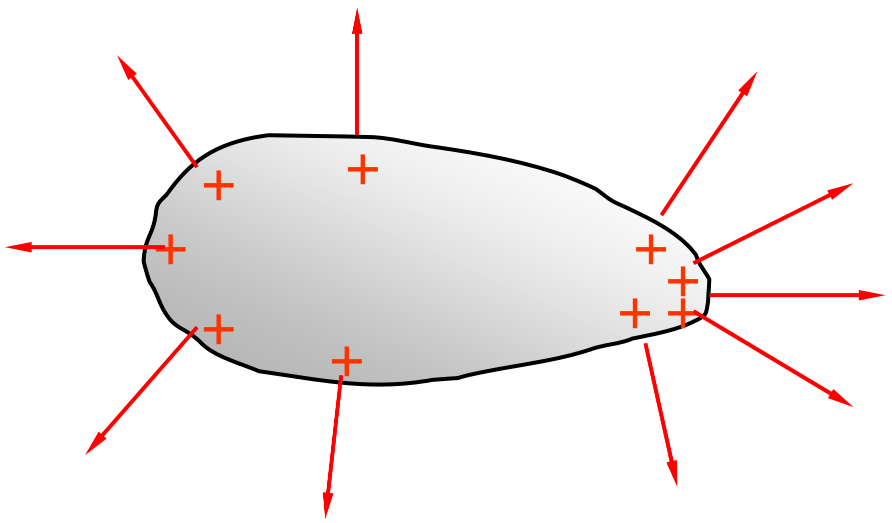
Review Section

温故知新

导体表面电荷分布细节

表面曲率大的地方电荷密度大，曲率小的地方电荷密度小。

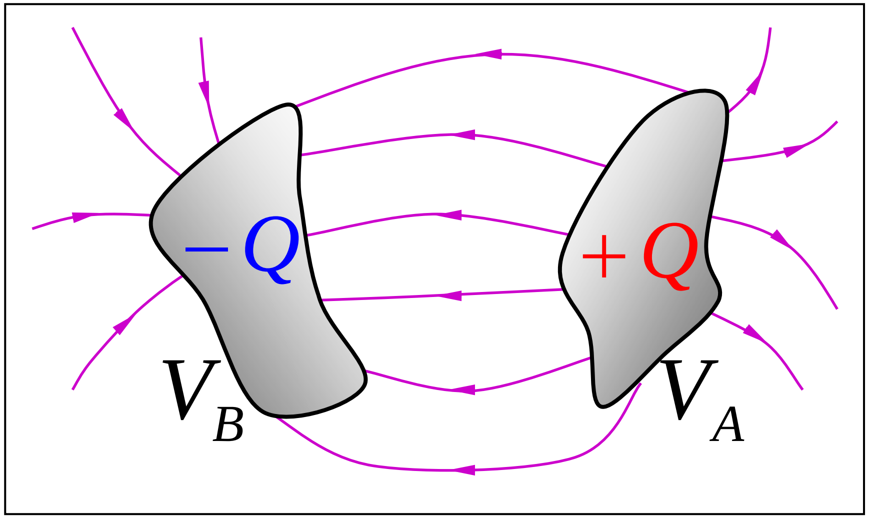
$$\sigma\downarrow, E\downarrow;\quad \sigma\uparrow E\uparrow$$



$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Application: 尖端放电　静电屏蔽

电容 电容器



$$U_{AB} = \int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$

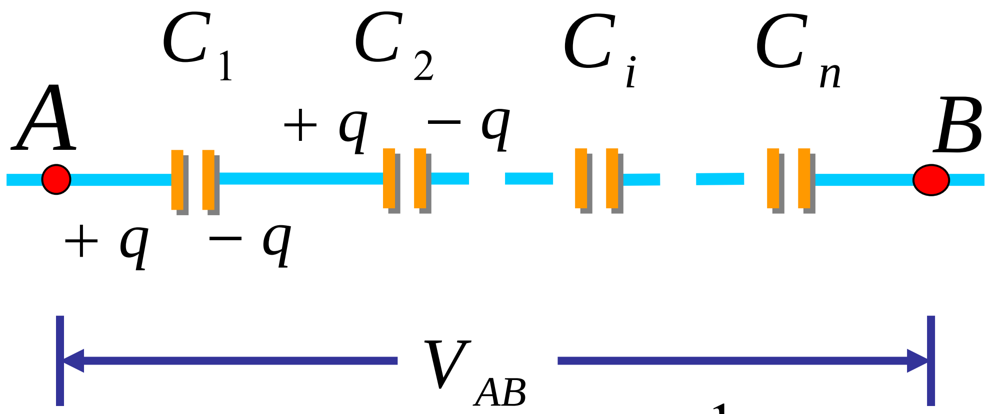
电容器的电容与其带电状态无关；完全有电容器的几何结构决定。(大小，形状，介质填充情况)

电容器电容的计算

Steps: 设两极板分别带电 $\pm Q$；求E→求U→求C

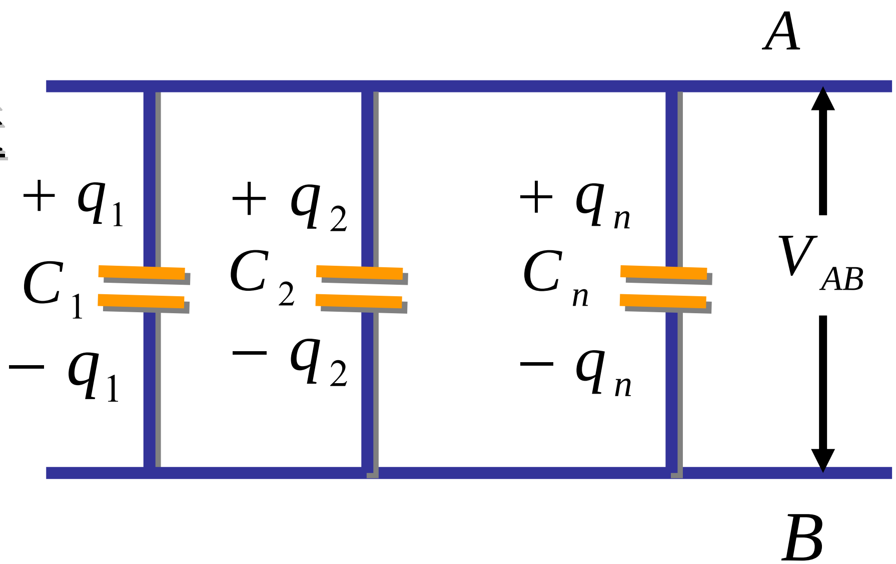
电容器的串联接

串联



$$C = \frac{q}{U} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \quad \text{或} \quad \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

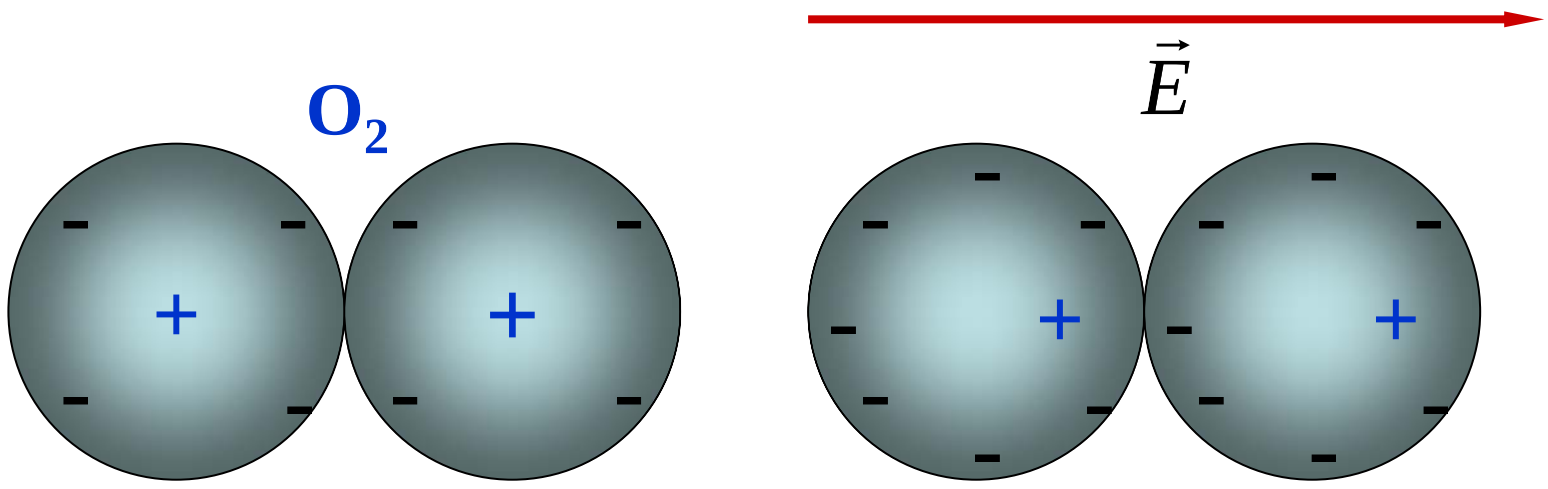
并联



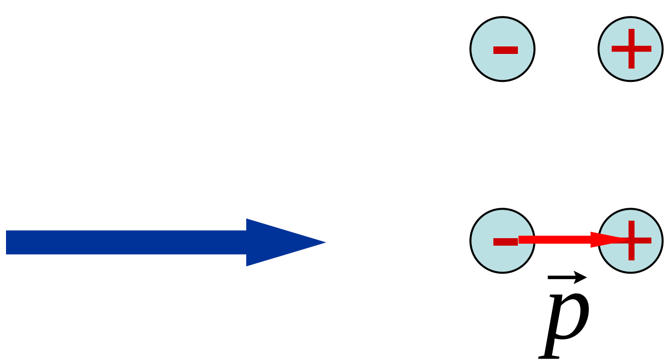
$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N = \sum_i C_i$$

电介质的极化

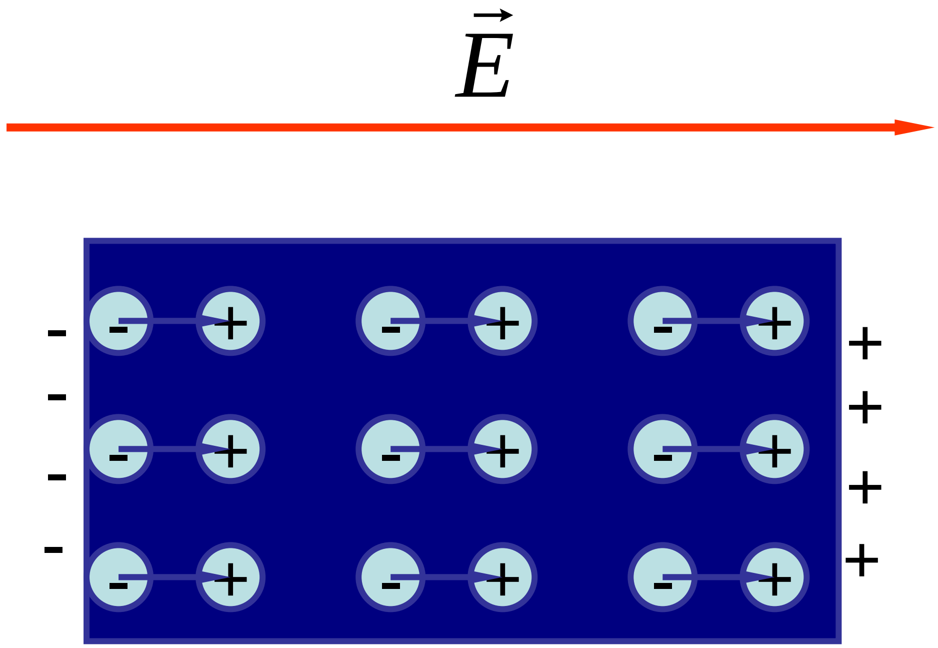
1. 无极分子的位移极化



无外场时，分子等效正、负电荷中心重合→无分子固有电偶极矩。



在外电场的作用下，电介质响应外电场而在介质表面出现电荷积累的现象称为电介质的极化。



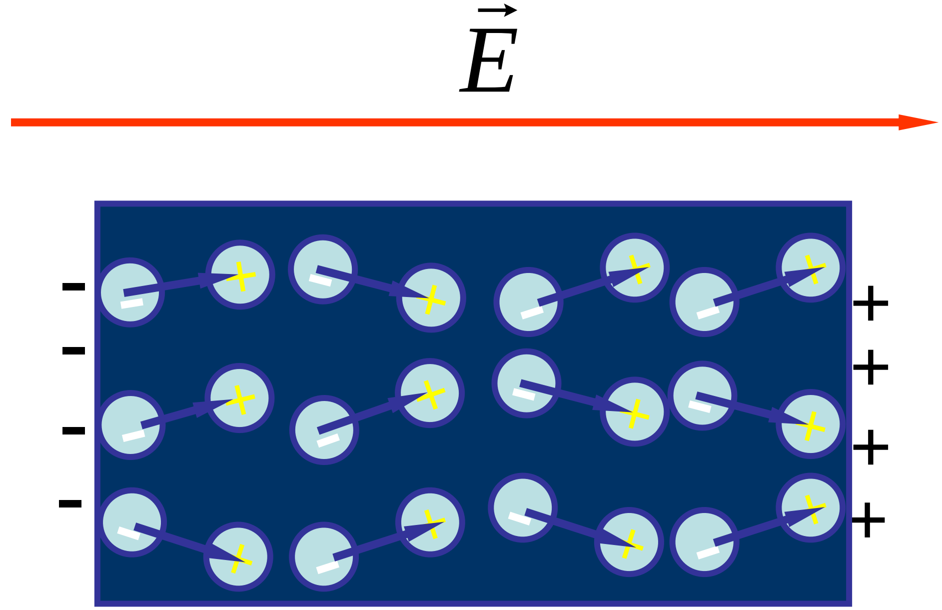
与金属中的可以自由移动的电荷（自由电子）相对，极化现象中介质表面产生的电荷称为束缚电荷，或称极化电荷。

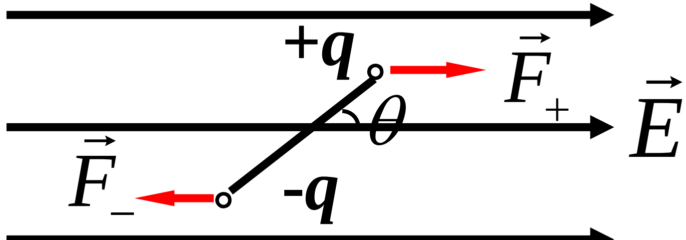
无极分子在外场的作用下正、负电荷中心发生偏移而产生的极化现象称为位移极化，或称感应极化。

2. 有极分子的取向极化

无外场时，分子等效正、负电荷中心不重合→分子固有电偶极矩。

$$\sum_{\Delta V} \vec{p}_i \neq 0$$





$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

有极分子在外电场的作用下，电偶极矩发生偏转而产生的极化现象称为**转向极化**。

固有电偶极矩:无外场下电介质分子所具有的电偶极矩。

在外电场中产生感应电偶极矩（约是前者的10^{-5}）。

位移极化和转（取）向极化微观机制不同，宏观效果相同。

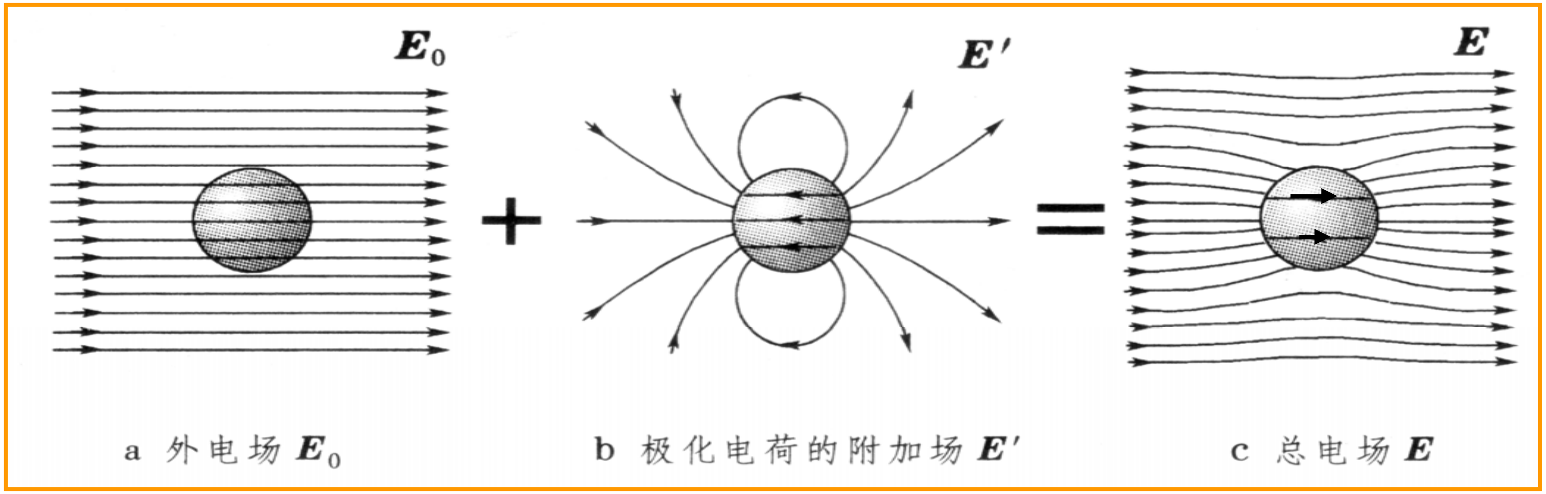
无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向。

有极分子有上述两种极化机制。在高频下只有位移极化。

统一描述

$$\begin{cases} \sum_i \vec{p}_i \neq 0 \\ \text{出现束缚电荷(面电荷、体电荷)} \end{cases}$$

例：均匀介质球在均匀外场中的极化



极化电荷附加电场：非均匀场，在介质球内与外场反向。

总电场：在介质球外可能与外场同向或反向。

在介质球内削弱外场。

金属导体和电介质比较

	金属导体	电介质（绝缘体）
特征	有大量的 自由电子	基本无自由电子，正负电荷只能在分子范围内相对运动
模型	“电子气”	电偶极子
与电场的相互作用	静电感应	无极分子电介质：位移极化 有极分子电介质：转向极化
宏观效果	静电平衡 导体内 $\vec{E}=0, \rho=0$ 导体表面 $\vec{E}\perp$表面 感应电荷 $\sigma=\varepsilon_0 E$	内部：分子偶极矩矢量和不为零 $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ 出现束缚电荷（极化电荷）

§2.4　电介质的极化

本节提要

- 介质的极化
- 电极化强度和极化电荷密度
- 电位移矢量　有介质时的高斯定理

§ 2.4.2　电极化强度和极化电荷密度

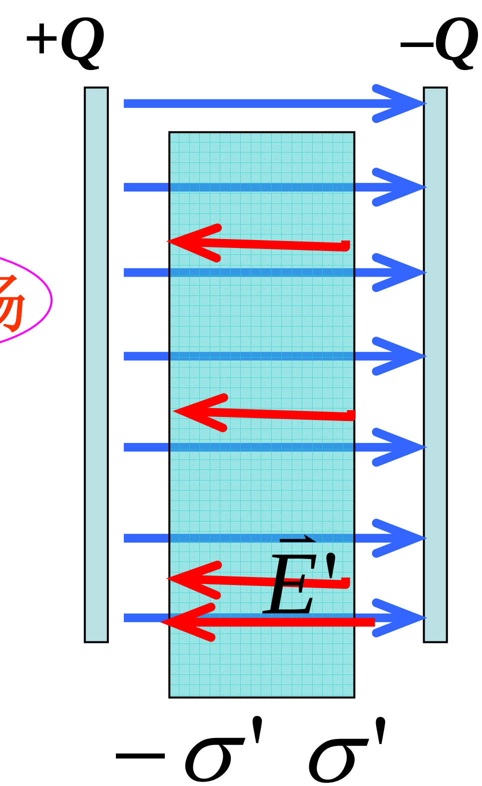
1）从分子偶极矩角度

单位体积内分子偶极矩矢量和——极化强度. $\vec{P}=\dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$

设　分子数密度：n

极化后每个分子的偶极矩：$q_1\vec{L}$

$$\left.\begin{array}{l} n \\ q_1\vec{L} \end{array}\right\} \vec{P}=nq_1\vec{L}$$



实验规律：

$$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$\vec{P}$：空间矢量函数

χ：介质极化率

$\vec{E}$：总场 $\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$

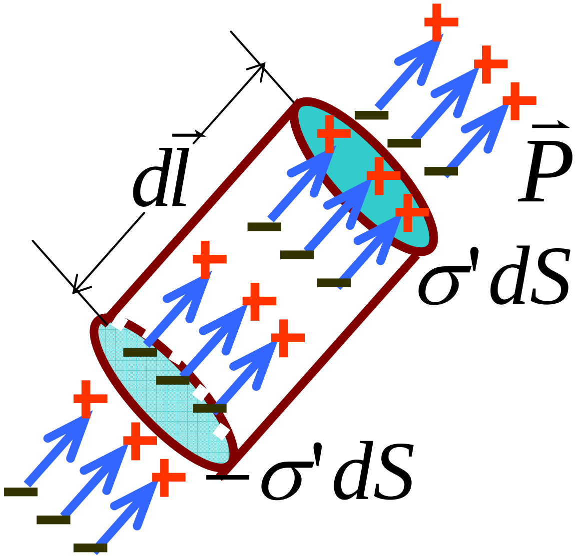
$\vec{E}'$：退极化场

χ：由介质的性质决定，与E无关。
在各向同性均匀介质中为常数。

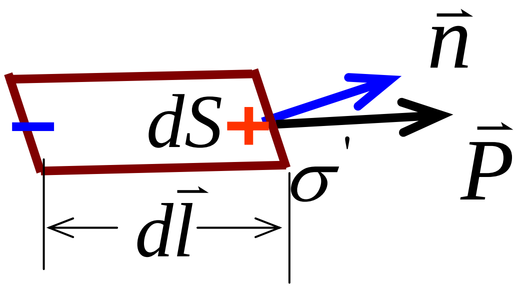
极化（束缚）电荷与极化强度的关系：

可证明对于均匀的电介质，极化电荷集中在它的表面。电介质产生的一切宏观效果都是通过未抵消的束缚电荷来体现。

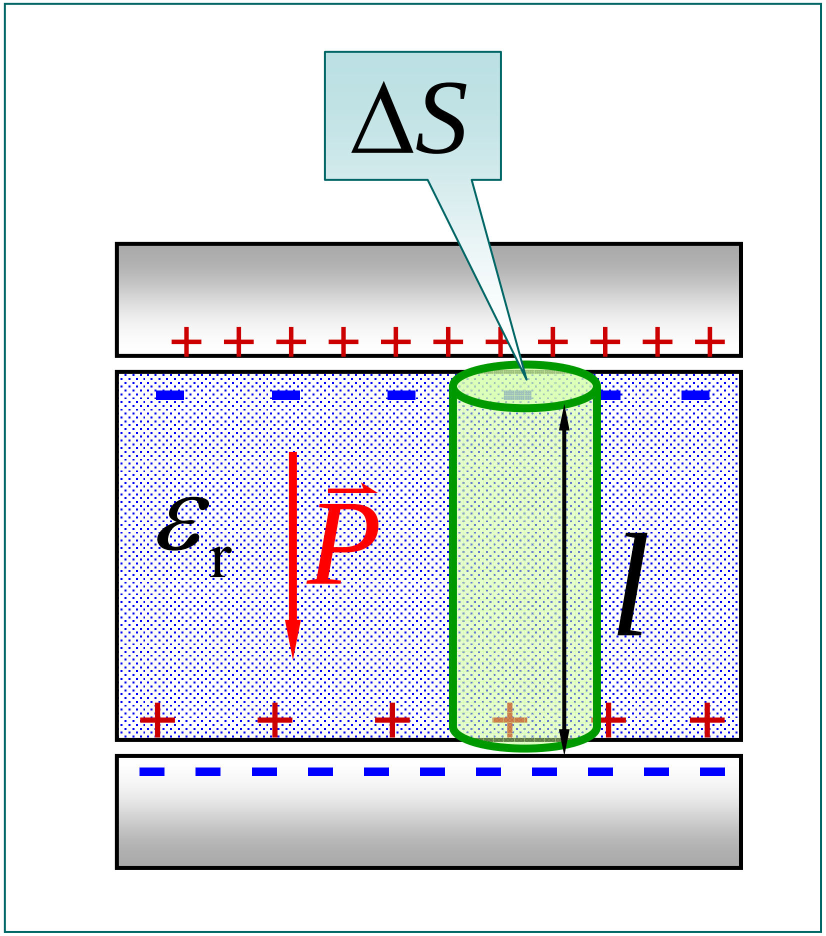
沿着此曲线取一长度为dl在其内部极化可视为是均匀的。垂直于此曲线的横截面dS组成一个小圆柱体，因而该体元具有电偶极矩 $\vec{P}dl \cdot dS$ ，根据定义它可视为两端具有$\pm\sigma' dS$电荷的偶极矩



$$P \cdot dSdl = \sigma' dSdl$$



$$\sigma' = |P|\cos\theta = P \cdot e_n$$



$$P = \frac{\sum p}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S l}{\Delta S l} = \sigma'$$

表面极化电荷面密度

$$\boxed{\sigma' = P_n}$$

几种电介质

线性各向同性电介质， χ_e是常量。

铁电体 ***ferroelectrics*** $\vec{P}$和 $\vec{E}$是非线性关系；并具有电滞性（类似于磁滞性），如酒石酸钾钠 、$BaTiO_3$ 。

永电体或驻极体，它们的极化强度并不随外场的撤除而消失，与永磁体的性质类似，如石腊。

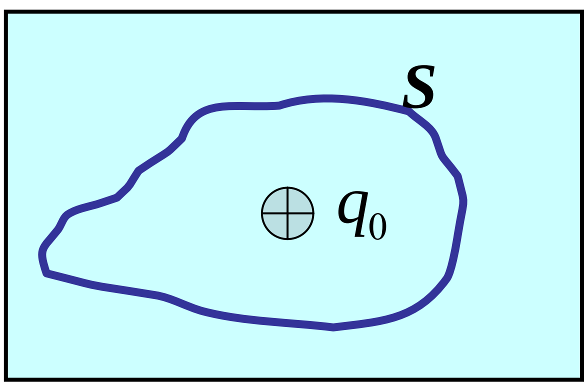
压电体**piezoelectrics** 有压电效应、电致伸缩 ***electrostriction***。

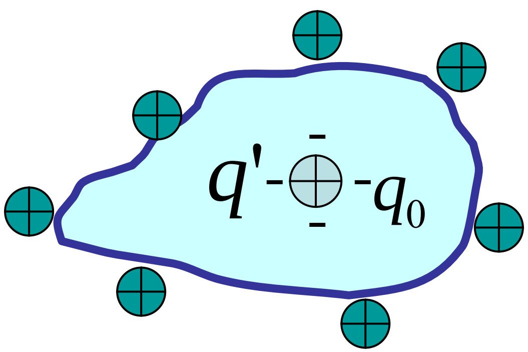
闭合曲面内的极化电荷

在已极化的介质内任意作一闭合面*S*（如图所示）

S 将把位于 *S* 附近的电介质分子分为两部分：
一部分在 *S* 内，一部分在 *S* 外。

电偶极矩穿过*S* 的分子对*S*内的极化电荷有贡献





1. 小面元 dS 对面 S 内极化电荷的贡献

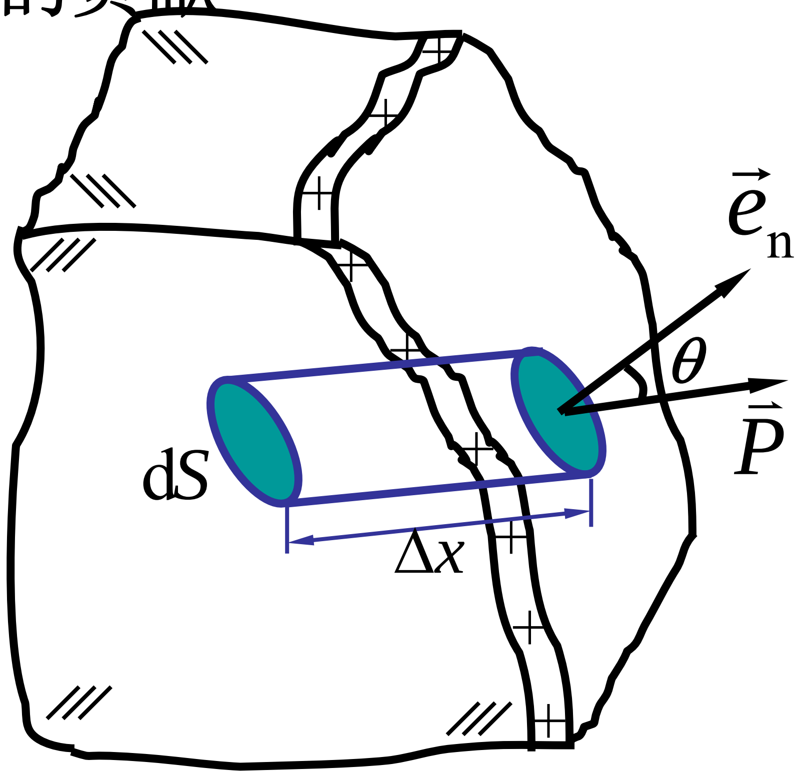
$$|\mathrm{d}q'| = |\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}|$$

•当 $\theta < \pi/2$，负电荷在面内

$$\mathrm{d}q' < 0 \qquad \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} > 0$$

•当 $\theta > \pi/2$，正电荷在面内

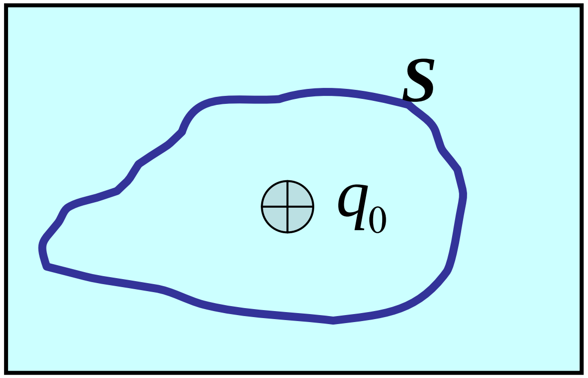
$$\mathrm{d}q' > 0 \qquad \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} < 0$$

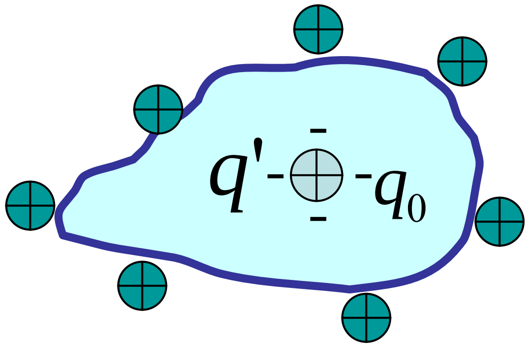


➢小面元 dS 对面内极化电荷的贡献:

$$\boxed{\mathrm{d}q' = -\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

2. 在 S 所围的体积内的极化电荷





$$\sum_{S内} q' = -\oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

任何闭合曲面上 $\vec{P}$ 的通量等于该闭合曲面

包围的极化电荷总量的负值。

$$\boxed{\mathrm{d}q' = -\vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

由 $$\sum_{S内} q' = -\oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

利用数学(矢量分析)中任意矢量场A的高斯定理:

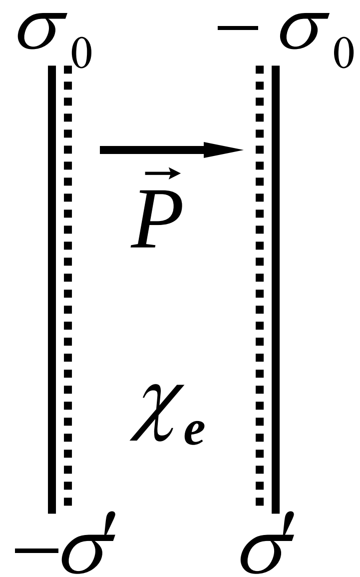
$$\oiint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$$

得 $$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho'$$

极化强度矢量P经任意闭合曲面S的通量等于闭合曲面内极化电荷总量的负值，或极化强度矢量的散度等于极化电荷体密度的负值。

以平行板电容器为例讨论空间总的静电场
（即P. 73 例3）

平行板电容器　自由电荷面密度为σ_0。



介质均匀极化，表面出现束缚电荷$\pm\sigma'$。

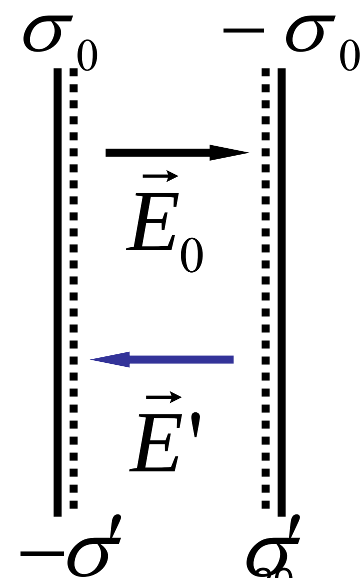
$$\sigma' = P_n$$

$$= \chi_e \varepsilon_0 E$$

E'—退极化场

内部的场由自由电荷和束缚电荷共同产生

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



•自由电荷 $\pm\sigma_0$ $\Rightarrow$ $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$

•束缚电荷 $\pm\sigma'$ $\Rightarrow$ $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \chi_e E$

$$E = E_0 - E' = E_0 - \chi_e E$$

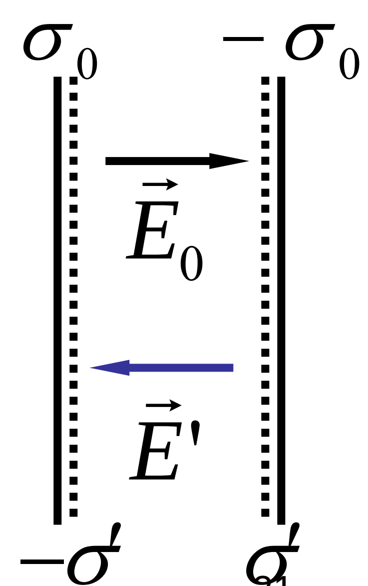
$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{(1+\chi_e)} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

相对介电常数

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon}$$

介电常数

$$\Rightarrow \sigma' = \frac{\chi_e}{1+\chi_e}\sigma_0 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0$$



* 电介质对电容的影响 相对电容率

• 电容器无介质时，自由电荷Q_0 $\Rightarrow E_0 \Rightarrow \Delta U_0 \longrightarrow C_0 = \dfrac{Q_0}{\Delta U_0}$

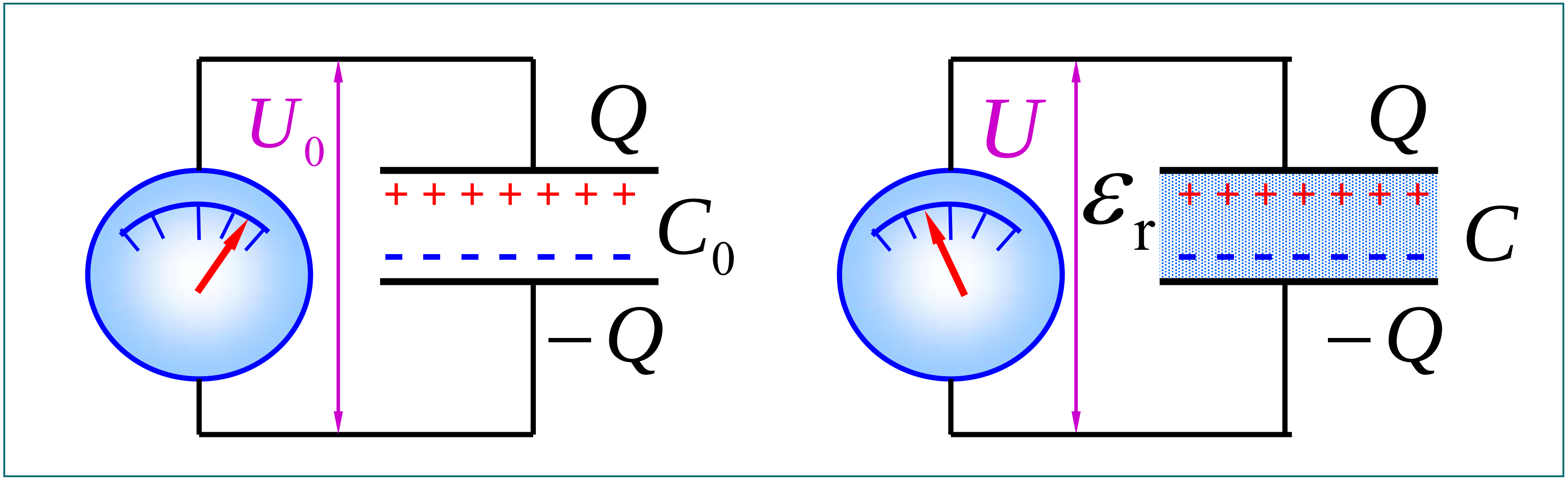
• 电容器充满介质时，电场强度变小 $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow \Delta U = \dfrac{\Delta U_0}{\varepsilon_r}$

$$\longrightarrow C = \frac{Q_0}{\Delta U} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{\Delta U_0} = \varepsilon_r C_0$$

➢介质中的场强 E 比真空中相应电荷分布的场强 E_0 小，而充满介质电容器的电容 C 比真空电容器的电容 C_0 大。

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_0}$$ ——又称电容率。

小结



$$U = \frac{1}{\varepsilon_r} U_0 \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad \boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

相对电容率 $\varepsilon_r > 1$

电容率 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

§ 2.4.3　有介质时的高斯定理

根据介质极化和真空中高斯定律

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S (q_0 + q')$$

自由电荷

束缚电荷

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\sum_S q'$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint\!\!\!\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{S} = \sum_S q_0$$

定义：　电位移矢量

electric displacement

$$\vec{D} \overset{def}{\equiv} \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_e dV$$

自由电荷

物理意义

通过任一闭合曲面的电位移通量，等于该曲面内所包围的自由电荷的代数和。

电位移线起始于正自由电荷终止于负自由电荷。与束缚电荷无关。

电力线起始于正电荷终止于负电荷。包括自由电荷和与束缚电荷。

该积分方程的微分形式： $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_e$

电场回路定理： $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

- $\vec{P}$、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 之间的关系：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$$

ε_r 称为相对电容率或相对介电常量。

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

ε_0 称为电容率 ***permittivity***

或介电常量***dielectric constant***。

讨论：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q$$

（1）介质中的高斯定理表明：电位移矢量对任意封闭曲面的通量与该封闭曲面内自由电荷有关。

但是：电位移矢量本身与对空间所有的电荷分布有关，包括自由电荷和束缚电荷。

（2）电位移矢量是描述介质中电场性质的辅助量，没有具体的物理意义。电场强度是描述电场的基本物理量。

（3）介质中的高斯定理包含了真空中的高斯定理。

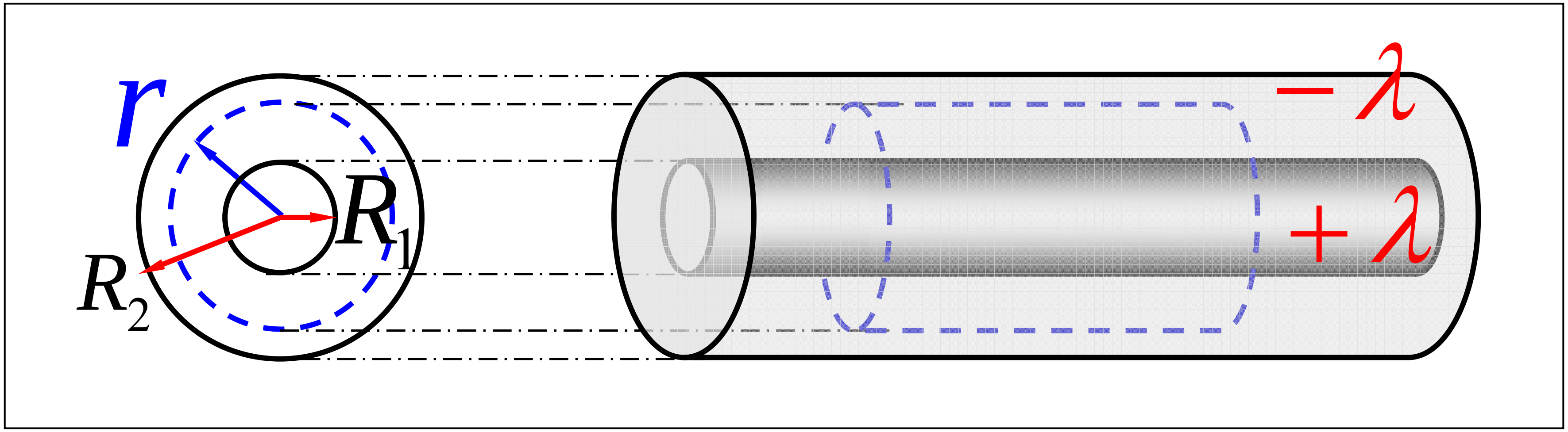
$$\because \vec{P} = 0$$

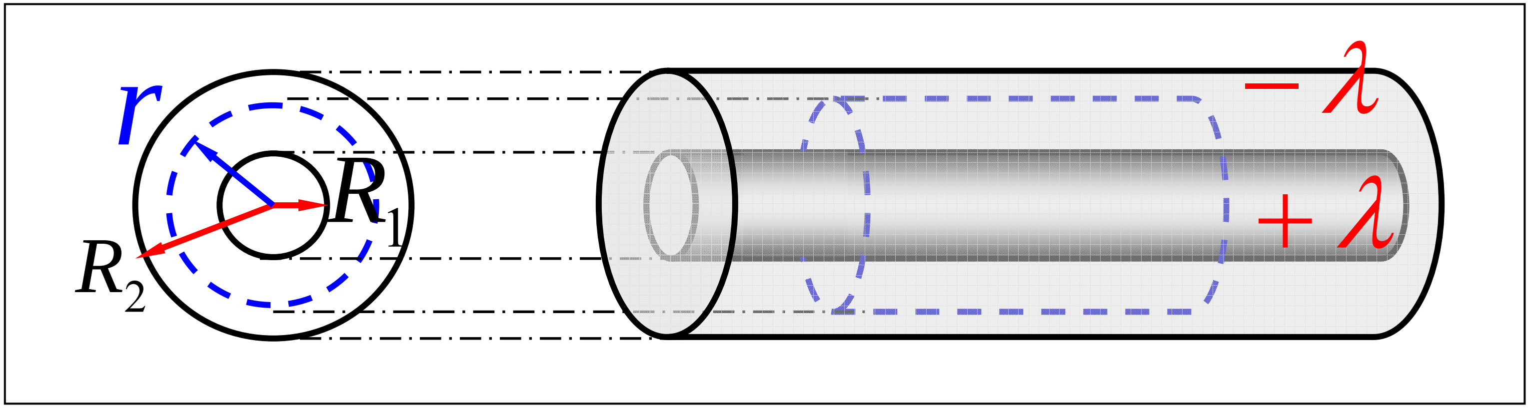
$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_o \vec{E}$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

例　常用的圆柱形电容器，是由半径为 R_1 的长直圆柱导体和同轴的半径为 R_2 的薄导体圆筒组成，并在直导体与导体圆筒之间充以相对电容率为 ε_r 的电介质.设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为$+\lambda$和$-\lambda$． **求（1）**电介质中的电场强度、电位移和极化强度；**（2）**电介质内、外表面的极化电荷面密度；**（3）**此圆柱形电容器的电容.





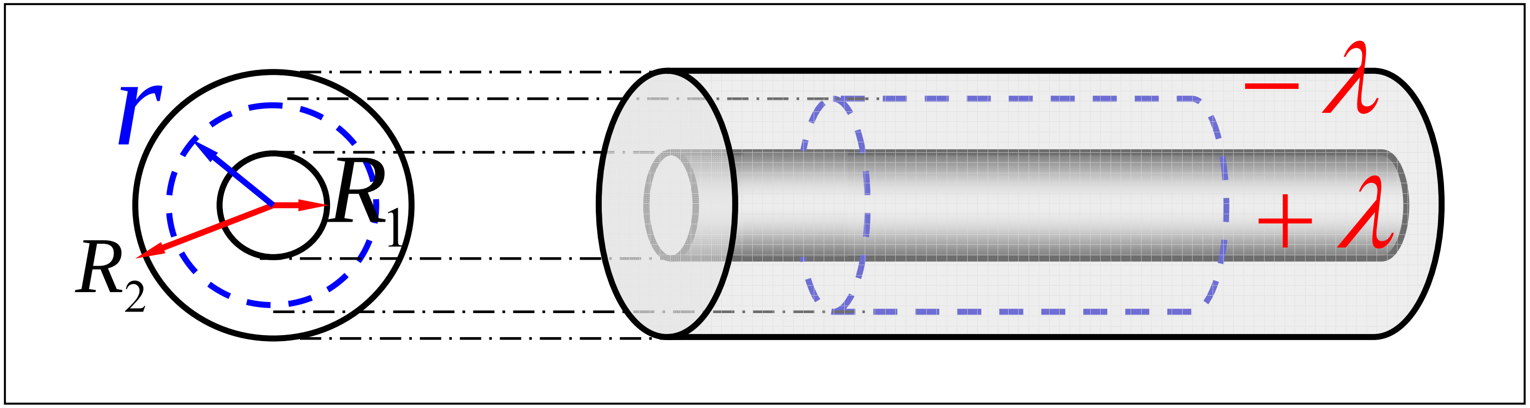
解（1）

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \lambda l$$

$$D2\pi\, rl = \lambda l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi\, r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} r} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

$$P = (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{2\pi\, \varepsilon_\mathrm{r} r}\lambda$$

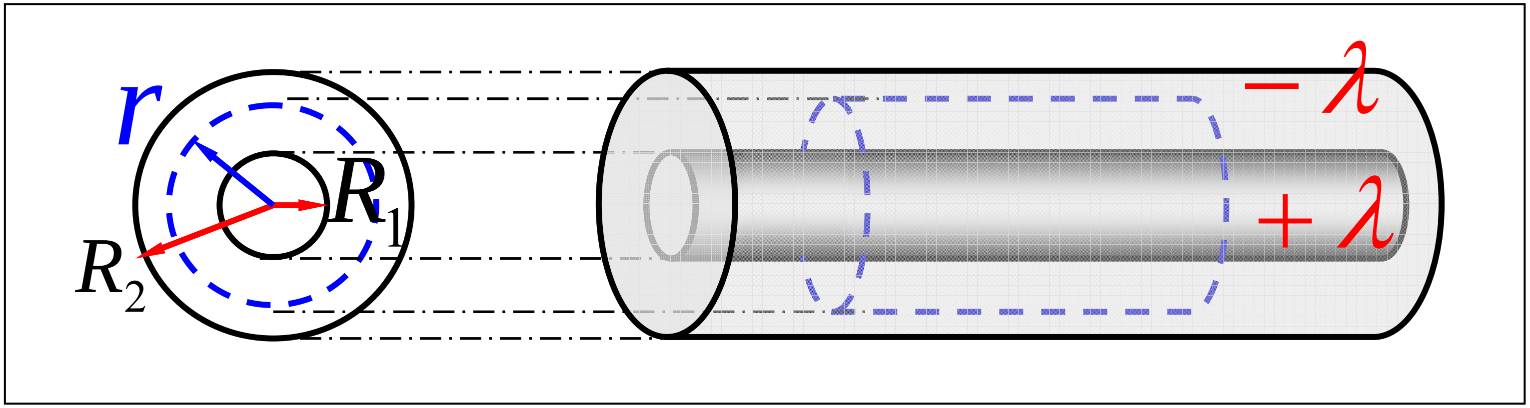


（2）由上题可知

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

$$\begin{cases} E_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_0\varepsilon_r R_1} & (r=R_1) \\ E_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_0\varepsilon_r R_2} & (r=R_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1{}'=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_1=(\varepsilon_r-1)\dfrac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_r R_1} \\ \sigma_2{}'=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_2=(\varepsilon_r-1)\dfrac{\lambda}{2\pi\ \varepsilon_r R_2} \end{cases}$$



（3）由（1）可知 $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$

$$U = \int \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda\, dr}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r r} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r l \Big/ \ln\frac{R_2}{R_1} = \varepsilon_r \boxed{C_0}$$

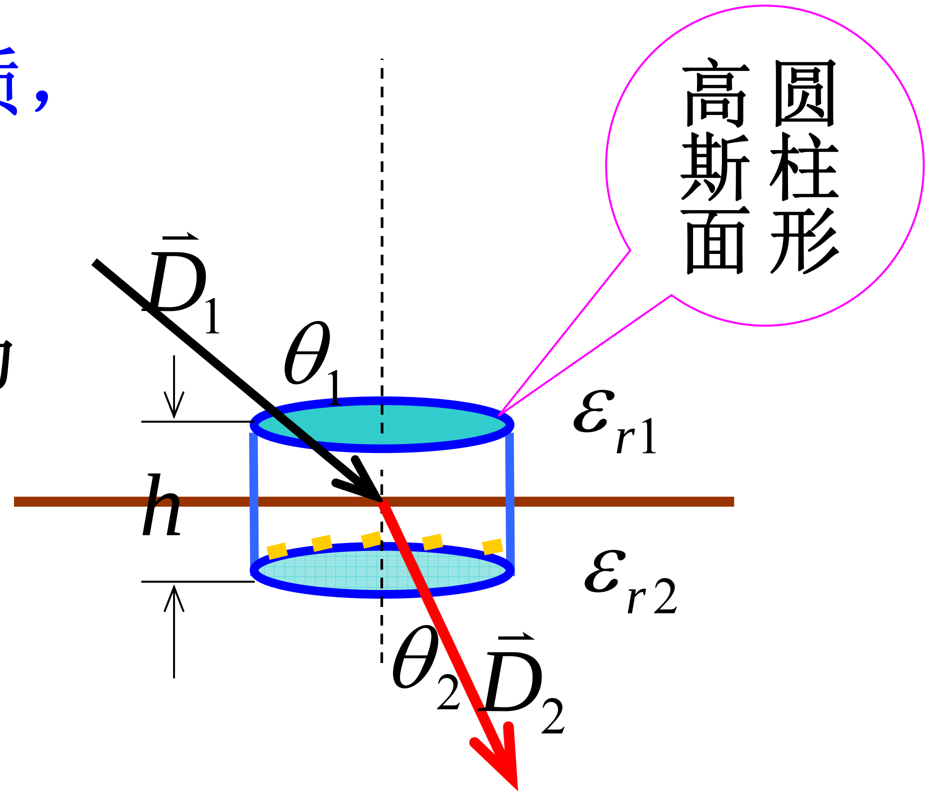
真空圆柱形电容器电容

单位长度电容 $\dfrac{C}{l} = 2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r \Big/ \ln\dfrac{R_2}{R_1}$

§ 2.6　静电场的边界条件

电场的边界条件给出电介质的分界面上（或者电介质与导体，电介质与真空等）电场中物理量所应遵守的规律。

两种各向同性的均匀介质，
分界面处无自由电荷。



高斯面上下底面积为
$dS = \pi r^2$ 高为 h

r 为一级无穷小

h 为二级无穷小

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = -D_1\cos\theta_1 dS + D_2\cos\theta_2 dS + D_{侧} 2\pi r h$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = -D_1\cos\theta_1 dS + D_2\cos\theta_2 dS + D_{侧面} 2\pi rh = 0$$

$$D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2$$

- $\vec{D}$、$\vec{E}$ 的法向分量

$$\therefore D_{1n} = D_{2n}$$

在均匀介质的分界面处电位移矢量的法向分量连续。

$$\because \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \qquad \therefore \varepsilon_{r1}E_{1n} = \varepsilon_{r2}E_{2n}$$

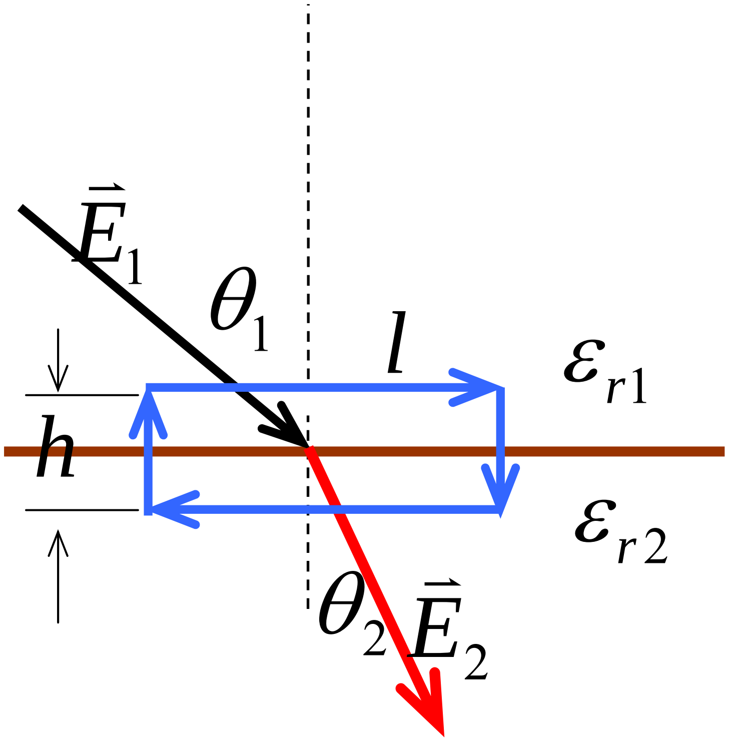
在均匀介质的分界面处电场强度矢量的法向分量不连续。

_$\vec{D}$、$\vec{E}$的切向分量

在界面处做一个环路

l为一级无穷小

h为二级无穷小



根据环路定理：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = +E_1\sin\theta_1\cdot l - E_2\sin\theta_2\cdot l + E_{侧}h = 0$$

$$\therefore E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t}$$

在均匀介质的分界面处电场强度矢量的切向分量连续。

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad \because \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\therefore \frac{D_{1t}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_{r2}}$$

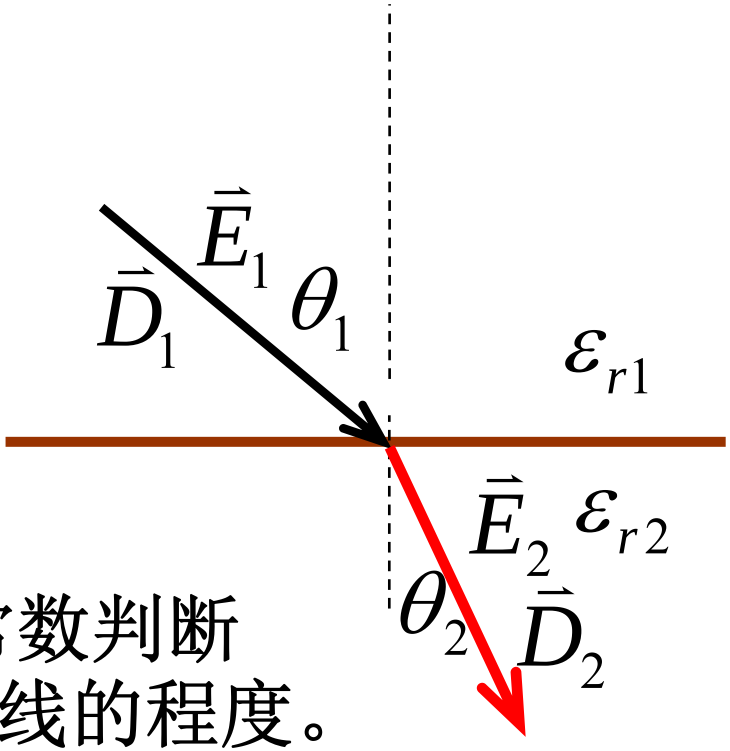
在均匀介质的分界面处电位移矢量的切向分量不连续。

- 应用

$$\because E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\because D_1 \cos\theta_1 = D_2 \cos\theta_2$$

$$D_{1n} = D_{2n}$$



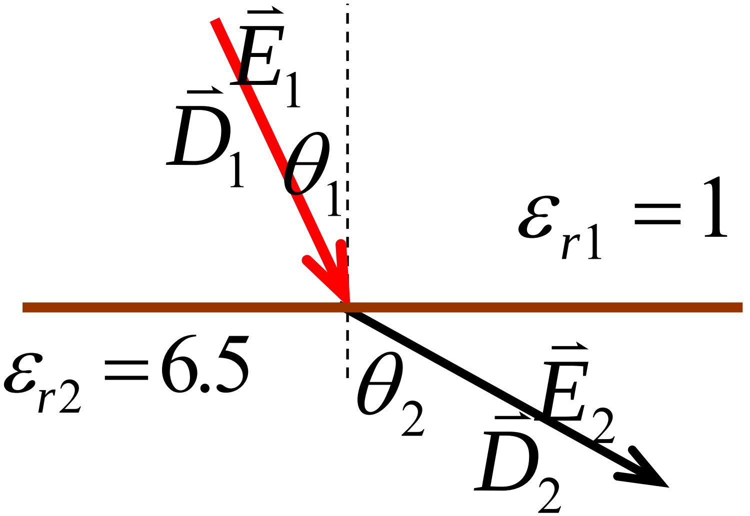
$$\therefore \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

可从介电常数判断D线偏离法线的程度。

例：一高压设备中用一块均匀的陶瓷片 $\varepsilon_{r2}=6.5$ 做绝缘，其击穿场强为 10^7伏/米。已知高压电在陶瓷片外空气中产生均匀电场，其场强与陶瓷面法向成 30^0角，$\vec{E}_1=2\times10^4 V/m$

求：陶瓷中的$\vec{D}_2$、$\vec{E}_2$；陶瓷表面极化面电荷密度。

解: 依题意如图:



$$\therefore \frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

$$tg\theta_2=\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}tg\theta_1=6.5tg30^0$$

$$\theta_2=75^0$$

$$\because D_1\cos\theta_1 = D_2\cos\theta_2 \qquad \because \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\therefore D_2 = \frac{D_1\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E_1\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

$$\therefore E_2 = \frac{\varepsilon_{r1}E_1\cos\theta_1}{\varepsilon_{r2}\cos\theta_2} = 1.03\times10^4 V/m < 10^7 V/m$$

因而陶瓷不会被击穿。

$$\sigma_2' = P_{2n} = |\chi_{2e}\varepsilon_0 E_2\cos\theta_2|$$

$$= |(\varepsilon_{r2}-1)\varepsilon_0 E_2\cos\theta_2| = 1.29\times10^{-7} C/m^2$$

在陶瓷表面束缚电荷为负号

在空气的分界面上束缚电荷为零。

§ 2.7 带电体系的静电能

静电势能定域在同时产生的静电场之中，它就是静电场的能量，即**静电能.**

<u>两个点电荷体系的互能:</u> q_1在A点. 将q_2从远处移到与q_1相距r_{12}的B点，克服q_1的场E_1所做的功W，即为带电体系的互能

$$W_{互} = W' = -\int_{\infty}^{B} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}$$

$$= -q_2 \int_{\infty}^{B} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$= q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} = q_2 U_{12}$$

$$U_{12} = \int_{B}^{\infty} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

U_{12}: q_1的电场在q_2所在位置的电势

上式可改写为:

$$W_e = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2$$

推广到 多个点电荷组成的体系:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

电荷连续分布的情形:

电荷元 $dq = \rho d\tau$ 静电能 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V d\tau$

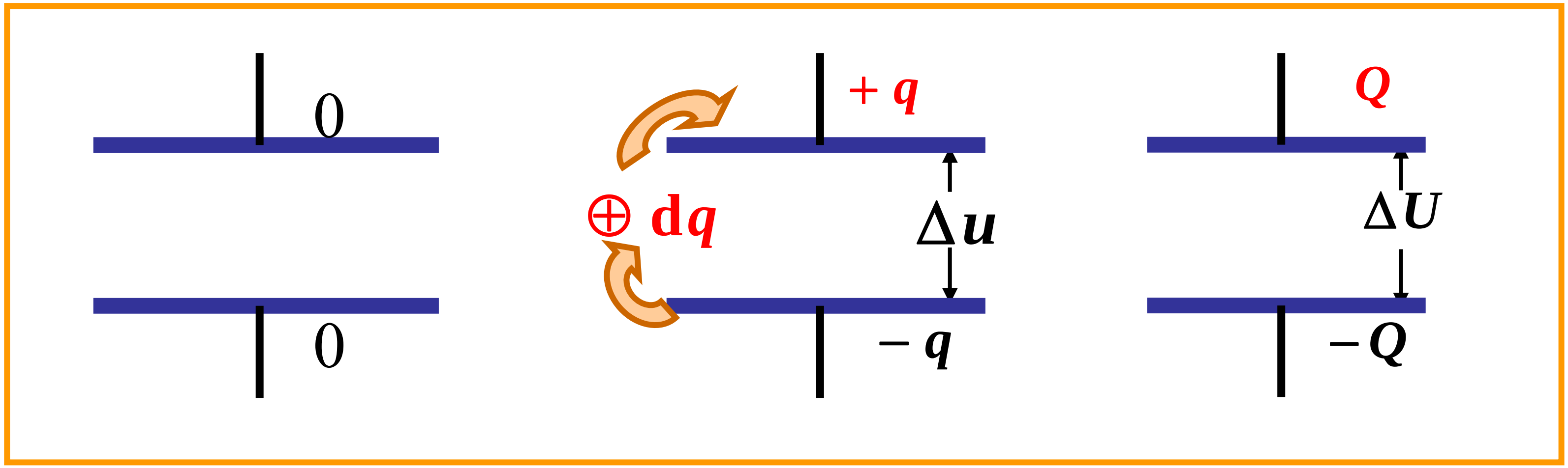
电容器的能量

电容器（储能元件）储能多少?

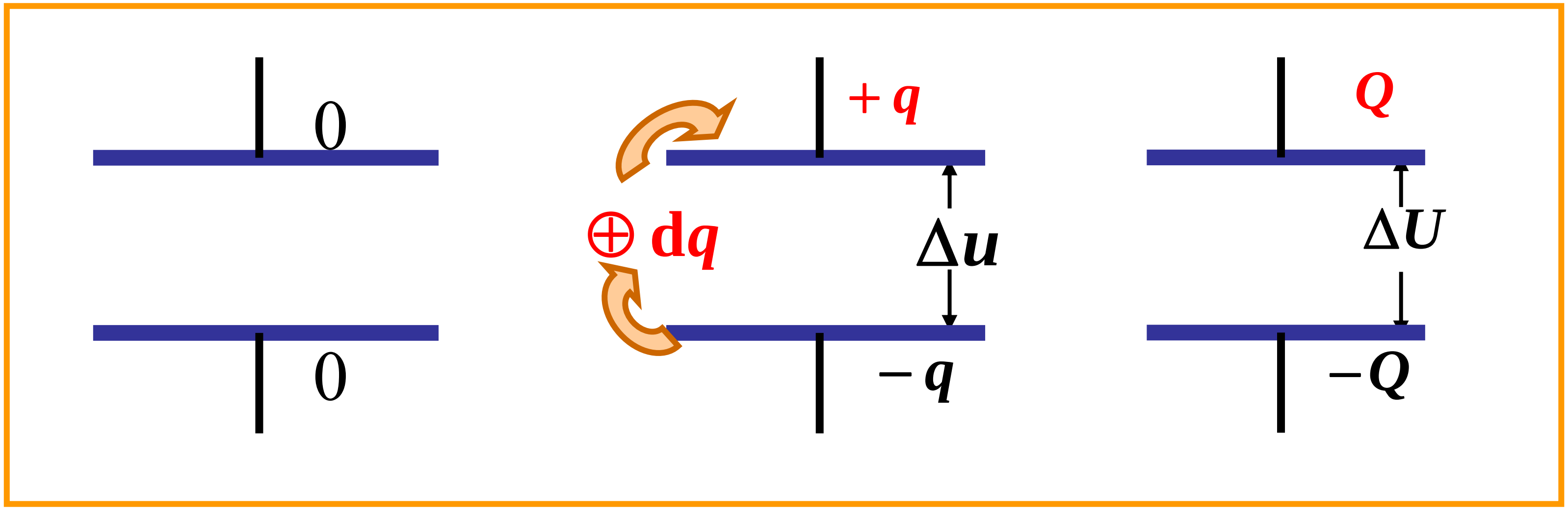
模型: 极板电量 $0 \to Q$

板间电压 $0 \to \Delta U$

将 Q 由负极移向正极板的过程



储能 = 过程中反抗电场力的功.



计算： $$\mathrm{d}A = \Delta u \cdot \mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

电容器的能量： $$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2 = \frac{1}{2}Q\Delta U}$$

电场能量

1. 电场能量密度

以平行板电容器为例 $C=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$ $\Delta U=Ed$

$$W=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}E^2d^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2V$$

$$\boxed{w_e=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}ED}$$

2 . 电场能量

$$\boxed{W=\int_V w_e\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}ED\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2\mathrm{d}V}$$

Capacitor Bank for High magnetic field

物理意义: 电场是一种物质，它具有能量.

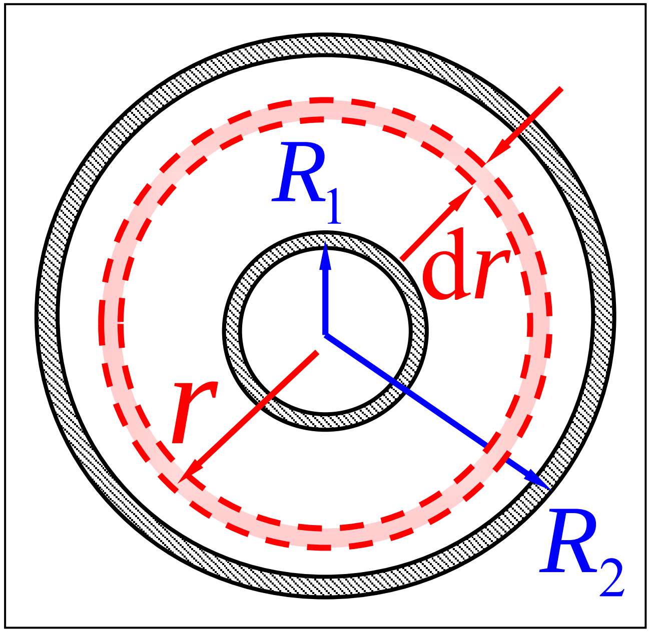
电容器所具有的能量与极板间电场 $\vec{E}$ 和$\vec{D}$ 有关，$\vec{E}$ 和 $\vec{D}$ 是极板间每一点电场大小的物理量，所以能量与电场存在的空间有关，电场携带了能量。

电容器所具有的能量还与极板间体积成正比，于是可定义能量的体密度，它虽然是从电容器间的均匀场而推导来，但有其普遍性。

例　如图所示, 球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，所带电荷为$\pm Q$. 若在两球壳间充以电容率为 ε 的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少？

解:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$$



$$w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{e}}=w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_{\mathrm{e}}=\int \mathrm{d}W_{\mathrm{e}}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2 - R_1}}$$

讨 论:

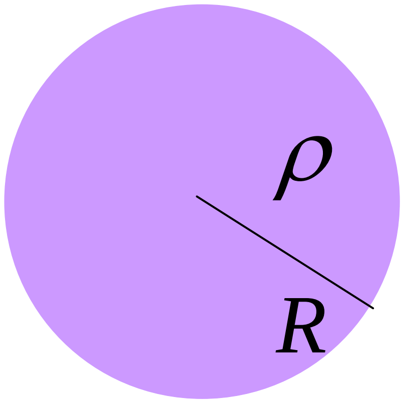
（1） $$W_e = \frac{Q^2}{2C} \qquad C = 4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2 - R_1}$$

（球形电容器电容）

（2） $$R_2 \to \infty \qquad W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}$$

（孤立导体球贮存的能量）

例：一个球半径为R，体电荷密度为ρ，试利用电场能量公式求此带电球体系统的静电能。



解：

$$\because \vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\hat{r} \qquad r \le R$$

$$\because \vec{E}_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r} \qquad r \ge R$$

$$\because W = \int w_e dV = \int \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2} dV$$

$$= \int_0^R \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E_1^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E_2^2}{2} 4\pi r^2 dr$$

球内

球外空间

$$\because W=\int w_e dV=\int\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2}dV$$

$$=\int_0^R\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2 4\pi r^2 dr+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}\left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{4\pi\rho^2 R^5}{5\times 18\varepsilon_0\varepsilon_r}+\frac{4\pi\rho^2 R^5}{18\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$=\frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

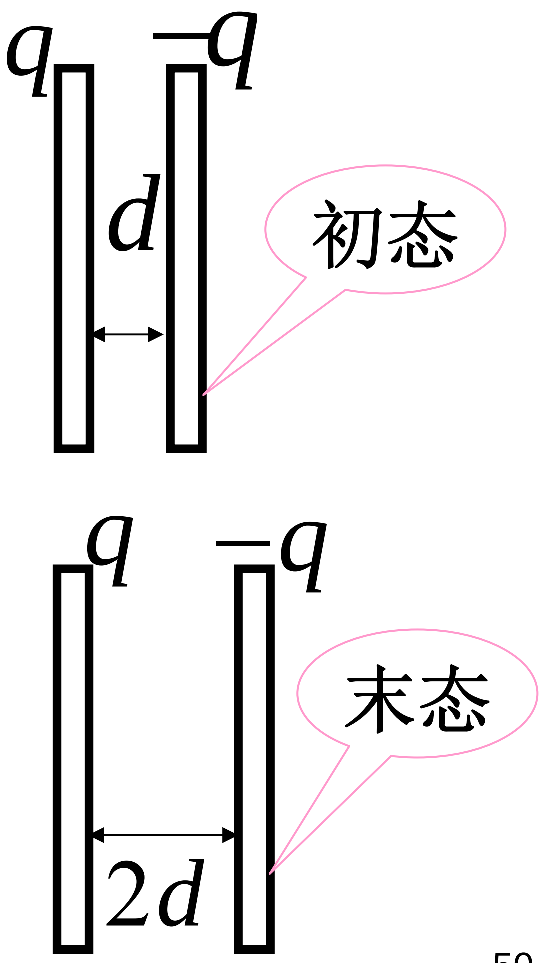
例：一平板电容器面积为S，间距d，用电源充电后，两极板分别带电为$+q$和$-q$，断开电源，再把两极板拉至$2d$，试求1)外力克服电力所做的功。2）两极板间的相互作用力？

解：**1)** 根据功能原理可知，外力的功等于系统能量的增量

电容器两个状态下所存贮的能量差等于外力的功。

$$A=\Delta W=\frac{q^2}{2C_2}-\frac{q^2}{2C_1}$$

$$=\frac{q^2}{2}\frac{C_1-C_2}{C_1C_2}=\frac{q^2}{2}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$



$$A=\frac{q^2}{2}\frac{C_1-C_2}{C_1C_2}=\frac{q^2}{2}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$\therefore A=\frac{q^2}{2C_1}$$

若把电容器极板拉开一倍的距离，所需外力的功等于电容器原来具有的能量。

2): 外力反抗极板间的电场力作功

$$\therefore A=F\cdot d$$

$$\therefore F=\frac{A}{d}=\frac{q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r Sd}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

极板间的力

jweil

Q.1 拉伸平行板电容器

有一个电容器，它两电板上的电荷大小相等，方向相反，其间距为**d**。如果拉伸两电板的间距为**D**（**>d**），则电容器储存的静电能和原来相比：

1. 增大；**2.**减小；**3.**不变。

jwei2

Q.2 在平行板电容器中间插入电介质

我们在平行板电容器中间插入电介质，然后给电容器充电，再移掉电介质。则电容器中储存的静电能和未移掉电介质时相比：

1.大；**2.**相同；**3.**小。

jwei3

Q.3 在平行板电容器中插入一玻璃板

有一个电容器，它上下极板和一个电压恒为为**V**的电池相接。如果在两电板之间填充满一块玻璃板，则储存的能量：

1. 增加；**2.**减少；**3.**不变。

作业:

(Due date: Mar. 22)

2.12, 2.14, 2.17, 2.20