文章编号:1000-6788(2008)07-0034-07

不完全市场下基于局部风险最小策略的股票期货定价研究

张力健,马　健,许　玥
(北京航空航天大学 经济管理学院,北京 100083)

摘要:　在具体的离散时间不完全市场模型下给出了极小鞅测度的刻划,并以此推导股票期货的无套利定价模型.随后,通过实证对推导出的定价模型加以检验,其结果表明:新定价模型能够较好的对样本期货价格进行拟合,且在与持有成本理论的单因素期货定价模型的比较中,新模型在价格预测的稳定性和精确度上都表现出了一定程度的优势.

关键词:　离散时间不完全市场;局部风险最小策略;极小鞅测度;股票期货定价;实证研究
中图分类号:　F830.9　　　　**文献标志码**:　A

Stock futures pricing based on the locally risk-minimizing strategy under incomplete markets

ZHANG Li-jian, MA Jian, XU Yue
(School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract:　In a concrete discrete-time incomplete market model, the minimal martingale measure is characterized. Under the martingale measure, the arbitrage-free pricing model of stock futures is derived. Then to investigate the model's efficiency, an empirical study is done. The empirical result shows that the prices predicted by new model can fit the sample's actual prices well, and compared to the one-factor model from Cost-of-carry theory, the new model presents predictions for stock futures' prices with better reliability and precision.

Key words:　discrete-time incomplete markets; locally risk-minimal strategy; minimal martingale measure; stock futures pricing; empirical study

1　引言

当市场为不完全时,市场中的基础证券数少于不确定状态的个数,这造成市场中存有不可达的未定权益.在假定无套利机会的前提下,市场中的等价鞅测度将不唯一,如果采用套利法给未定权益定价,则每个等价鞅测度均会给出一个价格体系[1,2].为此,需要事先给定一个准则,以此选择适当的等价鞅测度给未定权益定出唯一价格.

Föllmer 和 Schweizer 在寻求保值策略风险最小的准则下,提出一种"均值-方差"保值法,首次提出"风险最小策略"的概念[3].之后,Föllmer 和 Sondermann 又考虑了任意概率测度的情况,引入了"极小鞅测度"的概念[4].在这期间,Schweizer 及 Merenrio 等人也相继进行了此类研究[5,6].

早期的研究均是以市场时间连续为前提.何声武则率先在离散时间市场下对局部风险最小策略加以研究[7],在一篇未发表的综述中他还对极小鞅测度的问题进行了深入的探讨.之后,李平对风险最小策略和极小鞅测度这二者的性质及内在联系进行了总结,并在一个特定的不完全市场模型中给出了极小鞅测度的刻划[8,9].

本文在上述研究的基础上,将作以下工作:设定一个具体的不完全市场模型,在其中给出极小鞅测度的刻划并以此推导出股票期货的无套利定价模型,然后通过实证对模型加以检验.

收稿日期:2007-04-13
资助项目:国家自然科学基金(70371006,70521001);教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET05184)
作者简介:张力健(1979-),河北唐山人,在读博士生,研究方向:证券投资、资产定价等,E-mial:leejone2002@sohu.com.

2　局部风险最小策略与极小鞅测度

给定一时间离散、无交易摩擦的市场,包含 $d+1$ 种资产:1 种无风险资产,d 种风险资产($d+1\le K$, K 为市场中不确定状态的个数). $(S_n^0)_{0\le n\le N}$ 为无风险资产的价格过程(这里设 $S_0^0=1$), $(S_n)_{0\le n\le N}=(S_n^1,\cdots,S_n^d)_{0\le n\le N}$ 为风险资产的价格过程. 存在一带流概率空间(Ω, $\mathbf{F}$, $(\mathbf{F}_n)_{0\le n\le N}$, P),满足通常的条件. 令贴现因子 $\beta_n=(S_n^0)^{-1}$,从而风险资产的贴现价格过程为 $(\widetilde{S}_n)_{0\le n\le N}=(\beta_nS_n)_{0\le n\le N}$. 这里假设 $E[|\widetilde{S}_n|^2]<\infty$,则 $(\widetilde{S}_n)$ 有 Doob 分解:

$$\widetilde{S}_n=\widetilde{S}_0+\widetilde{W}_n+\widetilde{A}_n,\quad 0\le n\le N,$$

其中,$(\widetilde{W}_n)_{0\le n\le N}$ 为零初值 d-维平方可积鞅,$(\widetilde{A}_n)_{0\le n\le N}$ 为零初值 d-维可料过程.

通常投资策略为 R^{d+1} - 值随机过程 $(\phi_n)_{0\le n\le N}$, $\phi_n=(\phi_n^0,\phi_n)$, $\phi_n=(\phi_n^1,\cdots,\phi_n^d)$. 其中 ϕ_n^0 和 ϕ_n 分别表示投资者持有无风险资产和风险资产的份额. $(\phi_n)_{0\le n\le N}$ 为可料过程,满足:

$$E[|\phi_n\Delta\widetilde{S}_n|^2]<\infty, 1\le n\le N;\ E[|\widetilde{V}_n(\phi)|^2]<\infty, 0\le n\le N.$$

这里, $\widetilde{V}_n(\phi)=\beta_nV_n(\phi)=\phi_n^0+\phi_n\widetilde{S}_n$, $0\le n\le N$,其中的 $V_n(\phi)$ 和 $\widetilde{V}_n(\phi)$ 分别为交易策略对应的财富和贴现财富.

记交易策略的全体为 Ψ. 设 $\phi=(\phi^0,\phi)\in\Psi$,令

$$C_n(\phi)\triangleq\widetilde{V}_n(\phi)-\sum_{k=1}^{n}\phi_k\Delta\widetilde{S}_k,\quad \mathbf{R}_n(\phi)\triangleq E[(C_N(\phi)-C_n(\phi))^2|\mathbf{F}_n],\quad 0\le n\le N,$$

这里 $(C_n(\phi))_{0\le n\le N}$ 称为(贴现)费用过程; $\mathbf{R}_n(\phi)$ 则通常用于衡量交易策略的风险[7].

定义 2.1　交易策略 $\hat{\phi}\in\Psi$ 称为局部风险最小策略,若对任意 $\phi\in\Psi$ 及 $j\in\{0,1,\cdots,N-1\}$,只要 $V_N(\phi)=V_N(\hat{\phi})$ 及 $\phi_n=\hat{\phi}_n$, $n\notin\{j,j+1\}$ 就有 $\mathbf{R}_j(\hat{\phi})\le\mathbf{R}_j(\phi)$, $j=0,1,\cdots,N$.

假设 $L_2^d(\mathbf{F})$ 表示 $\mathbf{F}$ 可测、d-维平方可积的随机变量的全体. $L_2^1(\mathbf{F})$ 简记为 L_2. 对于未定权益 $X\in\mathbf{F}_N^+$, $\widetilde{X}=\beta_NX\in L_2$,一个交易策略 $\phi\in\Psi$ 若满足 $V_N(\phi)=X$,则称其为未定权益的广义保值策略. 可以证明,当满足一定条件时未定权益的广义保值策略可由局部风险最小策略实现[7,8].

以 $\mathbf{B}$ 表示市场中等价鞅测度的全体. 由 Bayes 法则和局部鞅的性质,易得如下结论:

引理 2.1[8]　设 $Q\in\mathbf{B}$, $Z_n=E[\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P|\mathbf{F}_n]$, $0\le n\le N$,则 (Z_n) 可表示为

$$Z_n=\prod_{k=1}^{n}(1+\Delta L_k),\quad 1\le n\le N, Z_0=1 \tag{2.1}$$

其中, $L=(L_n)_{0\le n\le N}$ 为局部鞅,且满足下列条件

$$\Delta L_n>-1,\ \Delta\widetilde{A}_n=-E[\Delta L_n\Delta\widetilde{W}_n|\mathbf{F}_{n-1}],\quad 1\le n\le N, \tag{2.2}$$

这里, $(\widetilde{W}_n)$ 和 $(\widetilde{A}_n)$ 分别表示 $(\widetilde{S}_n)$ 的 Doob 分解中的鞅部分和可料部分. 反之,若 $L=(L_n)$ 为满足条件(2.2)的局部鞅,且使按(2.1)定义的 (Z_n) 为鞅,令 $\mathrm{d}Q=Z_n\mathrm{d}P$,则 $Q\in\mathbf{B}$.

定义 2.2　等价鞅测度 Q 称为极小鞅测度(minimal martingale measure),若满足

1) 任意与 $(\widetilde{W}_n)$ 正交的平方可积鞅为 Q-鞅; 2) $E[(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P)^2]<\infty$.

根据李平等的研究,关于极小鞅测度的性质有如下的两点重要结论[9,10]:

引理 2.2[9]　对于 $Q^*\in\mathbf{B}$,使其成为极小鞅测度的充分条件是由 $\Delta L_n=\Delta Z_n/Z_{n-1}$, $1\le n\le N$ 定义的过程 $(L_n)_{0\le n\le N}$ 关于 $(\widetilde{W}_n)$ 有可料表示:

$$\Delta L_n=\alpha_n\Delta\widetilde{W}_n,\ \alpha_n\in L_0^d(\mathbf{F}_{n-1}),\quad 1\le n\le N. \tag{2.3}$$

引理 2.3[8,9]　设存在极小鞅测度 $Q^*\in\mathbf{B}$,未定权益 $X\in\mathbf{F}_N$, $\widetilde{X}=\beta_NX\in L_2$; $\hat{\phi}\in\Psi_m$ 为 X 的局部风险最小的广义保值策略,则有

$$\widetilde{V}_n(\hat{\phi})=E_{Q^*}[\widetilde{V}_N(\hat{\phi})\beta_N|\mathbf{F}_n]=E_{Q^*}[X_N\beta_N|\mathbf{F}_n],\quad 0\le n\le N.$$

3 具体市场模型下极小鞅测度的刻划

这里在原市场模型的基础上,进一步假设:1)市场中投资者均为理性,追求投资的收益最大化、方差最小化,这意味他们均采用马克维茨的资产选择法[10].2)市场有效且所有投资者对证券的评价及对经济形势的看法均一致,从而投资者们对于各风险资产收益率的概率分布预期也是一致的.

由此两条假设不难推知:1)存在一个由 d 种风险资产按市值比分配权重而构成的市场资产组合(market portfolio),该组合不仅位于马克维茨有效前沿(efficient frontier)上,而且为有效前沿上与最优资本配置线(optimal capital allocation line)相切的点;2)投资者们均会根据马克维茨资产选择法选取市场资产组合作为其风险资产组合,也就是说,所有投资者的投资组合均由无风险资产和市场资产组合构成,它们之间的差别仅在于投资于两种资产的权重有所不同[11,12].

鉴于此,在以下的推导中可视作市场中仅存在两种资产,无风险资产和市场资产组合资产(简称市场组合资产).记市场组合资产的价格过程为$(M_n)_{0\le n\le N}$,其收益率过程为$(R_n)_{1\le n\le N}$,无风险收益率过程为$(r_n)_{1\le n\le N}$.这里规定(R_n)为适应性过程,(r_n)为确定性过程.

易知,$E[|\widetilde{M}_n|^2]<\infty$,从而$(\widetilde{M}_n)$同样有 Doob 分解:$\widetilde{M}_n=\widetilde{M}_0+\widetilde{W}_n+\widetilde{A}_n$.其中,$(\widetilde{W}_n)$,$(\widetilde{A}_n)$分别为 Doob 分解中的鞅部分和可料部分[9,10],满足

$$\widetilde{W}_n=\sum_{k=1}^{n}(\widetilde{M}_k-E[\widetilde{M}_k\mid\mathbf{F}_{k-1}]),\quad 1\le n\le N,$$

$$\widetilde{A}_1=E[\widetilde{M}_1],\ \widetilde{A}_n=\sum_{k=2}^{n}(E[\widetilde{M}_k\mid\mathbf{F}_{k-1}]-\widetilde{M}_{k-1})+E[\widetilde{M}_1],\quad 2\le n\le N.$$

依据李平在特定的(只包含一个风险资产和一个无风险资产)市场模型中相关的推导可知[9],若要(2.2)和(2.3)得以满足,使

$$\Delta\widetilde{A}_n=-E[\Delta L_n\Delta\widetilde{W}_n\mid\mathbf{F}_{n-1}]=-E[\alpha_n(\Delta\widetilde{W}_n)^2\mid\mathbf{F}_{n-1}],\quad 1\le n\le N,$$

且 $\alpha_n\in L_0^d(\mathbf{F}_{n-1})$,$1\le n\le N$,这里必须且只需取

$$\alpha_1=\frac{(1+r_1)^2E[\widetilde{M}_1]}{M_0^2\mathrm{Var}(R_1)},\ \alpha_n=\frac{(1+r_n)(r_n-E[R_n])}{\widetilde{M}_{n-1}\mathrm{Var}(R_n)},\quad 2\le n\le N. \tag{3.1}$$

进而,可得如下推论:

推论 3.1 当且仅当 α_1 和 α_n 取值如(3.1)时,由 $\mathrm{d}Q^*=Z_N\mathrm{d}P$ 定义的概率测度 Q^* 即为此具体市场模型中的极小鞅测度,其中

$$Z_n=\prod_{i=1}^{n}(1+\Delta L_i),\ L_n=1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Delta\widetilde{W}_i,\ \Delta L_n>-1,\quad 1\le n\le N, \tag{3.2}$$

代入(3.1)到(3.2),Z_n 可确定为

$$Z_N=\left(1+\frac{(1+r_1)(1+E[R_1])(R_1-E[R_1])}{\mathrm{Var}(R_1)}\right)\prod_{i=2}^{N}\left(1+\frac{(r_i-E[R_i])(R_i-E[R_i])}{\mathrm{Var}(R_i)}\right). \tag{3.3}$$

4 股票期货定价模型的推导

设存在一 N 时刻到期的期货合约 F.投资者在 n,$n=0,\cdots,N$ 时期以 $F_{n,N}$ 的价格由交易所签订此合约.根据 Duffie 等人的研究表明[13],当市场完全存在唯一等价鞅测度 Q 时,此期货价格过程满足如下关系 $F_{n,N}=E_Q[F_{N,N}\mid\mathbf{F}_n]$,$n=0,1,\cdots,N$.鉴于此,这里如设期货在极小鞅测度 Q^* 下的无套利价格过程为$(p_n)_{0\le n\le N}$,则必有

$$p_n=E_{Q^*}[F_{N,N}\mid\mathbf{F}_n]=\frac{E[Z_NF_{N,N}\mid\mathbf{F}_n]}{E[Z_N\mid\mathbf{F}_n]},\quad 0\le n\le N, \tag{4.1}$$

记期货标的资产的价格过程为$(\hat{S}_n)_{1\le n\le N}$,其收益率过程为$(\hat{R}_n)_{1\le n\le N}$.由期货到期时刻价格的收敛性可得,$F_{N,N}=\hat{S}_N$.将其与(3.3)一并代入(4.1)并整理可得

$$p_n = \hat{S}_n \frac{E\left[\prod_{i=n+1}^{N}(1+\hat{R}_i)\left(1+\frac{(r_i - E[R_i])(R_i - E[R_i])}{\mathrm{Var}(R_i)}\right)\right]}{E\left[\prod_{k=n+1}^{N}\left(1+\frac{(r_i - E[R_i])(R_i - E[R_i])}{\mathrm{Var}(R_i)}\right)\right]}, \quad 0 \le n \le N. \tag{4.2}$$

为简化起见,这里假设 r_i 恒为常数 r,并且援引 Black-Scholes 在期权定价中的假定,令标的股票和市场组合资产的价格过程服从几何布朗运动[14],有

$$\frac{\Delta M_i}{M_i} = \mu\Delta t + \delta\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad \frac{\Delta\hat{S}_i}{\hat{S}_i} = \hat{\mu}\Delta t + \hat{\delta}\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \quad n+1 \le i \le N,$$

其中,ε 服从标准正态分布;μ 和 δ 分别为 R_i 的期望和标准差;$\hat{\mu}$ 和 $\hat{\delta}$ 分别为 $\hat{R}_i$ 的期望和标准差. 从而(4.2)可化简为

$$p_n = \hat{S}_n\left[1+\hat{\mu}+\frac{(r-\mu)\mathrm{cov}(R_i,\hat{R}_i)}{\delta^2}\right]^{N-n}, \quad 0 \le n \le N, n+1 \le i \le N. \tag{4.3}$$

至此,则完成了此具体市场模型下股票期货定价模型的推导.

5　实证研究

5.1　样本期货定价模型的确定

考虑到标准普尔(S&P) 500 指数的成分股是从各行业选出的、最具代表性的 500 只股票,其市场覆盖面较广,能够在很大程度上反映市场的变化趋势,从而选择该指数作为市场组合资产的替代. 另选取道琼斯工业(DJI)指数及从该指数的成分股中随机抽出的股票可口可乐(Cola)、花旗银行(Citi)作为标的资产,它们的期货即为实证研究的样本.

样本数据的时限设定为 5.1.2005～6.1.2006. 选取 3 月期国债利率在时限内的均值作为无风险利率 r 的替代. 利用上述各股指、股票在时限内的收盘价数据整理出收益率数据,同时计算出各收益率序列的期望和方差,如表 1. 根据这些计算结果及模型(4.3),各样本期货定价模型的具体形式可相应地确定. 如 DJI 指数期货的定价模型可确定为

$$\begin{aligned} p_n^{DJI} &= \hat{S}_n^{DJI}\left[1+0.001183+\frac{(0.000757-0.001174)\times 0.000193}{0.000182}\right]^{N-n} \\ &= \hat{S}_n^{DJI}(1+0.000743)^{N-n}, \quad 0 \le n \le N. \end{aligned}$$

同理,股票 Cola、Citi 期货的定价模型可分别确定为

$$p_n^{Cola} = \hat{S}_n^{Cola}(1+0.000505)^{N-n}, \quad p_n^{Citi} = \hat{S}_n^{Citi}(1+0.000633)^{N-n}, \quad 0 \le n \le N.$$

表 1　标的资产收益率的期望和方差

	r	S&P500	DJI	Cola	Citi
周利率期望	0.000757	0.001174	0.001183	0.001032	0.00136
周利率方差	0	0.000182	0.000204	0.000267	0.000421
与 S&P500 的协方差	0	0.000182	0.000193	0.000231	0.000317

5.2　定价模型的检验与分析

首先,根据上节确定的样本期货定价模型,分别计算出各样本期货的预测价格序列,并将其绘于平面图上. 以样本期货的实际价格(按照惯例选取样本期货距交割日较近的、活跃的收盘价[15])为标准,将预测价格与其加以对比,见图 1 至 3. 从中可较直观的看到,模型给出的预期价格能够较好地拟合实际价格,二者的变化趋势基本一致.

为了对本文期货定价模型(新模型)的效率作进一步的检验,我们在图 1 至 3 中,又加入另外一种传统期货定价模型(完全市场下持有成本理论的单因素模型)的预测价格. 对两类预测价格加以对比,如图 1 至 3 所示,两者相互交错且均与实际价格有同样的变化趋势,很难直观地判断出谁的拟合效果更好. 为此这

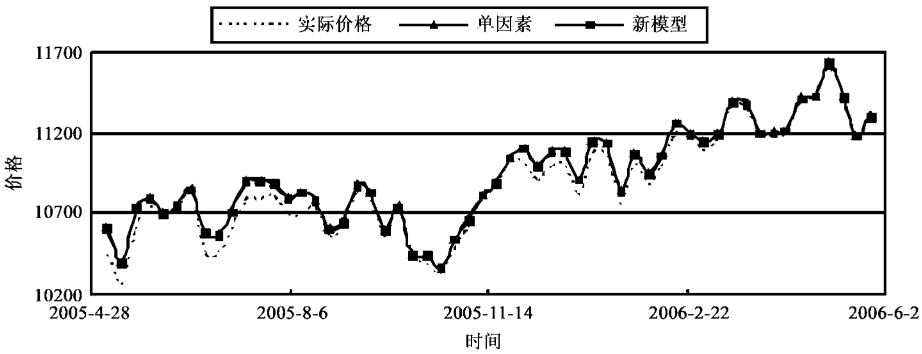

图 1 预测效果比较(DJI)

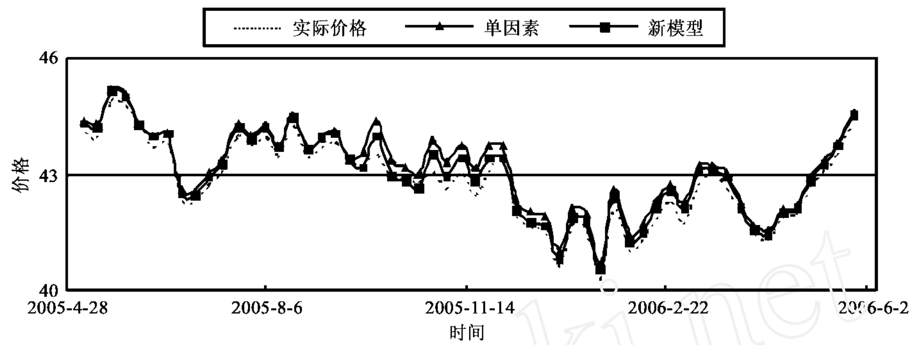

图 2 预测效果比较(Cola)

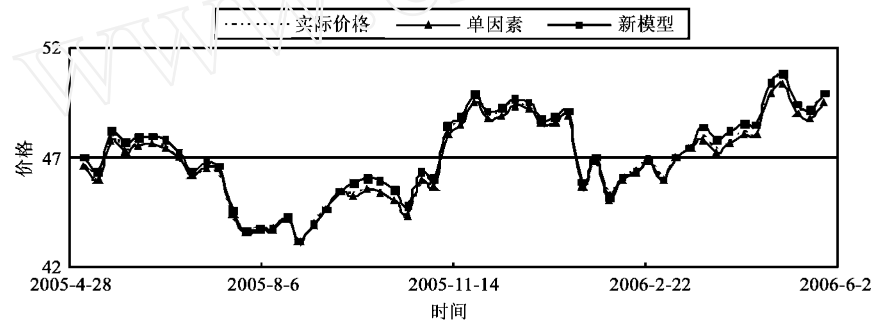

图 3 预测效果比较(Citi)

里又分别对两模型预测价格与实际价格的偏差作了统计,结果见表 2、3.

观察表 2、3 中的统计结果,可以总结出以下两点:

1) 对于股指期货价格的预测,新模型与传统的单因素模型相比效果差异不大. 无论从相对偏差分布的比较看,还是从相对偏差平方和的比较看,两模型预测偏差的统计结果大体一致. 究其原因本文认为,就股指期货而言,其标的资产一般为若干只股票的组合(如实证中的 DJI 指数由 30 只成分股构成),其覆盖面虽不及被选作市场组合代表的 S&P500 指数,但它也在某种程度上反映市场大盘的变化趋势,因此其收益率在回报和波动方面与 S&P500 指数的非常接近,就本实证而言有,$\hat{\mu}_{DJI}\approx\mu$,$\mathrm{cov}(R_n,\hat{R}_n^{DJI})\approx\delta^2$. 从而,DJI 股指期货的定价模型可近似地简化为

$$p_{n,N}^{DJI} = \hat{S}_n^{DJI}\left[1+\hat{\mu}_{DJI}+\frac{(r-\mu)\mathrm{cov}(R_n,\hat{R}_n^{DJI})}{\delta^2}\right]^{N-n} \approx \hat{S}_n^{DJI}[1+\hat{\mu}_{DJI}+r-\mu]^{N-n} \approx \hat{S}_n^{DJI}(1+r)^{N-n}.$$

可以看出,简化后的形式与单因素模型完全相同. 这就解释了两模型预测效果非常接近的现象,同时也说明,在股指期货价格预测方面传统的单因素模型仍然具有一定的效力.

表 2　预测价格相对偏差①分布的比较

	偏差范围	单因素		新模型	
		个数	百分比	个数	百分比
DJI	小于 0.005	30	53.57 %	31	55.36 %
	[0.005 , 0.01)	17	30.36 %	16	28.57 %
	[0.01 , 0.015)	8	14.29 %	8	14.29 %
	大于 0.015	1	1.79 %	1	1.79 %
Cola	小于 0.005	5	8.93 %	21	37.50 %
	[0.005 , 0.01)	20	53.57 %	31	55.36 %
	[0.01 , 0.015)	15	26.79 %	4	7.14 %
	大于 0.015	6	10.71 %	0	0.00 %
Citi	小于 0.005	14	25.00 %	27	48.21 %
	[0.005 , 0.01)	23	41.07 %	22	39.29 %
	[0.01 , 0.015)	20	17.86 %	7	12.50 %
	大于 0.015	9	16.07 %	0	0.00 %

2) 对于股票期货(包括 Cola、Citi) 价格的预测 ,新模型明显比传统的单因素模型更具优势. 从相对偏差分布的比较看(见表 2) ,新模型的预测相对偏差在最小的“小于 0.005”的比重明显大于单因素模型 ,而在偏差范围最大的“大于 0.015”其比重则明显小于单因素模型 ,这表明新模型的预测更为可靠. 从相对偏差和的比较看(见表 3) ,新模型的预测的统计结果均在 0.0025 以下 ,而单因素模型的值则高于 0.005 ,这表明新模型在预测精度上也优于单因素模型.

表 3　预测价格的相对偏差平方和②

	DJI	Cola	Citi
新模型	0.002352	0.002040	0.002248
单因素模型	0.002568	0.005454	0.005376

6　结语

本文在具体的不完全市场模型中推导出了基于风险最小保值策略的股票期货定价模型. 随后 ,利用道琼斯工业指数期货以及可口可乐、花旗银行这两只股票期货作为样本对该定价模型进行了实证检验. 实证结果表明:

1) 对于本次实证用到的 3 只样本期货而言 ,定价模型给出的预测价格能够较好地拟合期货的实际价格;

2) 与传统期货定价模型(持有成本理论的单因素模型) 相比 ,新模型虽然在股指期货价格预测方面没有表现出明显的优势 ,但在股票期货价格预测方面则无论是在可靠性上、还是在精度上都表现得更胜一筹.

由此 ,在一定程度上可以肯定 ,本文推导出的模型对于期货定价的理论研究有一定的参考价值. 但同时需要注意到的是 ,本文的研究仍然存在一些不足 ,如模型推导中个别假设较强、实证中样本个数较少等. 因而此课题的研究还须加以完善 ,此外进一步的实证检验也是必不可少的.

参考文献:

[1]　Harrison M , Kreps D. Martingales and arbitrages in multiperiod securities markets[J]. Journal of Economy Theory , 1979 , 20 : 381 - 409.

[2]　He S W, Li J J , Xia J M. Financial market of finite discrete time model[J]. Advances in Mathematics , 1999 , 28(1) :1 - 28.

① 相对偏差 = | 预测价格/实际价格 - 1|

② 相对偏差平方和 = Σ(预测价格/实际价格 - 1)^2。

[3] Föllmer H, Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information[C]//Hilderbrand W. Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard Debreau. Amsterdam: 1991, 205 - 223.

[4] Föllmer H, Sondermann D. Hedging of non-redundant contingent claims under incomplete information[C]//Davis M H. Applied Stochastic Analysis. Gordon Breach: 1996, 389 - 414.

[5] Schweizer M. On the minimal martingale measure and the Föllmer- Schweizer decomposition[J]. Stoch Anal Appl, 1995, 13:573.

[6] Mercurio F, Vorst T. Option pricing with hedging at fixed trading dates[J]. Appl Math Finance, 1996, 3: 135 - 158.

[7] He S W, Xia J M. Locally risk-minimizing strategies in discrete time incomplete financial markets[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, 43: 1601 - 1604.

[8] 李平. 离散时间不完全金融市场中的未定权益定价和效用极大化[D]. 中科院数学与系统科学研究院博士学位论文, 2000.

Li P. Contingent claim pricing and utility maximization for discrete-time incomplete financial markets[D]. Beijing: Academy of Mathematics and System Sciences, The Chinese Academy of Sciences, 2000, 6.

[9] Li P, Xia J M. Minimal martingale measures for discrete-time incomplete financial markets[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002, 18(2): 349 - 352.

[10] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7(1): 77 - 91.

[11] Sharpe W. Capital asset prices: A theory of market equilibrium[J]. Journal of Finance, 1964, (9): 425 - 442.

[12] Bodie Z, Kane A. Essentials of Investments[M]. Boston: McGraw-Hill, 2004.

[13] Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory[M](3rd ed). Princeton: Princeton University Press, 2001.

[14] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81: 637 - 654.

[15] Schwartz E S. The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging[J]. The Journal of Finance, 1997, (3): 923 - 973.