

德州扑克牌型概率计算

完美·德州扑克开发组

<http://poker.wanmei.com>

一. 样本空间

计算德州扑克中全部 7 张牌均翻出时的各种牌型所占概率。

从 52 张牌中抽取 7 张，样本空间 $S_0 = C_{52}^7 = 133784560$ 。

二. 各种牌型概率

1. 皇家同花顺 (Royal Flush)

1.1 牌型:

5 R R: 5 张皇家同花顺+2 张任意牌。

1.2 牌型样本数: $S_1 = C_4^1 C_{47}^2 = 4324$ 。

1.3 牌型概率: $P_1 = S_1 / S_0 = 1 / 30940 = 0.0000323206$ 。

2. 同花顺 (Straight Flush)

2.1 牌型:

5 X X: 5 张同花顺+2 张散牌;

6 X : 6 张同花顺+1 张散牌;

7 : 7 张同花顺。

2.2 牌型样本数: $S_2 = 1C_4^1 C_{46}^2 + 8C_4^1 C_{45}^2 + 1C_4^1 C_{45}^1 + 7C_4^1 C_{44}^1 + 7C_4^1 = 37260$ 。

2.3 牌型概率: $P_2 = S_2 / S_0 = 1 / 3590.57 = 0.000278507$ 。

2.4 备注

(1) 6 张同花顺和 7 张同花顺分开来算，是因为如果不分开而按照 5 张同花顺来算，样本会被重复计算。例如 6 张同花顺包含 2 个五张同花顺，实质是一个样本。下同。

(2) 5 张同花顺加另外 2 张散牌，这 2 张散牌不能与此五张形成 6 张或 7 张同花顺，则 8 种排列（不记皇家同花顺）的顺子，两头的空出 1 张不能选，中间的空出 2 张不能选。下同。

2.5 同花顺（含皇家同花顺）中的同号牌分布

同花顺中的三条 (5 M M): $S_{21} = 10C_4^1 C_3^2 C_3^2 = 600$ 。

同花顺中的两对 (5 M N): $S_{22} = 10C_4^1 C_5^2 C_3^1 C_3^1 = 3600$ 。

同花顺中的一对 (5 M X; 6 M; 5 Y Y): $S_{23} = 2C_4^1 C_3^1 C_3^1 C_{31}^1 + 8C_4^1 C_5^1 C_3^1 C_{30}^1 + 9C_4^1 C_6^1 C_3^1 + 2C_4^1 (C_7^1 C_4^2 + C_3^2) + 8C_4^1 (C_6^1 C_4^2 + C_2^1 C_3^2) = 20472$ 。

同花顺中的散牌 (5 X X; 6 X; 7): $S_{24} = 2C_4^1 C_{31}^2 + 8C_4^1 C_{30}^2 - 2C_4^1 (C_7^1 C_4^2 + C_3^2) - 8C_4^1 (C_6^1 C_4^2 + C_2^1 C_3^2) + 2C_4^1 C_{27}^1 + 7C_4^1 C_{26}^1 + 8C_4^1 = 16912$ 。

其中: $S_1 + S_2 = S_{21} + S_{22} + S_{23} + S_{24}$ 。

3. 四条/铁支 (Four of a Kind)

3.1 牌型:

4 R R R: 4 张同号牌+3 张任意牌。

3.2 牌型样本数: $S_3 = C_{13}^1 C_{48}^3 = 224848$ 。

3.3 牌型概率: $P_3 = S_3 / S_0 = 1 / 595 = 0.00168067$ 。

4. 葫芦、满堂红、三带二 (Boat or Full House)

4.1 牌型:

3 2 X X: 3 张同号牌+2 张同号牌+2 张散牌;

3 3 X : 3 张同号牌+3 张同号牌+1 张散牌;

3 2 2 : 3 张同号牌+2 张同号牌+2 张同号牌。

4.2 牌型样本数: $S_4 = C_{13}^1 C_{12}^1 C_{11}^2 C_4^3 C_4^2 C_4^1 C_4^1 + C_{213}^1 C_{11}^1 C_4^3 C_4^3 C_4^1 + C_{13}^1 C_{12}^2 C_4^3 C_4^2 C_4^2 = 3473184$ 。

4.3 牌型概率: $P_4 = S_4 / S_0 = 1 / 38.5193 = 0.0259610$ 。

5. 同花 (Flush)

5.1 含同花顺、皇家同花顺样本的计算

牌型:

5 X X: 5 张同花+2 张散牌;

6 X : 6 张同花+1 张散牌;

7 : 7 张同花。

牌型样本数: $S_{50} = C_4^1 C_{13}^5 C_{39}^2 + C_4^1 C_{13}^6 C_{39}^1 + C_4^1 C_{13}^7 = 4089228$ 。

牌型概率: $P_{50} = S_{50} / S_0 = 1 / 32.7163 = 0.0305658$ 。

同花中的三条 (5 M M): $S_{51} = C_4^1 C_{13}^5 C_5^1 C_3^2 = 77220$ 。

同花中的两对 (5 M N): $S_{52} = C_4^1 C_{13}^5 C_5^2 C_3^1 C_3^1 = 463320$ 。

同花中的一对 (5 M X; 6 M; 5 Y Y): $S_{53} = C_4^1 C_{13}^5 C_5^1 C_3^1 C_{24}^1 + C_4^1 C_{13}^6 C_6^1 C_3^1 + C_4^1 C_{13}^5 C_8^1 C_3^2 = 2100384$ 。

同花中的散牌 (5 X X; 6 X; 7): $S_{54} = C_4^1 C_{13}^5 (C_{24}^2 - C_8^1 C_3^2) + C_4^1 C_{13}^6 C_{21}^1 + C_4^1 C_{13}^7 = 1448304$ 。

其中: $S_{50} = S_{51} + S_{52} + S_{53} + S_{54}$ 。

5.2 牌型样本数: $S_5 = S_{50} - S_{52} - S_{51} = 4051784$ 。

5.3 牌型概率: $P_5 = S_5 / S_0 = 1 / 33.0187 = 0.0302859$ 。

6. 顺子 (Straight)

6.1 含同花顺、皇家同花顺样本的计算

顺子中的三条 (5 M M): $S_{61} = 10 \cdot C_5^1 C_4^3 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 = 51200$ 。

顺子中的两对 (5 M N): $S_{62} = 10 \cdot C_5^2 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 = 230400$ 。

顺子中的一对 (5 M X; 6 M; 5 Y Y): $S_{63} = 2 \cdot C_5^1 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_{28}^1 + 8 \cdot C_5^1 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 + 2 \cdot 4^5 C_7^1 C_4^2 + 8 \cdot 4^5 C_6^1 C_4^2 = 2617344$ 。

顺子中的散牌 (5 X Y; 6 X; 7): $S_{64} = 2 \cdot 4^5 (C_{28}^2 - C_7^1 C_4^2) + 8 \cdot 4^5 (C_{24}^2 - C_6^1 C_4^2) + 2 \cdot 4^6 C_{24}^1 + 7 \cdot 4^6 C_{20}^1 + 8 \cdot 4^7 = 3555328$ 。

顺子牌型样本数: $S_{60} = S_{61} + S_{62} + S_{63} + S_{64} = 6454272$ 。

6.2 牌型样本数: $S_6 = S_{60} - S_{62} - S_{61} = 6412688$ 。

6.3 牌型概率: $P_6 = S_6 / S_0 = 1 / 20.8625 = 0.0479329$ 。

7. 三条 (Three of a Kind)

7.1 含同花、顺子、同花顺、皇家同花顺的三条概率计算

牌型:

3 X X X X: 3 张同号牌+4 张散牌。

牌型样本数: $S_{70} = C_{13}^1 C_{12}^4 C_4^3 C_4^1 C_4^1 C_4^1 = 6589440$ 。牌型概率: $P_{70} = S_{70} / S_0 = 1 / 20.3029 = 0.0492541$ 。7.2 牌型样本数: $S_7 = S_{70} - S_{51} - S_{61} + S_{21} = 6589440 - 77220 - 51200 + 600 = 6461620$ 。7.3 牌型概率: $P_7 = S_7 / S_0 = 1 / 20.7045 = 0.0482987$ 。**8. 两对 (Two Pairs)**

8.1 含同花、顺子、同花顺、皇家同花顺的两对概率计算

牌型:

2 2 X X X: 2 张同号牌+2 张同号牌+3 张散牌;

2 2 2 X : 2 张同号牌+2 张同号牌+2 张同号牌+1 张散牌。

牌型样本数: $S_{80} = C_{13}^2 C_{11}^3 C_4^2 C_4^2 C_4^1 C_4^1 + C_{13}^3 C_{10}^1 C_4^2 C_4^2 C_4^1 = 32123520$ 。牌型概率: $P_{80} = S_{80} / S_0 = 1 / 4.16469 = 0.240114$ 。8.2 牌型样本数: $S_8 = S_{80} - S_{52} - S_{62} + S_{22} = 32123520 - 463320 - 230400 + 3600 = 31433400$ 。8.3 牌型概率: $P_8 = S_8 / S_0 = 1 / 4.25613 = 0.234955$ 。**9. 一对 (Pair)**

9.1 含同花、顺子、同花顺、皇家同花顺的一对概率计算

牌型:

2 X X X X X: 2 张同号牌+5 张散牌;

牌型样本数: $S_{90} = C_{13}^1 C_{12}^5 C_4^2 C_4^1 C_4^1 C_4^1 = 63258624$ 。牌型概率: $P_{90} = S_{90} / S_0 = 1 / 2.11488 = 0.472839$ 。9.2 牌型样本数: $S_9 = S_{90} - S_{53} - S_{63} + S_{23} = 63258624 - 2100384 - 2617344 + 20472 = 58561368$ 。9.3 牌型概率: $P_9 = S_9 / S_0 = 1 / 2.28452 = 0.437729$ 。**10. 高牌 (High Hand)**

10.1 含同花、顺子、同花顺、皇家同花顺的高牌概率计算

牌型:

X X X X X X X: 7 张散牌;

牌型样本数: $S_{100} = C_{13}^7 (C_4^1)^7 = 28114944$ 。牌型概率: $P_{100} = S_{100} / S_0 = 1 / 4.75849 = 0.210151$ 。10.2 牌型样本数: $S_{10} = S_{100} - S_{54} - S_{64} + S_{24} = 28114944 - 1448304 - 3555328 + 16912 = 23128224$ 。10.3 牌型概率: $P_{10} = S_{10} / S_0 = 1 / 5.78447 = 0.172877$ 。**三. 总结**

1. 校验

$$S_0 = 133784560$$

$$S_1 = 4324$$

$$S_2 = 37260$$

$$S_3 = 224848$$

$$S_4 = 3473184$$

$$S_5 = 4051784$$

$$S_6 = 6412688$$

$$S_7 = 6461620$$

$$S_8 = 31433400$$

$$S_9 = 58561368$$

$$S_{10} = 23128224$$

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10}$$

$$S_0 = S_3 + S_4 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10}$$

2. 分布

皇家同花顺	$P_1 = 1 / 30940 = 0.0000323206$
-------	----------------------------------

同花顺	$P_2 = 1 / 3590.57 = 0.000278507$
-----	-----------------------------------

四条	$P_3 = 1 / 595 = 0.00168067$
----	------------------------------

葫芦	$P_4 = 1 / 38.5193 = 0.0259610$
----	---------------------------------

同花	$P_5 = 1 / 33.0187 = 0.0302859$
----	---------------------------------

顺子	$P_6 = 1 / 20.8625 = 0.0479329$
----	---------------------------------

三条	$P_7 = 1 / 20.7045 = 0.0482987$
----	---------------------------------

两对	$P_8 = 1 / 4.25613 = 0.234955$
----	--------------------------------

一对	$P_9 = 1 / 2.28452 = 0.437729$
----	--------------------------------

高牌	$P_{10} = 1 / 5.78447 = 0.172877$
----	-----------------------------------

