弯曲法测量杨氏模量公式的推导

固体、液体及气体在受外力作用时，形状与体积会发生或大或小的改变，这统称为形变。当外力不太大，因而引起的形变也不太大时，撤掉外力，形变就会消失，这种形变称之为弹性形变。弹性形变分为长变、切变和体变三种。

一段固体棒，在其两端沿轴方向施加大小相等、方向相反的外力 F，其长度 l 发生改变，Δl。以 S 表示横截面面积，称 $\frac{F}{S}$ 为应力，相对长变 $\frac{\Delta l}{l}$ 为应变。在弹性限度内，根据胡克定律有：

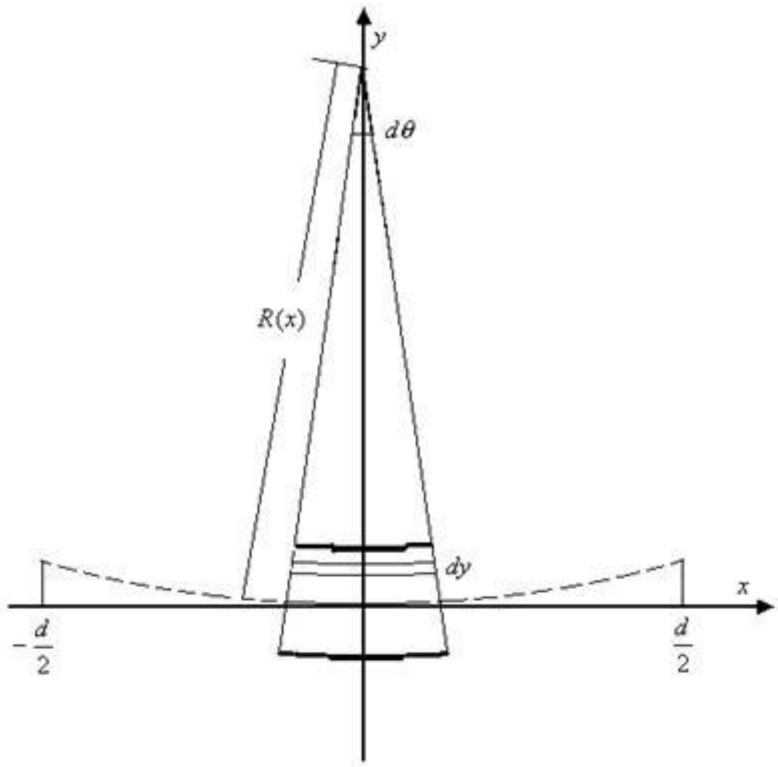
$$\frac{F}{S}=Y\cdot\frac{\Delta l}{l}$$

Y 称为杨氏模量，其数值与材料性质有关。

以下具体推导式子：$$Y=\frac{d^3\cdot Mg}{4a^3\cdot b\cdot\Delta Z}$$；

在横梁发生微小弯曲时，梁中存在一个中性面，面上部分发生压缩，面下部分发生拉伸，所以整体说来，可以理解横梁发生长变，即可以用杨氏模量来描写材料的性质。

如图所示，虚线表示弯曲梁的中性面，易知其既不拉伸也不压缩，取弯曲梁长为 dx 的一小段：



设其曲率半径为 $R(x)$，所对应的张角为 $d\theta$，再取中性面上部距为 y 厚为 dy 的一层面为研究对象，

那么，梁弯曲后其长变为 $(R(x)-y)\cdot d\theta$，所以，变化量为：

$$(R(x)-y)\cdot d\theta-dx$$

又 $$d\theta=\frac{dx}{R(x)}$$；

所以

$$(R(x)-y)\cdot d\theta-dx=(R(x)-y)\frac{dx}{R(x)}-dx=-\frac{y}{R(x)}dx$$；

所以应变为： $$\varepsilon=-\frac{y}{R(x)}$$；（变化量为Δ*l*，*dx* 为 *l*）

根据虎克定律有： $$\frac{dF}{dS}=-Y\frac{y}{R(x)}$$；

又 $$dS=b\cdot dy$$；

所以 $$dF(x)=-\frac{Y\cdot b\cdot y}{R(x)}dy$$；

对中性面的转矩为： $$d\mu(x)=\left|dF\right|\cdot y=\frac{Y\cdot b}{R(x)}y^2\cdot dy$$；

积分得： $$\mu(x)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{Y\cdot b}{R(x)}y^2\cdot dy=\frac{Y\cdot b\cdot a^3}{12\cdot R(x)}$$； （1）

对梁上各点，有： $$\frac{1}{R(x)}=\frac{y''(x)}{\left[1+y'(x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$；

因梁的弯曲微小： $$y'(x)=0$$；

所以有： $$R(x)=\frac{1}{y''(x)}$$； （2）

梁平衡时，梁在 x 处的转矩应与梁右端支撑力 $\frac{Mg}{2}$ 对 x 处的力矩平衡，

所以有： $$\mu(x)=\frac{Mg}{2}(\frac{d}{2}-x)$$； （3）

根据（1）、（2）、（3）式可以得到：

$$y''(x)=\frac{6Mg}{Y\cdot b\cdot a^{3}}(\frac{d}{2}-x)$$；

据所讨论问题的性质有边界条件； $y(0)=0$； $y'(0)=0$；

解上面的微分方程得到：

$$y(x)=\frac{3Mg}{Y\cdot b\cdot a^{3}}(\frac{d}{2}x^{2}-\frac{1}{3}x^{3});$$

将 $x=\frac{d}{2}$ 代入上式，得右端点的 y 值：

$$y=\frac{Mg\cdot d^{3}}{4Y\cdot b\cdot a^{3}}$$；

又 $y=\Delta Z$；

所以，杨氏模量为： $$Y=\frac{d^{3}\cdot Mg}{4a^{3}\cdot b\cdot\Delta Z}$$

上面式子的推导过程中用到微积分及微分方程的部分知识，作者之所以将这段推导写进去，是希望学生和教师在实验之前对物理概念有一个明晰的认识。