

Review Section

温故知新

环路定理

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

在静电场中, 场强沿任意闭合路径的流为零。

物理意义

表明静电场力为保守力, 或静电场是保守场。所以有相关势能——电势能。

$$\int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = A_{ab} = W_a - W_b = -(W_b - W_a)$$

电势差: $V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

等势面: 将场中相等电势值的各点连成一个连续的曲面

电势梯度

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial l_n} \vec{e}_n$$

电磁场性质

高斯定理

环路定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

有源

无旋

$$\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$

$$\oint_{(L)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

电磁场：有源无旋场；两定理相互独立

第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 导体与电介质

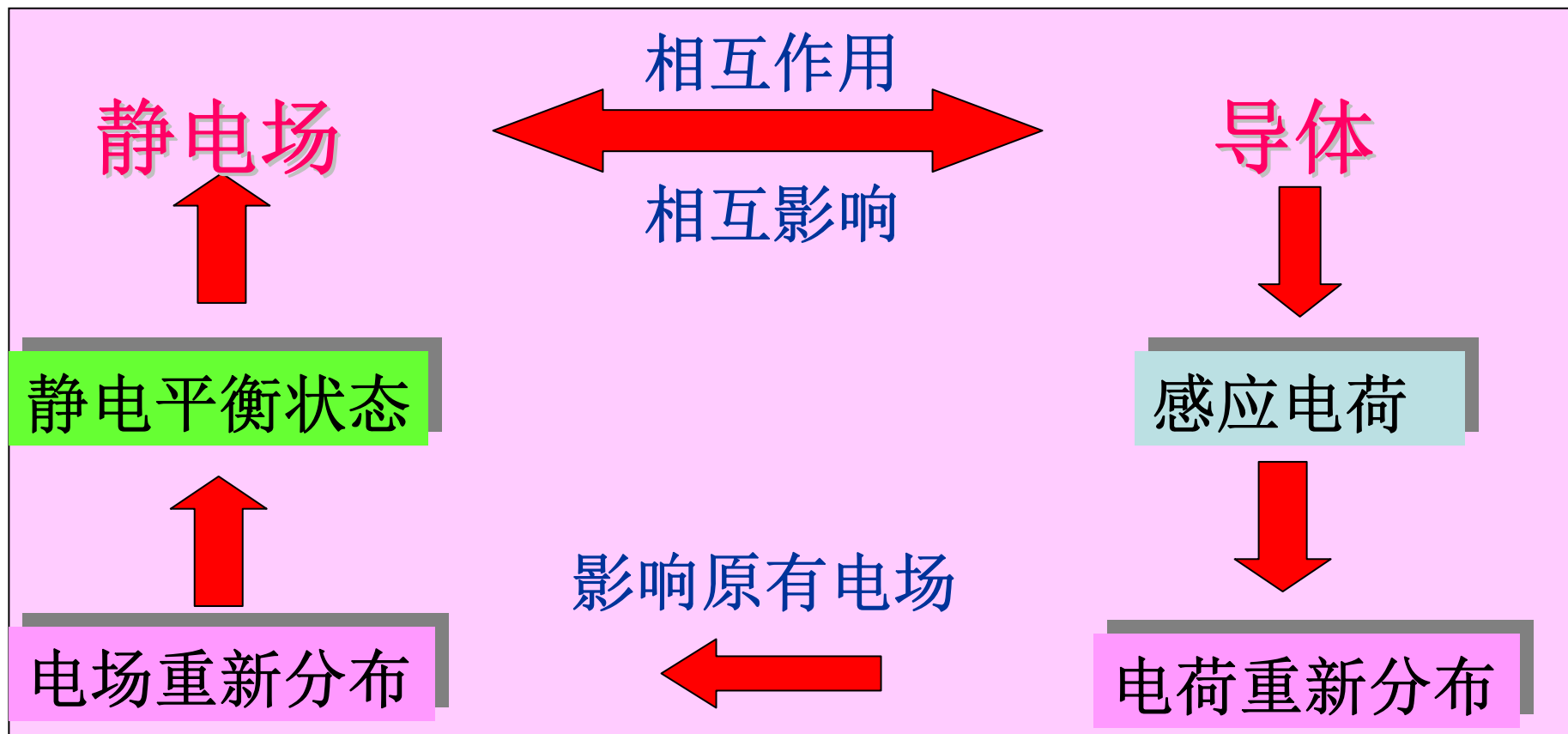
✓ 导体

外电场作用下,宏观电荷分布,并产生附加电场,
即静电感应

✓ 电介质(绝缘体)

外电场作用下,宏观电荷分布,并产生附加电场,
即极化

§ 2.2 静电场中的导体



➤ 理论基础为静电场的高斯定理与环路定理：

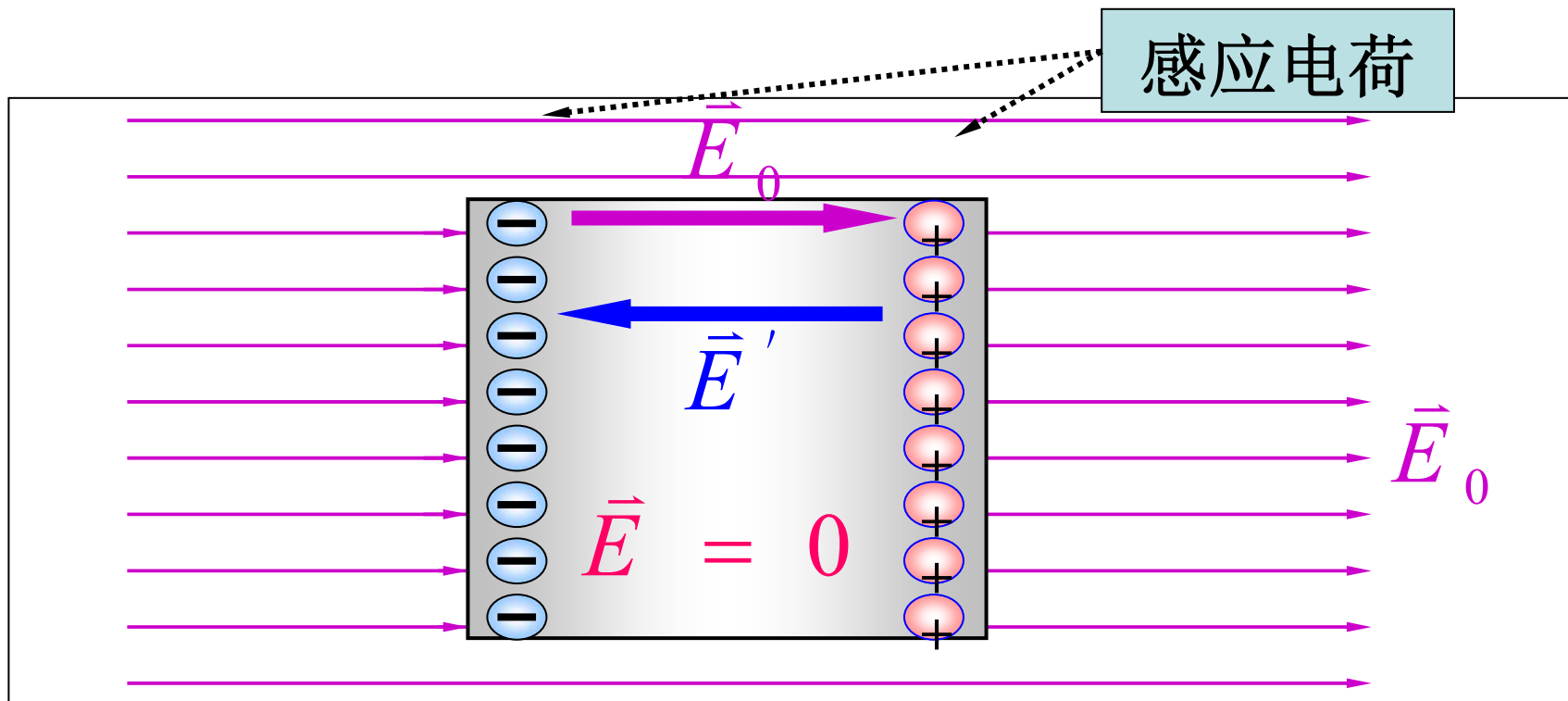
基本定理的特殊应用



静电平衡性质

§ 2.2.1 导体的静电平衡条件

当导体内部和表面都没有宏观的电荷移动时，导体处于静电平衡。此时，感应电荷产生的附加电场与外加电场在导体内部相抵消。

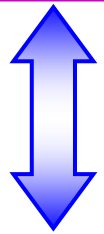


导体的静电平衡条件：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

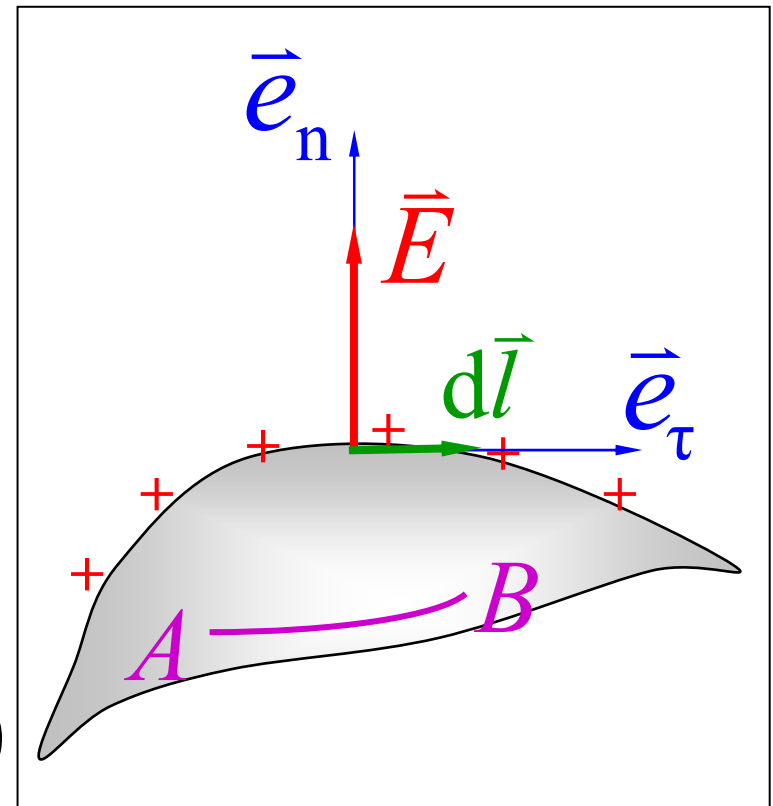
静电平衡的基本性质

- (1) 导体内部任何一点处的电场强度为零；否则，自由电子将继续有宏观移动(即非平衡)。
- (2) 导体表面处的电场强度的方向, 都与导体表面垂直。



导体是等势体

➤ 导体表面是等势面
 $\therefore \vec{E} \perp d\vec{l}$
 $\therefore -\Delta U = \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
➤ 导体内部电势相等
$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

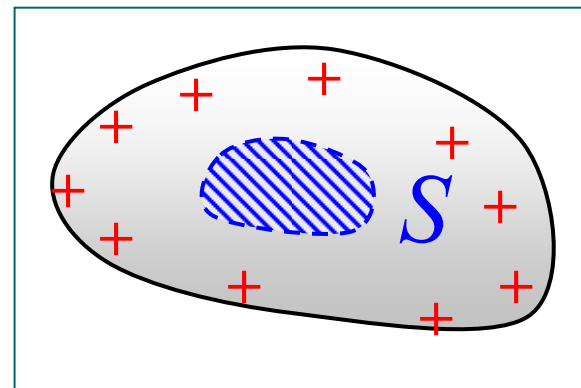


§ 2.2.2 静电平衡时导体上电荷的分布

1 实心导体

$$\because \vec{E} = 0 \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore q = 0$$



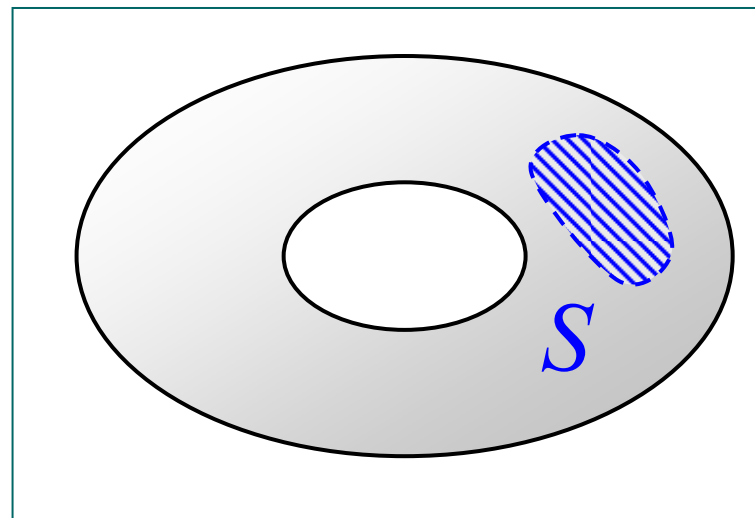
结论 导体内部无电荷, 电荷分布在表面上

2 有空腔导体, 空腔内无电荷

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上

内表面上有电荷吗?

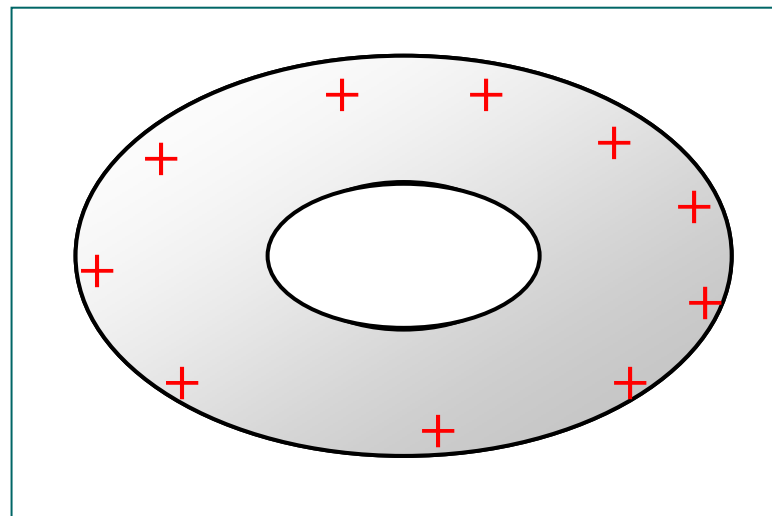


$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \sum q_i = 0$$

若内表面带电



$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$



导体是等势体

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{所以内表面不} \color{red}{\text{带}} \text{电}$$

结论 电荷分布在外表面上（内表面无电荷）

3. 空腔内有电荷

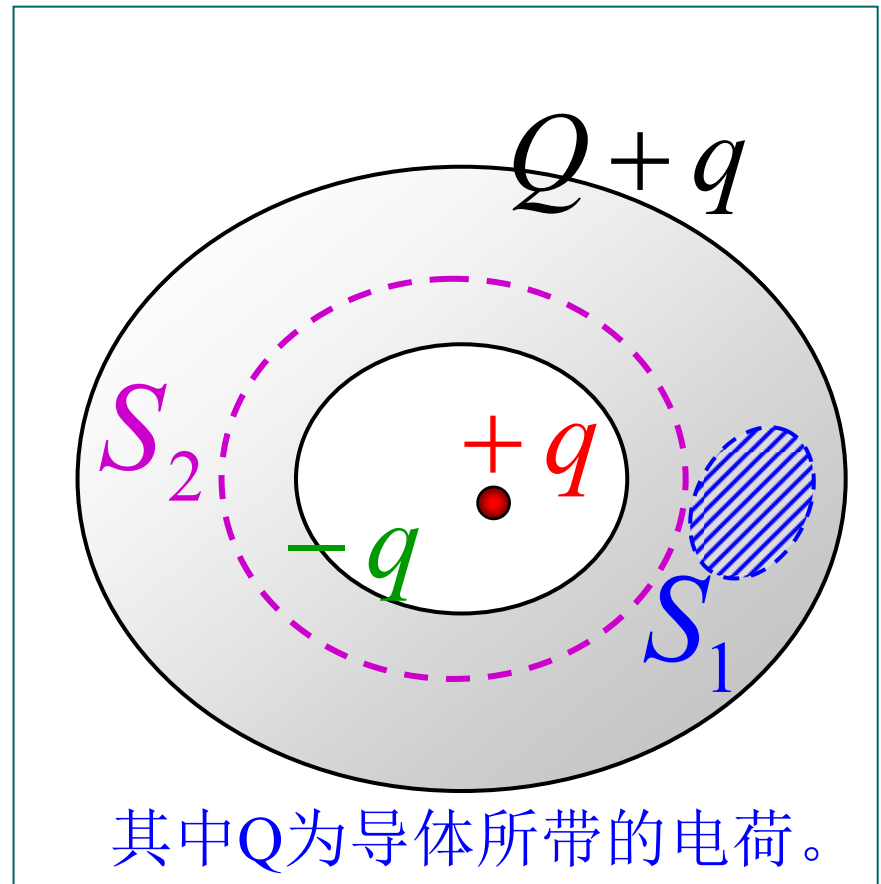
$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

电荷分布在表面上

内表面上有电荷吗？

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \sum q_i = 0$$

$$q_{\text{内}} = -q$$



结论 当空腔内有电荷 $+q$ 时,内表面因静电感应出现等值异号的电荷 $-q$,外表面有感应电荷 $Q+q$ (电荷守恒)

4. 表面电场强度

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \quad \sigma \text{ 为表面电荷面密度}$$

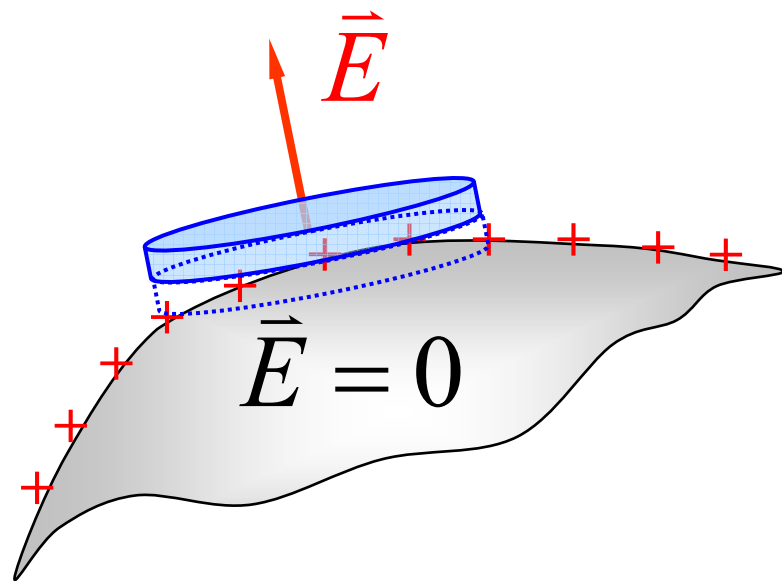
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上底}} \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下底}} \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{侧}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

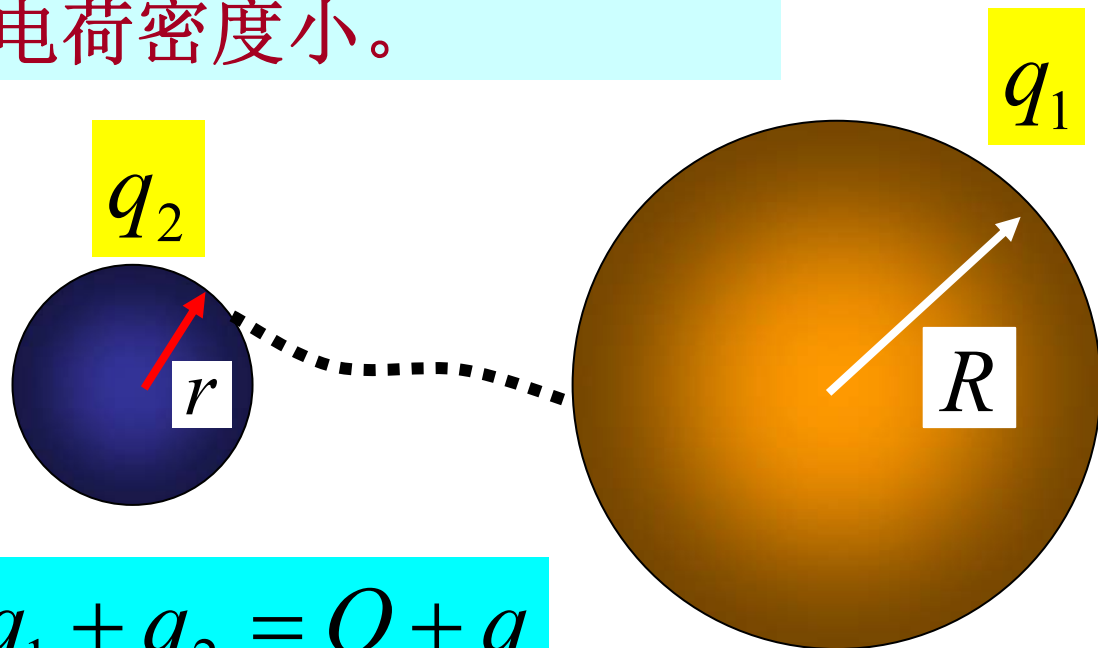
表面电场强度的大小与该表面电荷面密度成正比

作钱币形高斯面 S



导体表面曲率大的地方电荷密度大，
曲率小的地方电荷密度小。

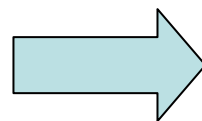
设大导体球与小导体球相距很远，现无限长细导线将它们连接起来



$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$q_1 + q_2 = Q + q$$

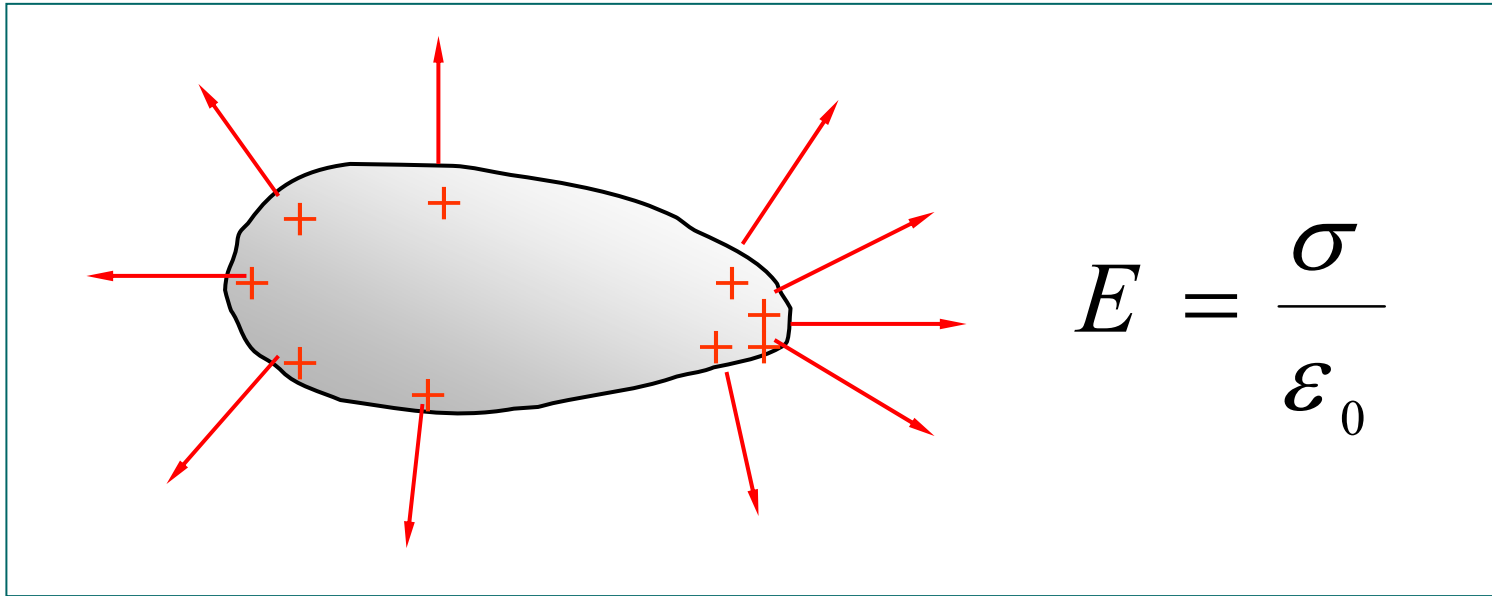
$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R^2}, \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi r^2}$$



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

导体表面电荷分布细节

$$\sigma \downarrow, E \downarrow; \quad \sigma \uparrow, E \uparrow$$



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

注意 导体表面电荷分布与导体形状以及周围环境有关.

尖端、球体 带电比较

复旦大学物理教学实验中心

尖端放电

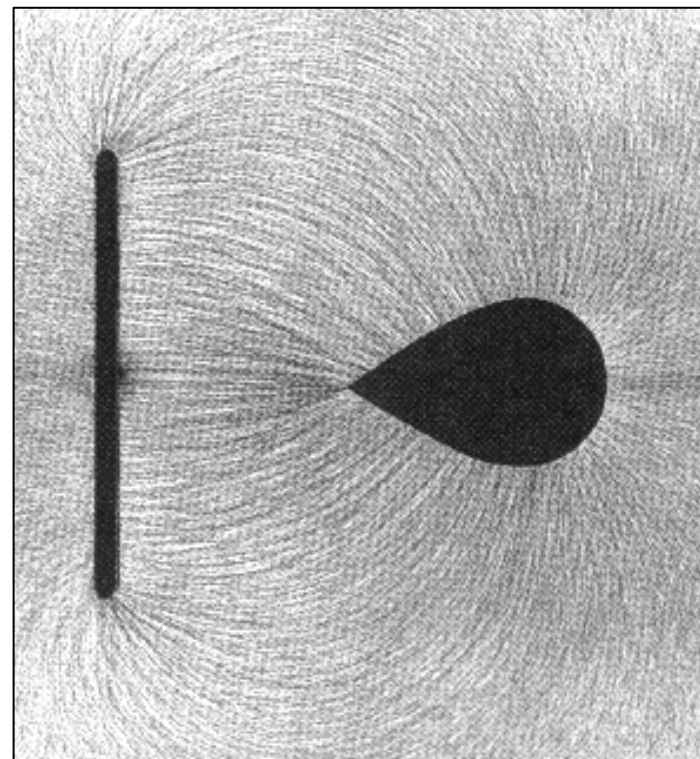
$$\sigma \uparrow E \uparrow$$

带电导体尖端附近电场最强

带电导体尖端附近的电场特别大，可使尖端附近的空气发生电离而成为导体产生放电现象，即尖端放电。

尖端放电现象的利与弊

尖端放电会损耗电能，还会干扰精密测量和对通讯产生危害。然而，尖端放电也有很广泛的应用。

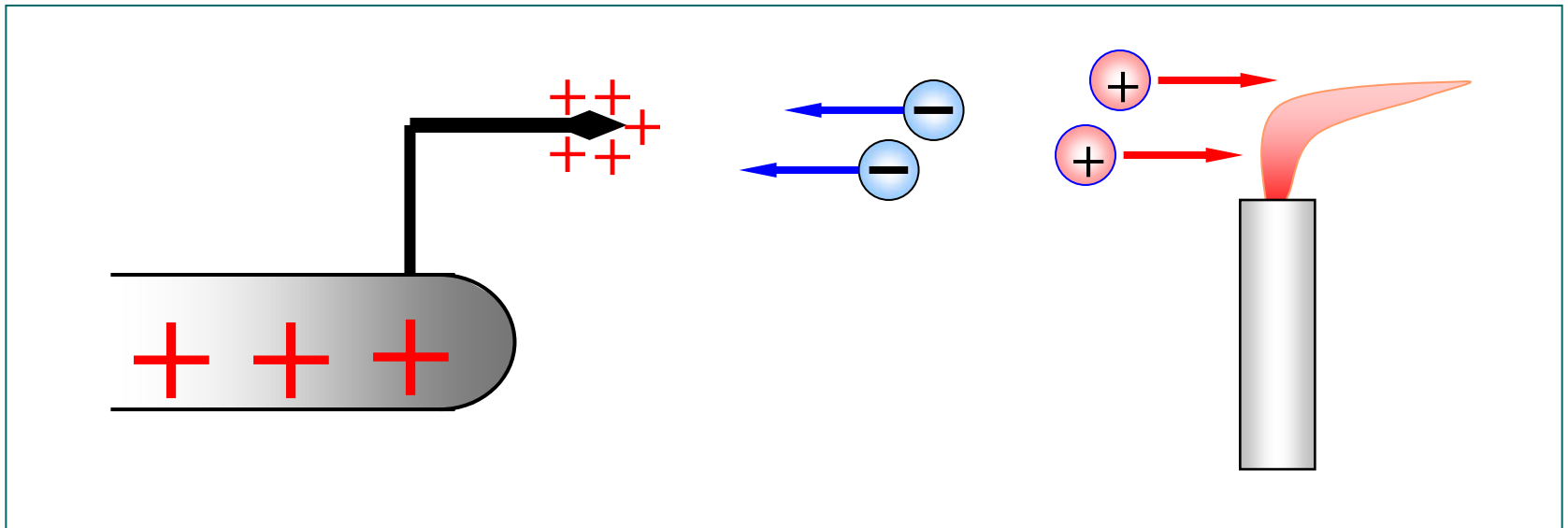


电风吹蜡

复旦大学物理教学实验中心

电风实验

尖端处电荷密度大，场强特别高，如果场强大到足以使周围空气电离,即”尖端放电”。

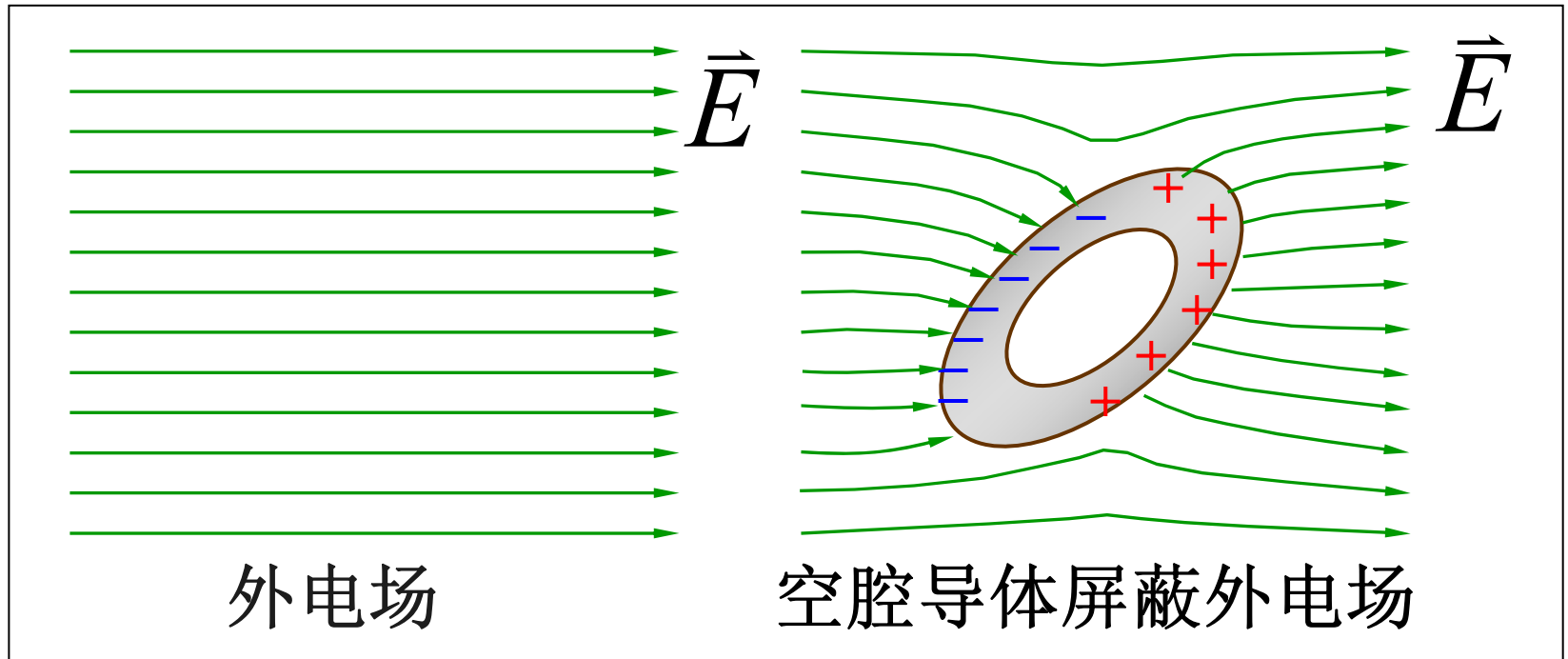


利用: e.g., 避雷针

害处: e.g., 高压设备的尖端放电会在周围产生电晕
——电晕损耗

导体空腔与静电屏蔽

1 屏蔽外电场

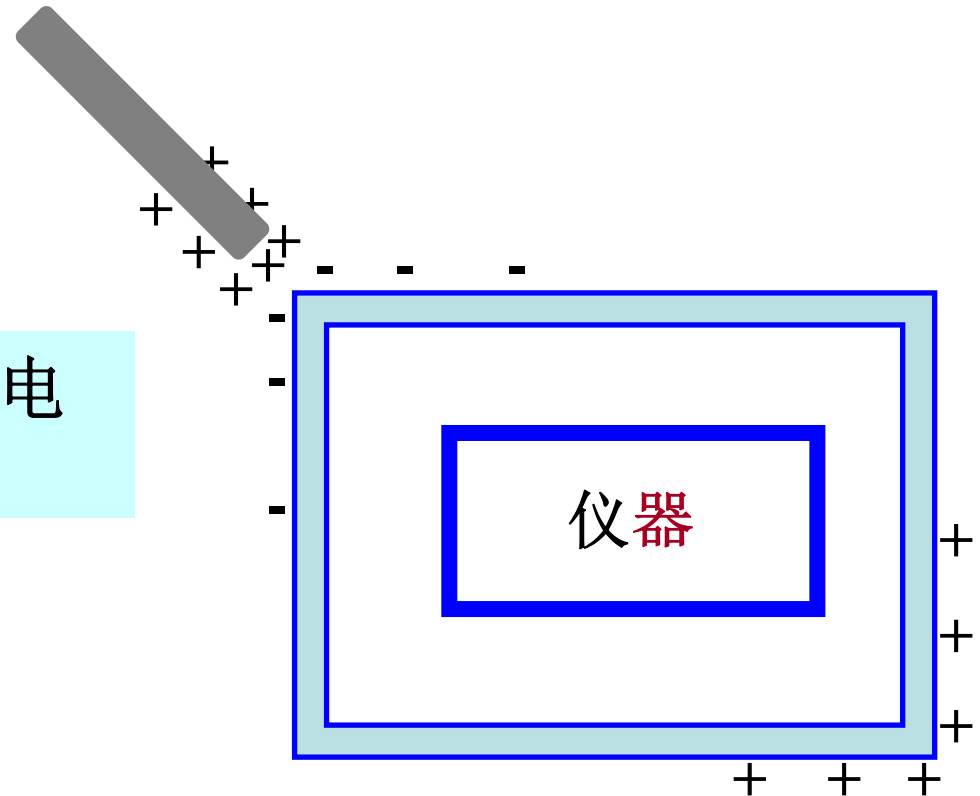


空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响. 这时，整个空腔导体和腔内的电势也必处处相等.

静电屏蔽

根据导体腔的电学性质；可以利用空腔导体对腔内、外进行静电隔离。

空腔导体起到屏蔽外电场的作用。

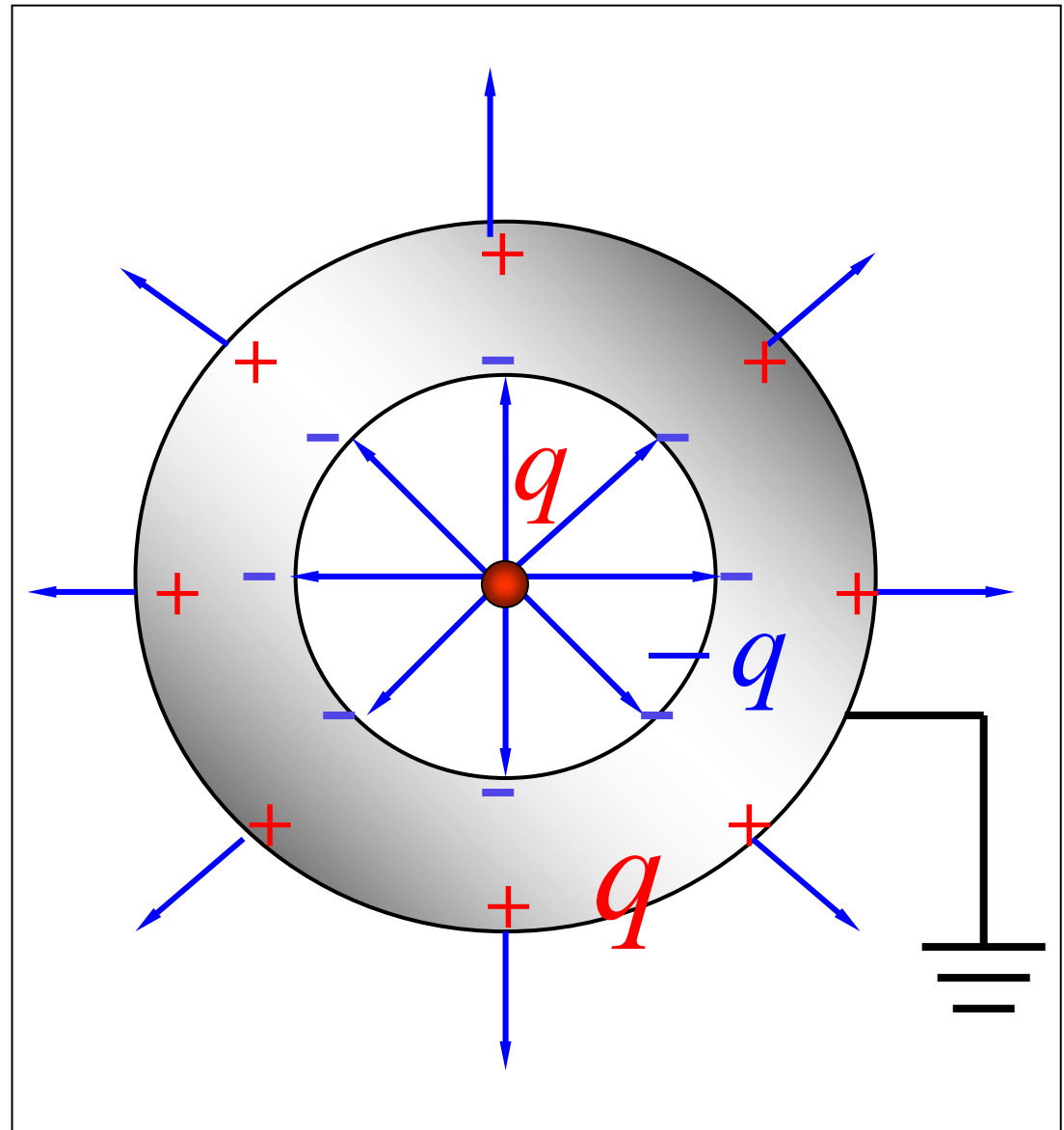


(2) 屏蔽腔内电场

接地空腔导体
将使外部空间不受
空腔内的电场影响。

接地导体电势为零

问：空间各部分
的电场强度如何
分布？

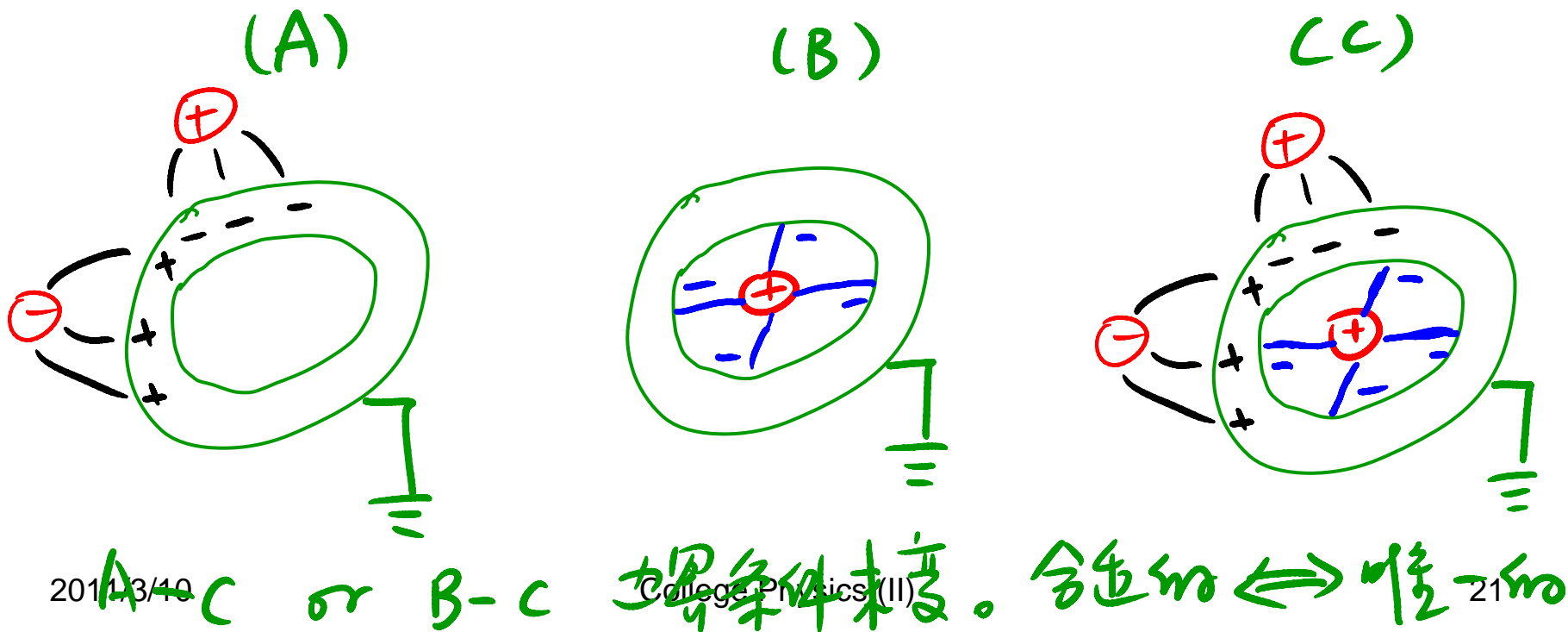


静电场边值问题的唯一性定理

“边界条件可将静电场的空间分布唯一地确定下来”

(不做证明)

它可用于解释包括静电屏蔽在内的许多静电问题



§ 2.3 电容和电容器

Capacitors & Capacitance

本节提要

- 电容器电容
- 平行板、球型、同轴柱形电容器
- 电容器的串并联

- **Capacitors** are devices that store electric charge
- Examples of where capacitors are used include:
 - radio receivers
 - filters in power supplies
 - energy-storing devices in electronic flashes
- The **capacitance**, C , of a capacitor is defined as the ratio of the magnitude of the charge on either conductor to the potential difference between the conductors
- The SI unit of capacitance is the **farad** (F)

电容和电容器

孤立导体的电容

孤立导体的电势与带电量有关；带电量相同时，不同形状和大小的孤立导体，其电势不同，但是 $V \sim Q$

定义：

$$C = \frac{Q}{V}$$

SI: 法拉, $1\text{F}=1\text{C}/\text{V}$

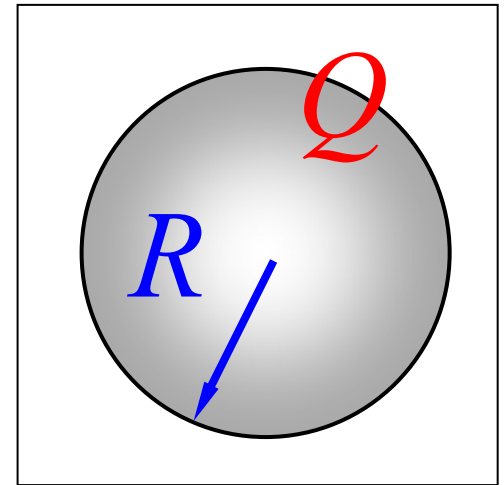
$$1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$$

电容只与导体的几何因素（及周围介质）有关，反映导体带电多少的本领——固有的容电本领

- 孤立导体的电容值受周围导体或带电体的影响，且能量不集中。解决的办法：静电屏蔽→电容器(即两个互不连接导体构成的闭合导体空腔)
- 电容的大小仅与导体的**形状**、**相对位置**、其间的**电介质**有关。与所带电荷量**无关**。
- 电容器是储能元件。

例如 孤立的导体球的电容

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}} = 4\pi \epsilon_0 R$$



◆ 地球 $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $C_E \approx 7 \times 10^{-4} \text{ F}$

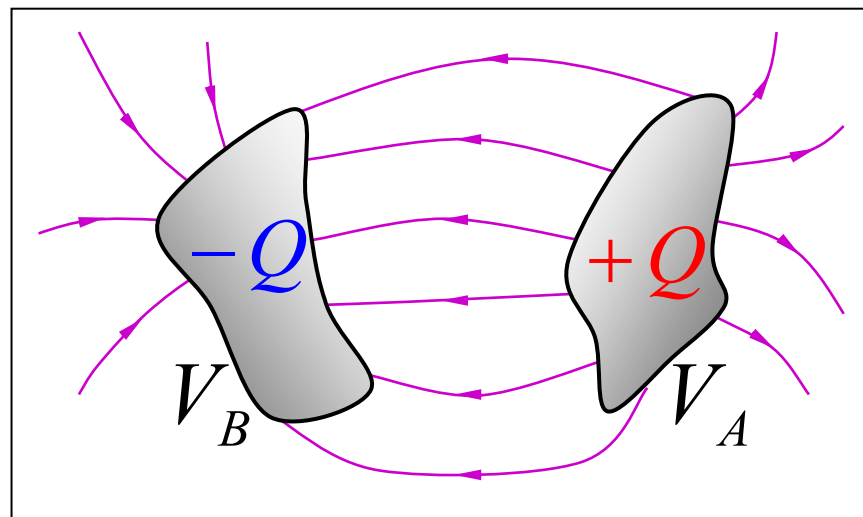
电容与电容器

电容器: 两个带有等量异号的导体组成的系统。

电容器**电容**是使其两极板之间具有单位电势差所需的电量。

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$

$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



SI: 法拉 $1\text{F}=1\text{C}/\text{V}$

$$1\text{F} = 10^6 \mu\text{F} = 10^{12} \text{pF}$$

电容器的电容与其带电状态无关;

(容器的盛水能力与容器盛多少水无关)

与周围的带电体无关;

完全有电容器的几何结构决定。(大小, 形状, 介质填充情况)

平板电容器电容的计算

Steps:

设两极板分别带电 $\pm Q$; 求 $E \rightarrow$ 求 $U \rightarrow$ 求 C

(1) 设两导体板分别带电 $\pm Q$

(2) 两带电平板间的电场强度

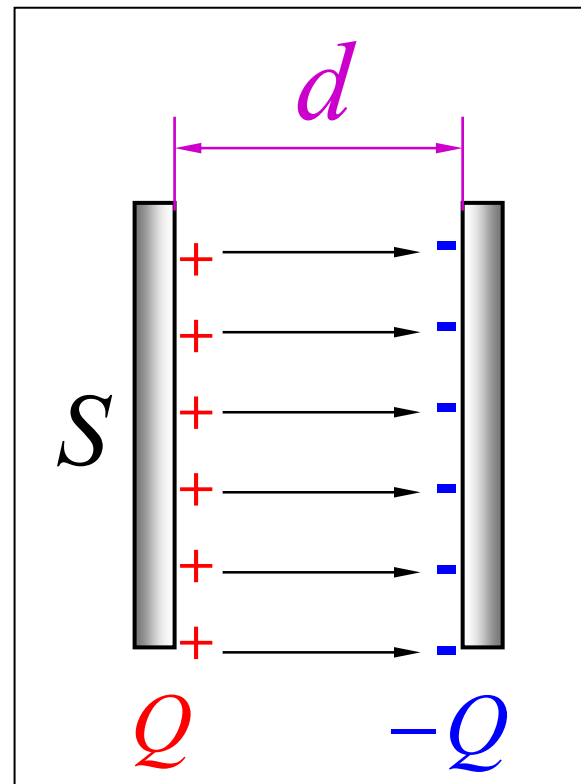
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

(3) 两带电平板间的电势差

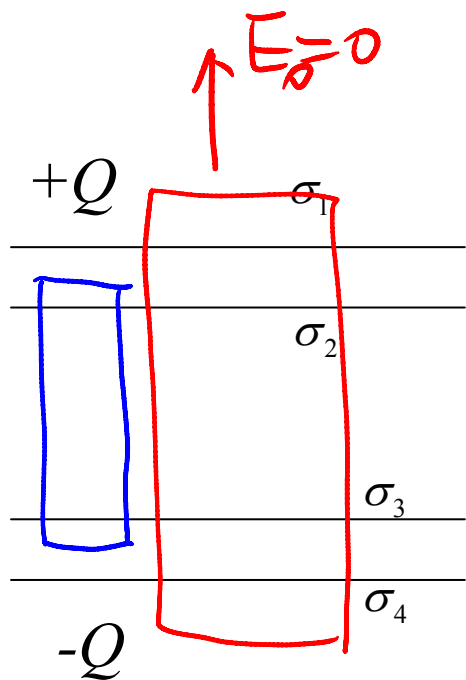
$$U = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

(4) 平板电容器电容

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$



补充证明外表面不带电



因为静电平衡后导体内场强为零：

$$\sum Q_i = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

导体内部

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

$$E_{in} = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$$

电荷守恒 $\Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = Q/S$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_4 &= 0 \\ \sigma_2 + \sigma_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow \sigma_1 = \sigma_4$$



$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_4 &= 0, \\ \sigma_2 = -\sigma_3 &= Q/S \end{aligned}$$

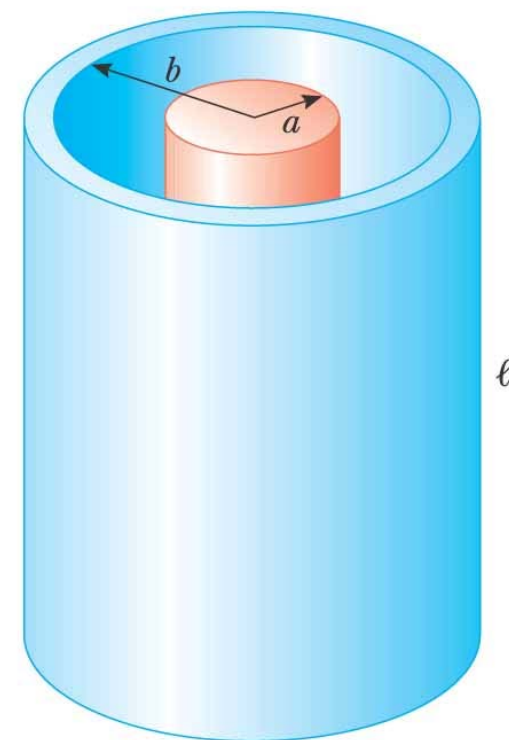
圆柱形电容器

例 求圆柱形电容器的电容。

解： 设单位长度带电荷 λ

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$



(a)

$$C = \frac{q}{V_A - V_B} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}$$

球形电容器

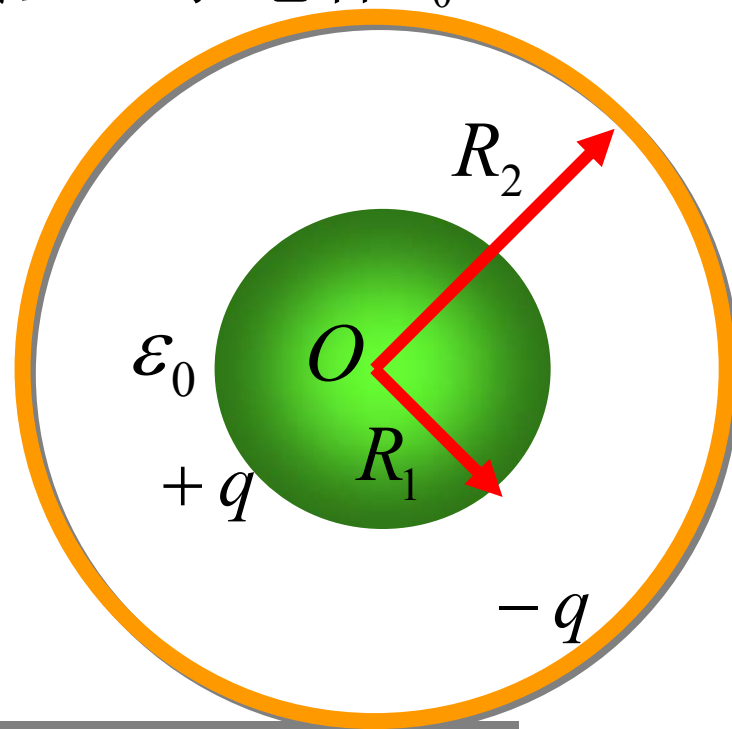
例 两半径分别为 R_1 和 R_2 的同心金属球壳组成球形电容器，两球壳间为真空。求电容 C_0 。

解： 设内外球面分别带 $+q$ 和 $-q$ 电量，由高斯定理得两极板间场强方向沿径向，大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

两极板间电势差为

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



由定义得

$$C_0 = \frac{q}{U_{12}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

若 $R_2 - R_1 = d$, 且 $d \ll R_1$ 时, 则

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

与平板电容器的电容相同。

分布电容——两导体所带电荷绝对值不相等

分布电容

例 两半径为 R 的平行长直导线中心间距为 d ，且 $d \gg R$ ，求单位长度的电容。

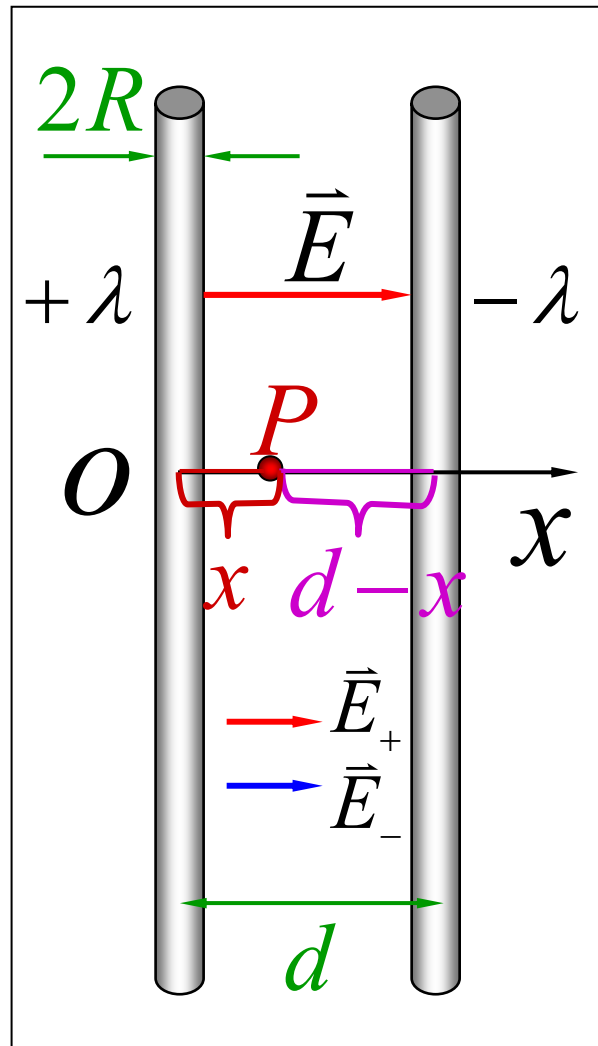
解 设两金属线的电荷线密度为 $\pm \lambda$

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 (d-x)}$$

$$U = \int_R^{d-R} E dx = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx$$

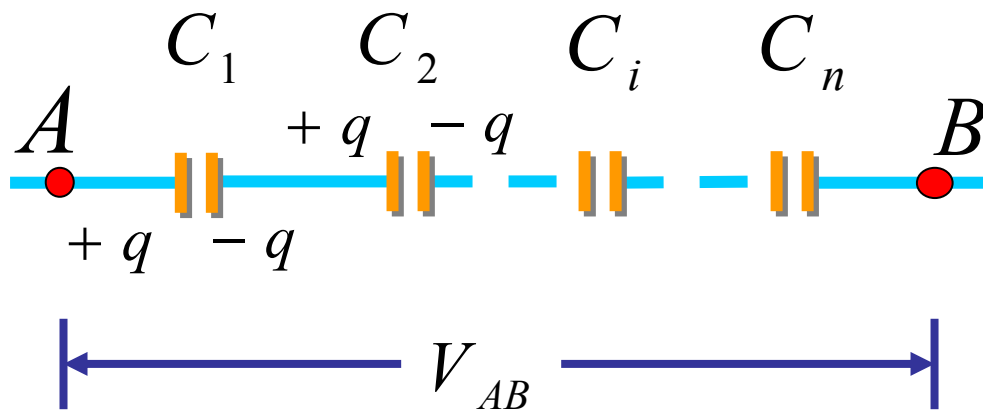
$$= \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \ln \frac{d}{R}$$

单位长度的电容 $C = \frac{\lambda}{U} = \pi \varepsilon_0 / \ln \frac{d}{R}$



电容器的串并联

串联



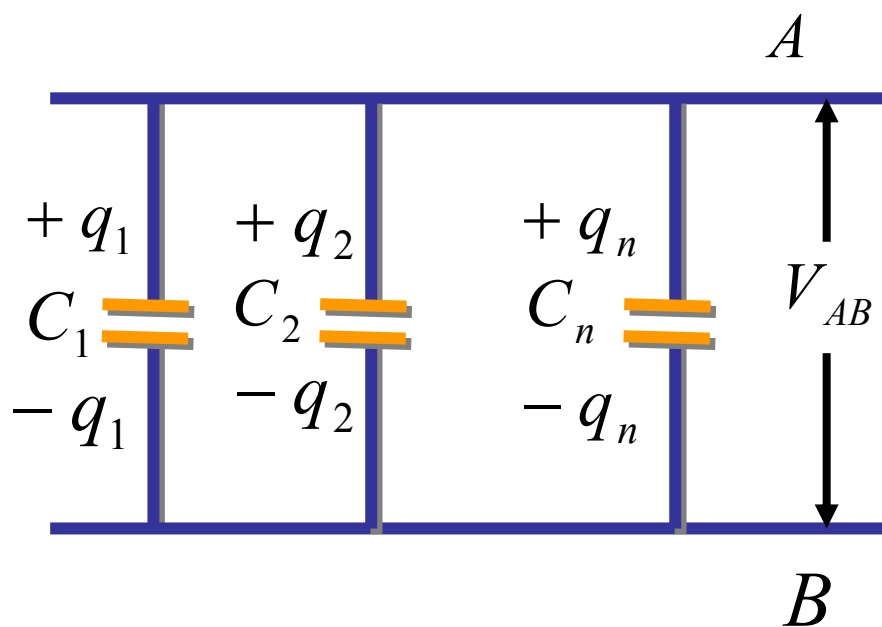
$$q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \dots = C_N U_N$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_N = \sum_i U_i = q \sum_i \frac{1}{C_i}$$

$$C = \frac{q}{U} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right)^{-1} \quad \text{或} \quad \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

串联电路总电容量减少，电容组耐压值增大。
但如其中一个被击穿，其余电容器会相继被击穿。

并联



$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_N = C_1 U + C_2 U + \dots + C_N U$$

$$= (C_1 + C_2 + \dots + C_N) U$$

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_i C_i$$

并联电路总电容量增大，电容组耐压值不变。

电容器电容的计算。方法有二：

电容器电容的定义法：

$$C = \frac{q}{V_A - V_B}$$

串联

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

并联

$$C = \sum_i C_i$$

Q.1 在平行板电容器中间插入一金属板

有一个由两块相距为 d 的平行金属板组成的电容器，它上部金属板的电荷面密度为 $+\sigma$ ，底部的为 $-\sigma$ 。一块厚度为 l ($l < d$) 的金属板插入到两电板之间，且不和任意电板接触。在插入金属板后，两电板之间的电势：

1. 增加；
2. 减少；
3. 不变。

jweil

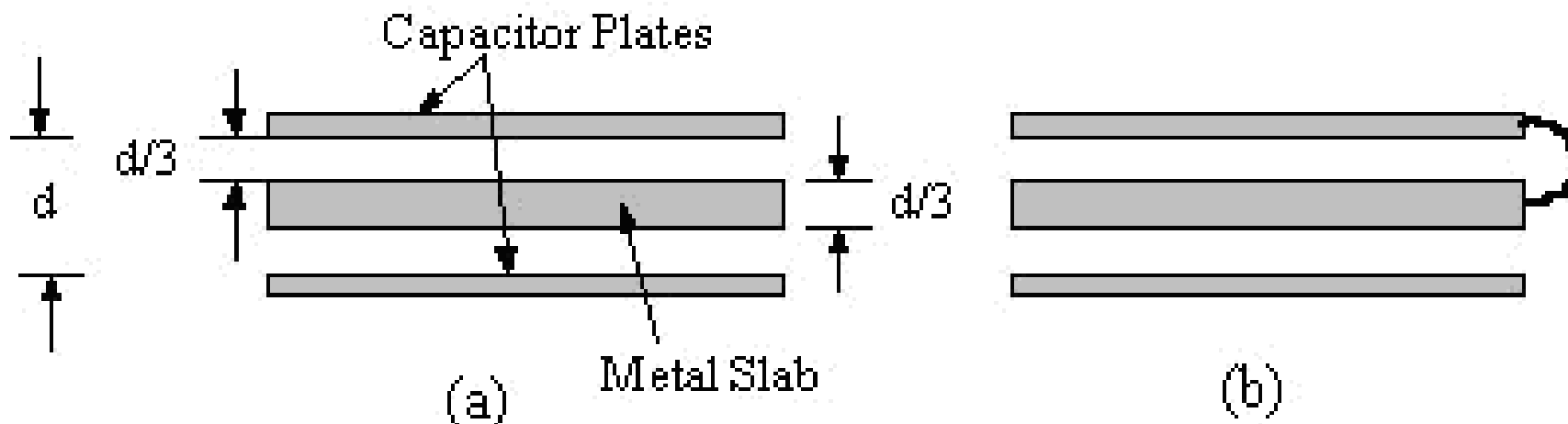
答案: 2。因为金属板的上表面带负电荷而下表面带正电荷, 它们和电板相互吸引。如果我们要拔出金属板的话就必须对系统做功。因此, 当插入金属板后系统电势能降低且两极板之间的电势差减小。

weijia, 2008/2/27

Q.2 平行板电容器连接金属板前后电容的比较

有两个电容，它们平板之间的距离都是 d 。在每个电容之间插入一厚度为 $d/3$ 的金属板。在例a中，金属板没连到任一电板；在例b中，金属板连接到上电板。那么哪个电容更大的？

1. a; 2. b; 3. 相同。



jwei2

答案: 2。例a等效于两个间距为 $d/3$ 电容器串联。根据电容量与两电板之间的距离成反比原理, 我们发现例b中的电容量更大。
weijia, 2008/2/28

§ 2.4 电介质的极化

本节提要

- 介质的极化
- 电极化强度和极化电荷密度
- 电位移矢量 有介质时的高斯定理

§ 2.4.1 介质的极化

原子中的电子被原子核束缚的很紧，不能自由移动。介质内部没有可以自由移动的电荷。

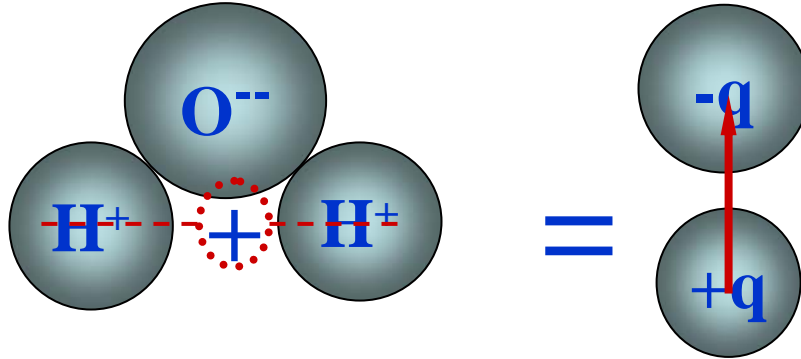
在外电场中，物质分子中的正负电荷可以在分子线度范围内移动——产生极化现象。

极化的微观机制——电介质分子的电偶极子模型

若将分子中的全部正、负电荷用等效的正、负点电荷（称为正、负电荷的等效中心或“重心”）代替，则可将电介质的分子看作是等量异号电荷构成的电偶极子（称为分子等效电偶极子）。

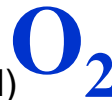
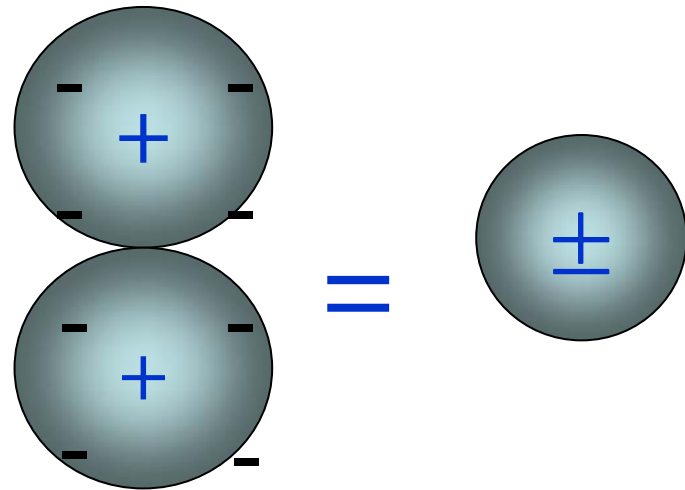
电介质的分类

1. 有极分子： 无外场时，分子等效正、负电荷中心不重合
→分子固有电偶极矩。（水、有机玻璃等）



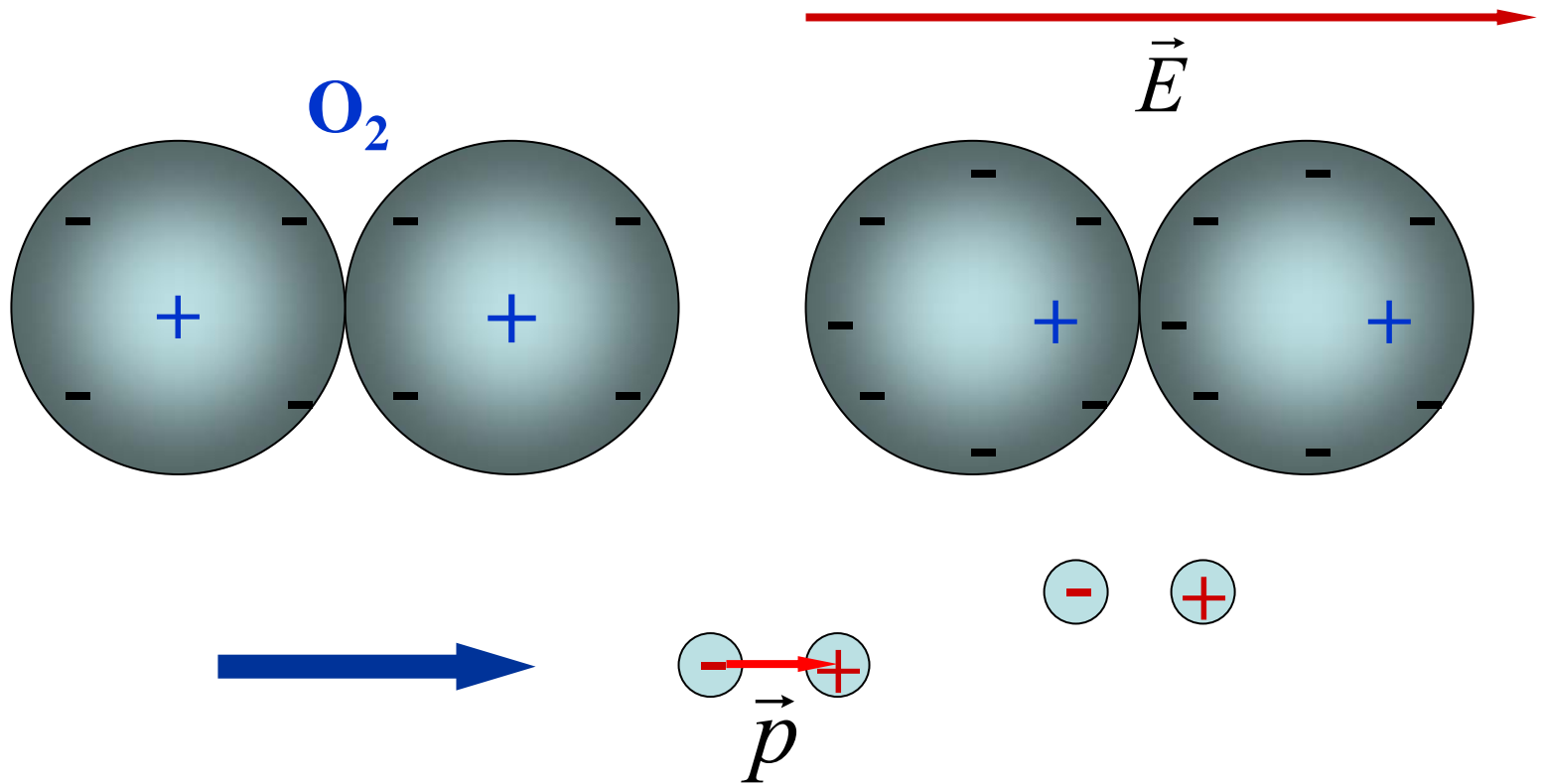
2. 无极分子：

无外场时，分子等效正、负电荷中心重合
→无分子固有电偶极矩。（氢、甲烷、石蜡等）



电介质的极化

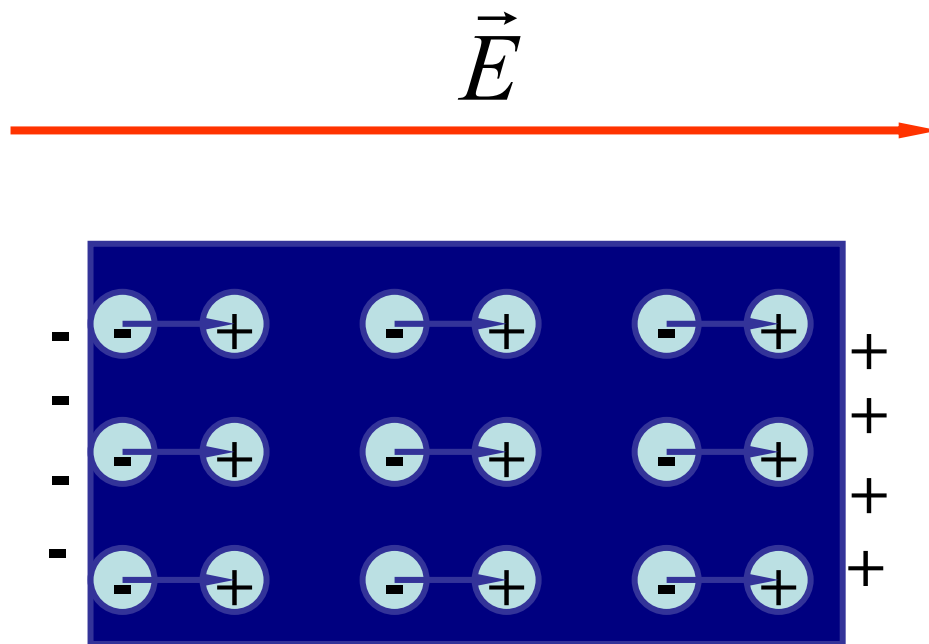
1. 无极分子的位移极化



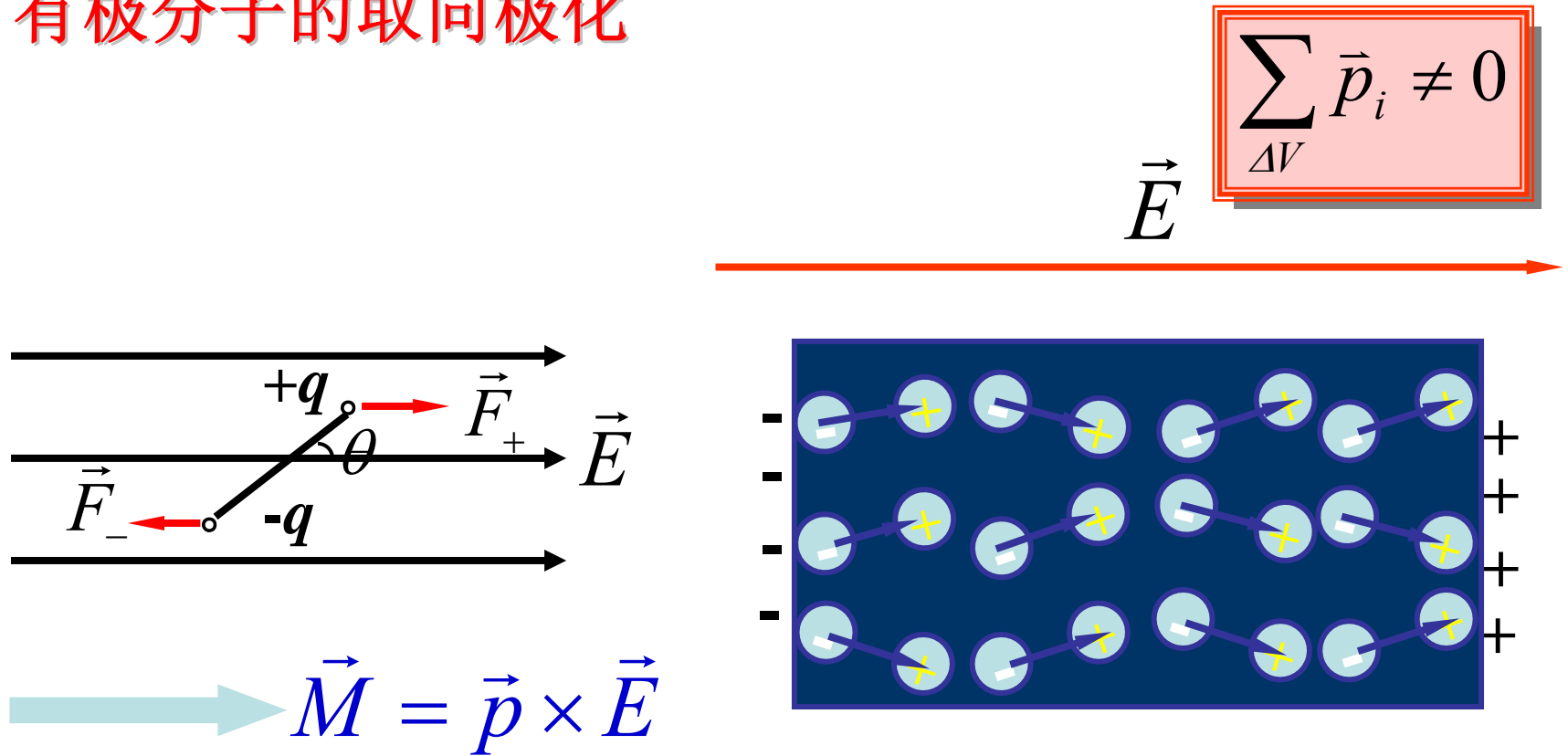
在外电场的作用下，电介质响应外电场而在介质表面出现电荷积累的现象称为**电介质的极化**。

与金属中的可以自由移动的电荷（自由电子）相对，极化现象中介质表面产生的电荷称为**束缚电荷**，或称**极化电荷**。

无极分子在外场的作用下正、负电荷中心发生偏移而产生的极化现象称为**位移极化**，或称**感应极化**。



2. 有极分子的取向极化



有极分子在外电场的作用下，电偶极矩发生偏转而产生的极化现象称为**转向极化**。

固有电偶极矩: 无外场下电介质分子所具有的电偶极矩。

在外电场中产生**感应电偶极矩**（约是前者的 10^{-5} ）。

位移极化和转向极化微观机制不同，宏观效果相同。

无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向。

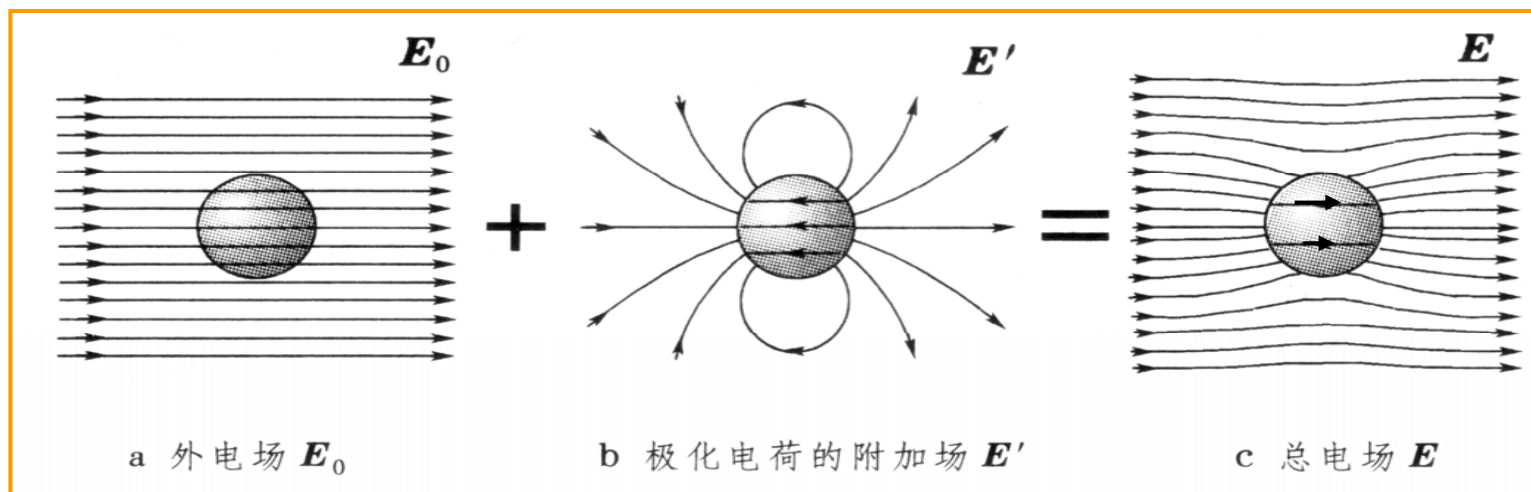
有极分子有上述两种极化机制。在高频下只有位移极化。

统一描述

$$\left\{ \sum_i \vec{p}_i \neq 0 \right.$$

出现束缚电荷(面电荷、体电荷)

例：均匀介质球在均匀外场中的极化



极化电荷附加电场：非均匀场，在介质球内与外场反向。

总电场：在介质球外可能与外场同向或反向。

在介质球内削弱外场。

金属导体和电介质比较

	金属导体	电介质（绝缘体）
特征	有大量的自由电子	基本无自由电子，正负电荷只能在分子范围内相对运动
模型	“电子气”	电偶极子
与电场的相互作用	静电感应	无极分子电介质：位移极化 有极分子电介质：转向极化
宏观效果	静电平衡 导体内 $\vec{E} = 0, \rho = 0$ 导体表面 $\vec{E} \perp$ 表面 感应电荷 $\sigma = \epsilon_0 E$	内部：分子偶极矩矢量和不为零 $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ 出现束缚电荷（极化电荷）

作业:

(Due date: Mar. 15)



2.2, 2.4, 2.6, 2.10

静电场边值问题的唯一性定理

“边界条件可将静电场的空间分布唯一地确定下来”

(不做证明)

它可用于解释包括静电屏蔽在内的许多静电问题