理思维

对现实生活中的事物建立数学模型并加以解释和应用, 这正是物理学家从事的工作.数学建模是物理思维的体现, 而物理的目的也正是通过模型去感知和了解这个世界.在伽利略开创的现代科学范式中, 一项科学研究大致经历如下几个阶段:

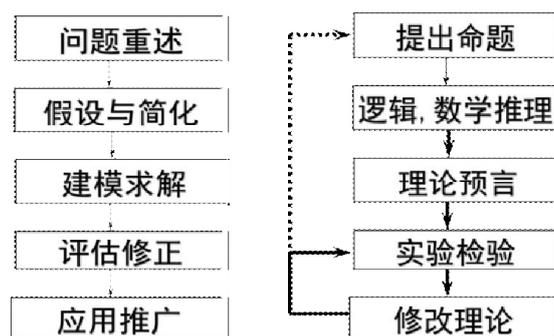


图 1 建模竞赛大纲要求与伽利略科学范式

在数学模型的建立中, 也同样经历了重述问题、模型求解、推广演绎、参数检验与修正

收稿日期: 2014-06-05; 修回日期: 2014-09-03

基金项目: 国家基础科学人才培养基金(J0730310) 资助

作者简介: 李楠 (1993-) 男, 山东临清人, 复旦大学物理学系 2012 级本科生.

钟鸣远 (1992-) 男, 上海人, 复旦大学物理学系 2011 级本科生

吕浩 (1993-) 男, 山东济南人, 复旦大学化学系 2012 级本科生

俞熹 (1978-) 男, 浙江东阳人, 复旦大学物理学系教师, 长期从事物理实验教学.

email: whyx@fudan.edu.cn

这几个类似的步骤.数学建模竞赛对物理学生科学素养和物理意识提高有很好的促进作用,而数学建模比赛涉及的一些算法思想,诸如模拟退火算法正是来自物理学的发展,相应地,物理学系学生凭借物理思维的训练有望在竞赛中表现优异.以我校参加交叉学科建模竞赛(ICM)的18支队伍为例,获得一等奖(Meritorious Winner)的四支队伍,有三支来自物理学系.

数学模型竞赛强调的是对生活中实例建模、解释、评估与方案策划的能力,对于物理学专业的学生,这是很好的历练机会.一个只能在物理课本中运用建模能力的学生,其物理素养是不足的,学会用物理的视角看待问题才能够学以致用.

本文所说物理的视角,或者说物理工作者解决问题的视角,是指以下几个方面:

①直接利用和借鉴物理学知识的视角

在分析自然科学问题时,我们可以直接运用物理学知识解决问题,而在其他领域,如社会科学领域,物理学思想的借鉴同样是重要的.例如,在统计物理学中,大量粒子的分布问题,类似正态分布的单峰形状是稳定的,这正如社会科学领域,一个社会中人们的收入分布问题,中等收入群体分布形成峰值是相对稳定的,也就是社会学家所言“橄榄形”分布.将物理学模型运用到其他领域,往往会有这番意想不到的收获.

②简化模型的视角

物理理论是优雅简单的,但现实中的物理世界是纷繁复杂的,在一个好的物理学家的视角中,模型能够得到合理的简化,主要因素能够得到凸显,例如,我们在考虑抛掷铅球的问题中,空气阻力和海拔的影响往往是可以忽略的,如此方便我们抓住问题主干,从而快速有效地解决实际问题.

数学建模强调的亦不是考虑模型的全部细节,而是从纷繁的现实抽象出最核心的因素,物理学的研究同样如此,理论物理大师朗道曾讲过:“最严重的错误是,采用非常精确的理论,并详细计算所有的细节的修正,却忽略了比他们大得多的物理量”[2].

③运用数学工具考虑问题的视角

单纯地依赖于定性分析解决问题,总会带来非理性的因素,物理学在建立的最初就依靠数学工具进行定量研究,物理学的发展与数学是相互促进的.

但物理学不同于数学的地方之一是,物理学并不排斥定性分析,赵凯华先生曾提出要“定性和半定量地”学习和研究物理,也就是说既要能够定性地把握问题的全貌,避免陷入细节的纠结,又要适当地给出定量可靠的理性结论.生活中处处可以建模,处处需要数学工具,例如我们在玩德州扑克等棋牌游戏时,利用概率知识建立胜率模型,并不一定完全精确(完

全定量的分析带来的耗时是游戏不允许的，也会减少游戏的趣味），做到“半定量半定性”就足可以更好地把握游戏进程，也就达到了运用数学工具解决生活中实际问题的目的。

④运用计算机工具考虑问题的视角

在如今的信息时代，数学工具的运用往往依赖于计算机，而在物理学研究中计算机是广泛使用的，学会将很多问题，诸如处理大数据、解决微分方程、可视化处理、解决重复可程式化实现问题等，转化成计算机可解问题，是未来生活工作中重要的视角和方法。

例如，在前往欧洲若干国家旅行之前，我们可以利用各国家和城市地理坐标，使用最短路径算法编程，来得到最优化的旅行线路。在这一过程中，地理数据的获取是简单的，当前各类编程语言中，提供的库函数等往往包含各种各样现成的算法，实现起来是很方便的。这样，就将“人为估计”的问题转换成了“模型问题”。当前信息化社会为我们提供了建模的无限可能，我们应当用好计算机这一工具以把握信息时代脉搏。

另外，在数模竞赛中，论文的书写是重要的，好的想法只有通过准确规范的表达才可以被其他人了解与接受。在我们的参赛实践中，由于受到了规范书写物理实验报告的锻炼，竞赛论文的书写相对顺利。需要注意的是，表达能力以及竞赛所强调的合作能力是科学工作者必不可少的本领。

2. ICM 参赛实践

为了更好地介绍数学建模竞赛，我们以作者团队所参加的本年度交叉学科建模竞赛(ICM 2014)为例，展示问题的重构与解决方案：

2.1 赛题重述：

学术界有若干评价学术水平的工具，如 SCI 指数、H 因子、IF 因子，Eigenfactor 特征因子等。基于引用与合著关系网络，研究其特性的方法，也是确定学术研究影响力的数种技术之一。我们的任务是：分析学术研究网络中的影响关系，并扩展到社会中的其他领域。

20 世纪的匈牙利数学家 Erdős 是学术界中最著名的合著者之一，他有超过 500 名合著者，并发表了 1400 多篇研究论文。我们不妨从他的合著网络出发，从如下几方面加以探究：

- 1、 利用 Erdős 各直接合作者之间的相互合作关系，建立一个学术关系网络，并比较网络中合作者的影响力；
- 2、 将这一模型推广到其他领域（如电影演员之间的合作关系），讨论模型在社会生活中的可能应用和相应的衍生策略；
- 3、 分析模型的优缺点、灵敏度，以及基于网络对这类现象建模的优势所在。

2.2 基本思路：

Erdős 合作网络结构庞大（511 个节点，1640 条边）且是稀疏图，因此我们需要找到网络中的核心关系；对于核心成员，我们应当找到一种对其影响力排序的方法；另外，合作关系产生和发展涉及了较长的时间跨度，我们应当注意到网络随时间演化的特点.[3][4][5]

1、查阅资料发现，K-Shell 算法可以发掘网络的核心节点和关系，从而大大简化庞杂的关系网络.K-Shell 算法是这样工作的：去掉度为 1 的节点，在此基础上再去掉度为 1 的节点，直到没有度为 1 的节点，就得到 $K_s=1$ 的节点；再去掉度为 2 的节点，得到 $K_s=2$ 的节点；直到计算了所有点的 K_s 值.这样，网络的外壳和边缘的 K_s 为 1，然后往内像剥洋葱一样进入网络的核心（K-shell 值大的区域）. K_s 越高就说明这个节点更靠近网络核心.

我们由此得到了如下的核心关系图（包含 27 节点， K_s 值为 10）:

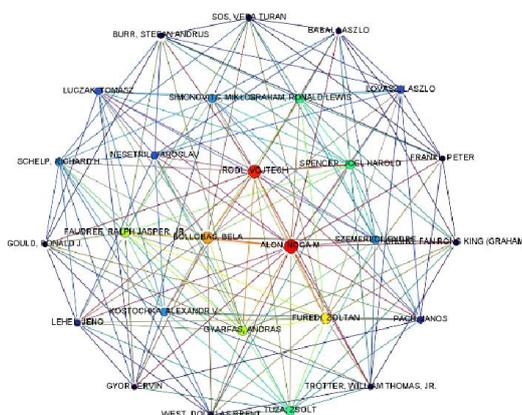


图 2 Erdős 合作网络核心关系图

2、K-Shell 算法简化了网络结构，对影响力分层，但并不能给出同一层相对影响力的大小.接着，我们对上述最顶层的 27 个节点使用了 PageRank 算法[6]，产生了他们的影响力相对排名.

PageRank 算法是这样工作的：其最早应用在谷歌的搜索引擎中，某一页面的重要程度由与之有连接关系的页面的重要程度决定，相当于“用链接投票”.

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} (1-d)/N \\ (1-d)/N \\ \vdots \\ (1-d)/N \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} I(1,1) & I(1,2) & \dots & I(1,N) \\ I(2,1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & I(i,j) & \\ I(N,1) & \dots & & I(N,N) \end{bmatrix} \vec{R}$$

以上面的矩阵来表达，式中 \vec{R} 表示各点的 PageRank 值，值越高表明重要性越大.元素 $I(i,j)$ 表示点 i 与点 j 之间有无关系. d 表示通过通过已有连接关系产生 PageRank 值转移的

概率, $(1-d)/N$ 表示随机产生访问关系而带来的 PageRank 值的变化.

3、为了体现时间因素对这些关系的影响, 我们让代表关系的边的权重随时间演化. 即两点产生关系 (开始合作) 时, 权重设定为 0, 统计截止时设定值为 1, 中间年份权重随时间演化 (为了简化不妨设置为线性增加). 由此我们产生如下的随时间演化图:

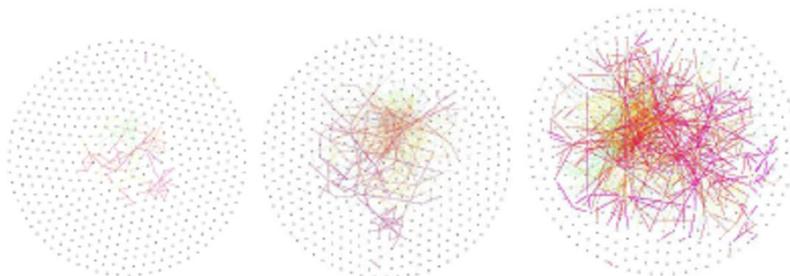


图 3 边权重随时间演化(1970 1980 1990)

有趣的是, 我们对所有节点总度数随年份进行统计, 得到如下图线:

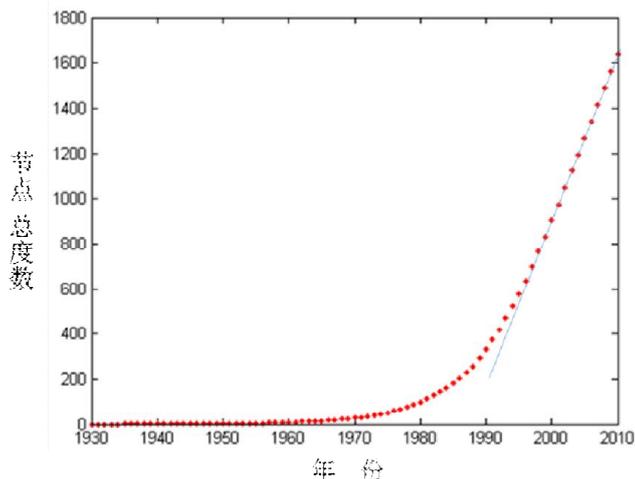


图 4 节点总度数随时间演化

可以发现, 在 1960 之前, 曲线接近于零且变化缓慢, 表明此时这一学术网络并不活跃; 之后直到 1990 年代, 曲线呈指数增长, 学术网络迅速扩张, 1994 年后图线为相关系数接近 1 的直线. 这可以解释为: 早期, 年轻的 Erdős 学术影响力并不大; 资料显示, 1960 年代他发表了网络科学奠基性的论文“*On Random Graph*”, 从此直至 1990 年其晚年, 网络科学蓬勃发展, 合作网络也日益壮大; 在其 1996 年去世后, 合作网络变得不再像之前那么活跃.

这样的分析方式, 与物理学中“从庞杂的现象中抽象出物理规律, 又使得物理规律被现实世界所验证”的“归纳——演绎思维”相类似: 从繁复的关系网络中抽象出了核心的特征性指标, 进而使用指标预言或解释其他现象.

通过边权重随时间演化这一简单假设, 对节点度数进行统计, 理论上我们就可以反推出历史发展脉络, 这也是我们引入时间演化概念的一个重要应用.

4、对模型进行推广和检验：我们利用 Matlab 从 IMDb 网站导出了排名前 250 的电影的主演名单，视其共同出演一部电影为合作关系，利用 PageRank 算法估计他们的相对影响力大小：

表 1 IMDb 影响力前十位的演员

排名	姓名	PageRank 值	排名	姓名	PageRank 值
1	Robert De Niro	17.656	6	James Stewart	11.452
2	Morgan Freeman	15.75	7	Al Pacino	11.329
3	Harrison Ford	13.752	8	Robert Duvall	11.326
4	Clint Eastwood	13.732	9	Tom Hanks	11.171
5	Leonardo DiCaprio	12.326	10	Bruce Willis	11.086

榜单上的十位演员是我们熟知的，这从现实经验中对模型的正确性和可推广性做了验证.这种评估方式也正如物理定律需要寻找大量实验的验证支持.

5、为了使这一模型对现实生活有所指导，我们假想这样一幅场景：有一位青年学者需要和网络中的前辈进行合作，为了快速提高学术知名度，他需要找到 PageRank 值很高的人合作吗？通过进行模拟，我们发现能够使青年学者与之合作后的 PageRank 值最高的五位合作者是：

表 2 合作策略模拟

排序	待选合作者 (排名)	青年学者合作后 排名
1	GAAL, STEVEN A.(338)	308
2	BOES, DUANE CHARLES(343)	310
3	KHARE, SATGUR PRASAD(358)	320
4	RYAVEC, CHARLES ALBERT(379)	334
5	SIRAO, TUNEKITI (389)	338

如此看来，与我们习惯中所认为的“尽量与最大牌学者合作”的观点不同，和排名中段的学者合作反而产生了更好的效果.事实上，这也不难理解，虽然权威学者拥有最丰富的学术资源，但是他们合作关系众多，留给青年学者的发展空间反而变小了.

学习物理的过程中我们也经常遇到一些这样“不怎么直观”的结论，只有冷静地分析事物本身，尝试各种方法验证自己的想法，才能建好模型、建立起真正可靠的物理图像。

这之中虽然做出了模型简化：假定青年学者从每个待选合作者获得资源的方式相同，但我们仍然得到了大致的合作策略。抓住事物核心，略去次要因素才能看清本质，这也正是物理学中处理问题的关键一步。

3. 结 语

从上面的参赛实践可以看出，数学建模是将模型运用到我们的生活中，为我们理解社会和自然的构造，以及做出理性选择服务的，而物理学的目的也恰恰在于基于模型来感知、解释和改造世界。数学建模的实践对物理学系学生相关素养的养成是有帮助的，物理学系学生在数学建模竞赛中也有一定的优势。

最后，感谢复旦大学物理学系俞熹老师的帮助和指导，感谢复旦大学物理实验中心的学习经历和各位老师的细致指导，感谢团队的团结协作。

参考文献：

- [1]美国大学生数学建模竞赛网站[OL]. <http://www.comap.com/undergraduate/contests>
- [2]朗道. 《力学》[M]. 北京:高等教育出版社, 2007:173-174
- [3]Newman, Mark EJ. "The structure and function of complex networks." [J] SIAM review 45.2 (2003): 167-256.
- [4]Kleinberg, Jon M. "Navigation in a small world." [J] Nature 406.6798 (2000): 845-845.
- [5]汪小帆. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京:清华大学出版社, 2006
- [6]Page, Lawrence, et al. "The PageRank citation ranking: Bringing order to the web." Stanford InfoLab. (1999).

Review of 2014 American MCM/ICM Campaign

LI Nan¹, ZHONG Mingyuan¹, LYU Hao², YU Xi¹

(Fudan University 1.Physics Dept.,2.Chemistry Dept.; Shanghai 200433)

Abstract: By taking our experience of participation in the Interdisciplinary Contest in Modeling (ICM) 2014 as an example, we introduced the contest and show the benefits of participation in it for a student of department of physics. We described the problem of ICM 2014 and the method to solve it in detail. In this way, we proved the advantage of thinking in a physics way in mathematical modeling.

Key words: Mathematical Modeling; physics; MCM; ICM