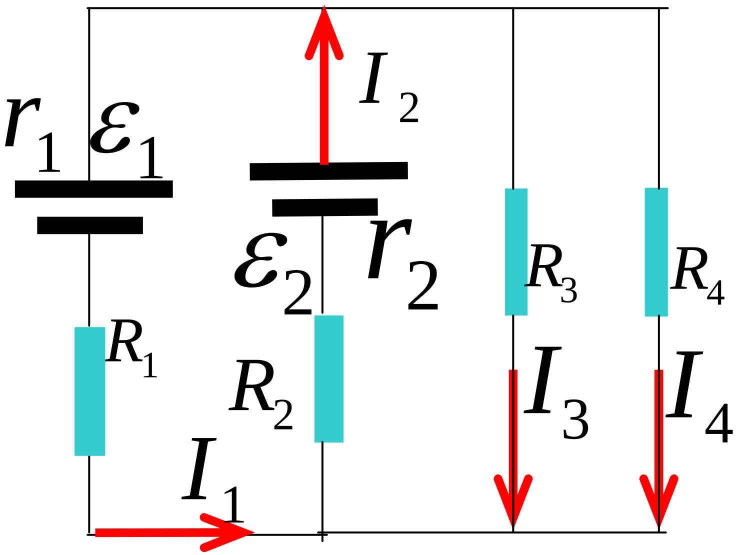
Review Section
温故知新

复杂电路：电阻有除串并联外的连接方式

支路 ***branch*** 把任意一条电源和电阻串联的电路叫做支路



回路 ***loop*** 把 ***n*** 条支路构成的通路叫做回路

节点 ***node*** 三条或更多条支路的汇集点叫做节点。

基尔霍夫定律(复杂电路)

第一方程组（节点电流定律）

通过每一个节点的电流的代数和为零

电流恒定条件

$$\oiint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \sum_i (\pm I_i) = 0$$

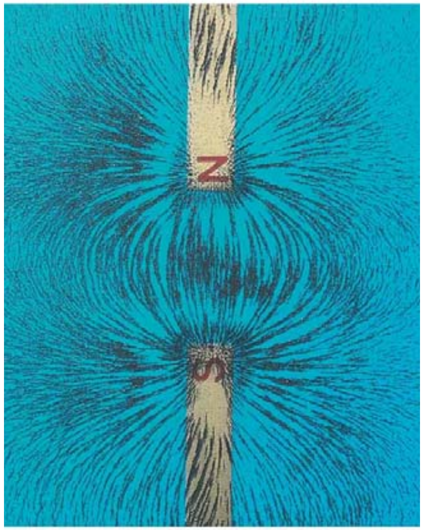
第二方程组（回路电压定律）

对于每一个回路，各电源和电阻上电势降落的代数和为零

恒定电场环路定理

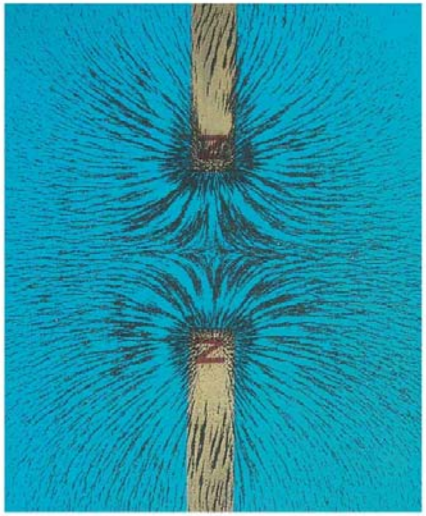
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \sum_j (\pm \varepsilon_j) + \sum_i (\pm I_i R_i) = 0$$

§ 4.1 基本磁现象

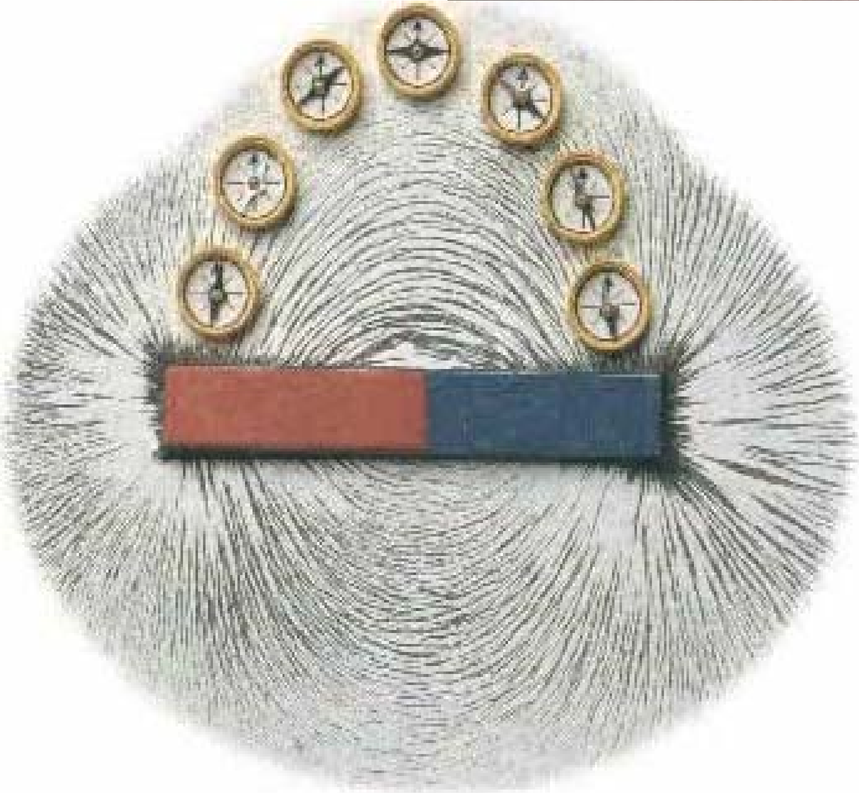


(b)

4 Thomson - Brooks/Cole



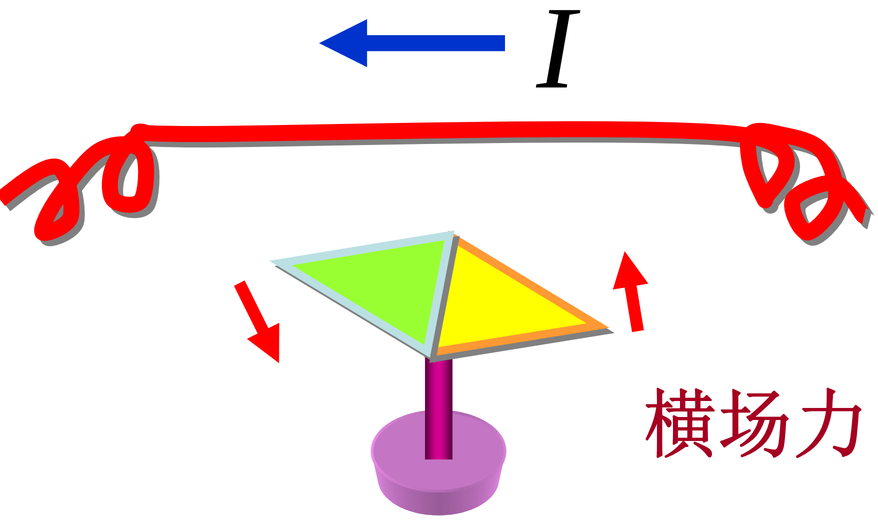
(c)

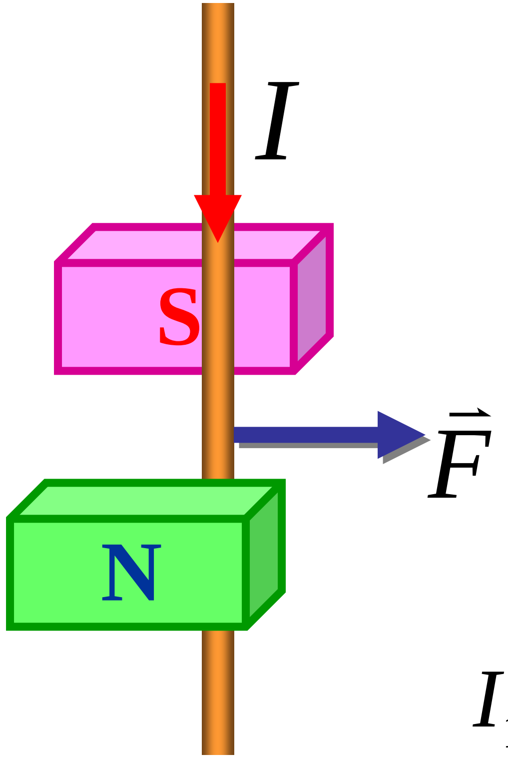


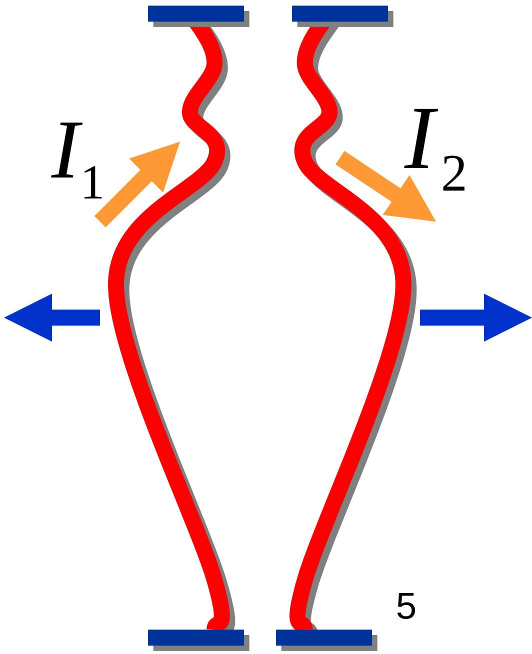
电流的磁效应

电流⇔磁铁，电流⇔电流

奥斯特实验 (1820.7)







磁性起源于电荷的运动

电现象与磁现象密切相关

产生磁场的“源”：

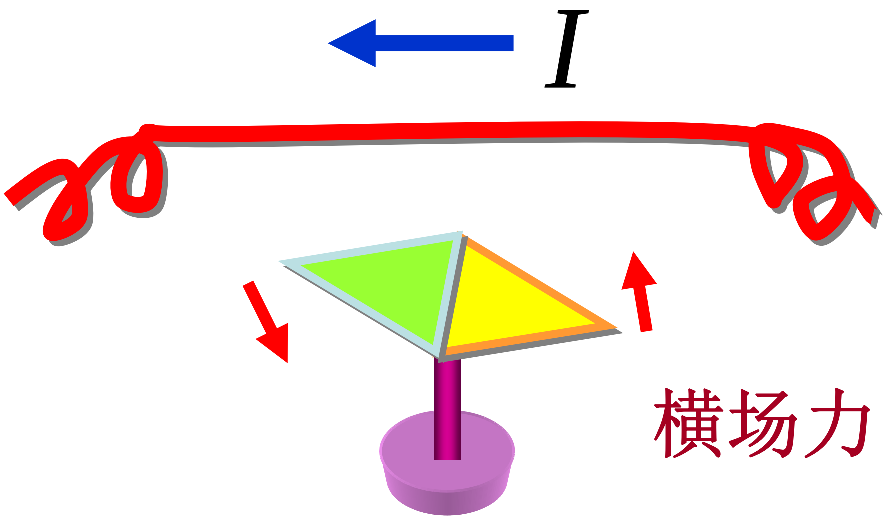
1. 运动电荷
2. 传导电流
3. 永磁铁

磁场由分子电流产生 (安培假设)

运动电荷既能产生磁效应，也能受磁力的作用。一切磁现象都起源于电荷的运动。它们之间的相互作用力均为运动电荷之间的作用力。

§4.2　毕奥—萨伐尔定律

载流导线的磁场



磁性起源于电荷的运动

思路

点电荷 → 点电荷系(带电体)

$$\vec{E}=\int d\vec{E}$$

元电流 → 电流(载流体）

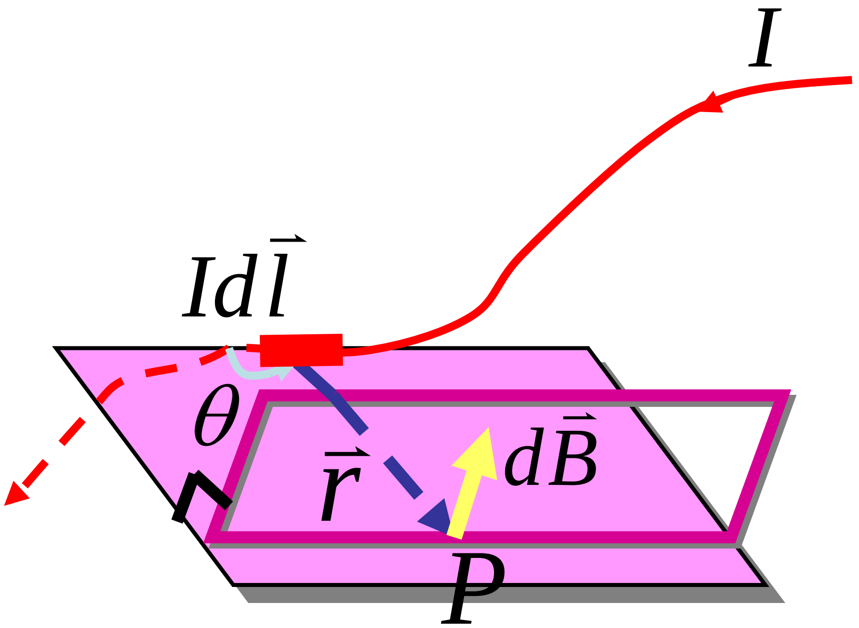
$$\vec{B}=\int d\vec{B}$$

一、毕奥—萨伐尔定律(1820)

真空中，任一载流导线上任取电流元$Id\vec{l}$，其在空间某点 P 处产生的磁场的磁感应强度 $d\vec{B}$ 大小为

$$dB = k\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$(0\langle\theta\langle180^0)$$



θ=90时dB取最大值

在国际单位制中 $k=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\ (T\cdot m\cdot A^{-1})$ —真空磁导率

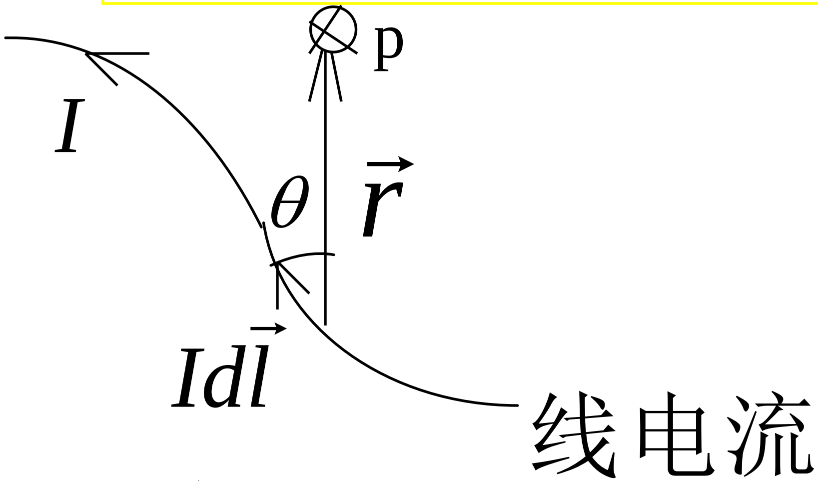
其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\left(T\cdot m\cdot A^{-1}\right)=4\pi\times10^{-7}\left(H\cdot m^{-1}\right)$

式中：$Id\vec{l}$ 方向为导线上该点线元 $d\vec{l}$ 上电流 I 的方向，

大小为 I 与 dl 的乘积。

矢径 $\vec{r}$ 为电流元 $Id\vec{l}$ 指向场点 P 的矢量。

θ 为电流元 $Id\vec{l}$ 与矢径 $\vec{r}$ 的夹角（小于 180^0）。



方向：垂直于 $Id\vec{l}$ 和矢径 $\vec{r}$ 所组成的平面。

$d\vec{B}\,//\,d\vec{l}\times\vec{r}$

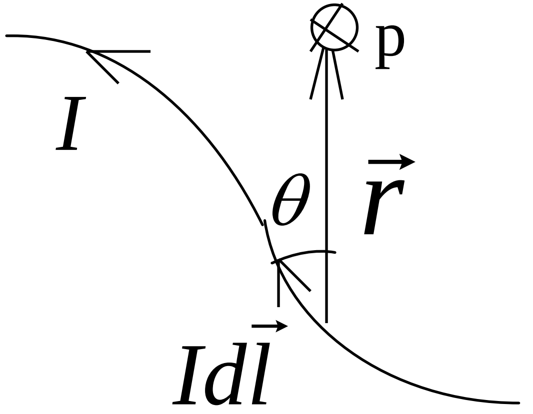
矢量式：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

——毕奥—萨伐尔定律

线电流：

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

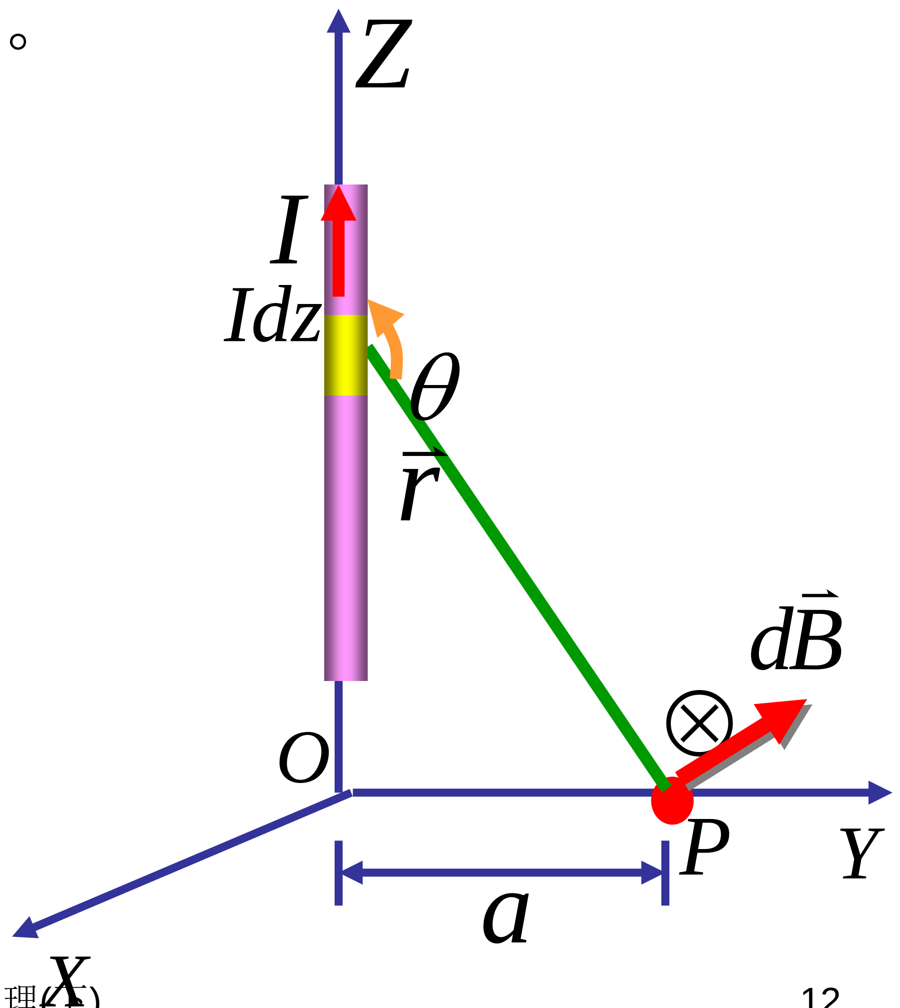


元电流 → 线电流 → 面电流 → 体电流

→ 任何载流体的 $\vec{B}$ 分布

例:一段载流直导线的磁场

设有一段载有电流 I 的直导线，试计算距导线 a 处 P 点的磁感应强度 $\vec{B}$ 。



解： 建立如图坐标系，在载流直导线上，任取一电流元 $I\,dz$，有毕—萨定律得磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

所有电流元方向相同，所以为标量积分，即

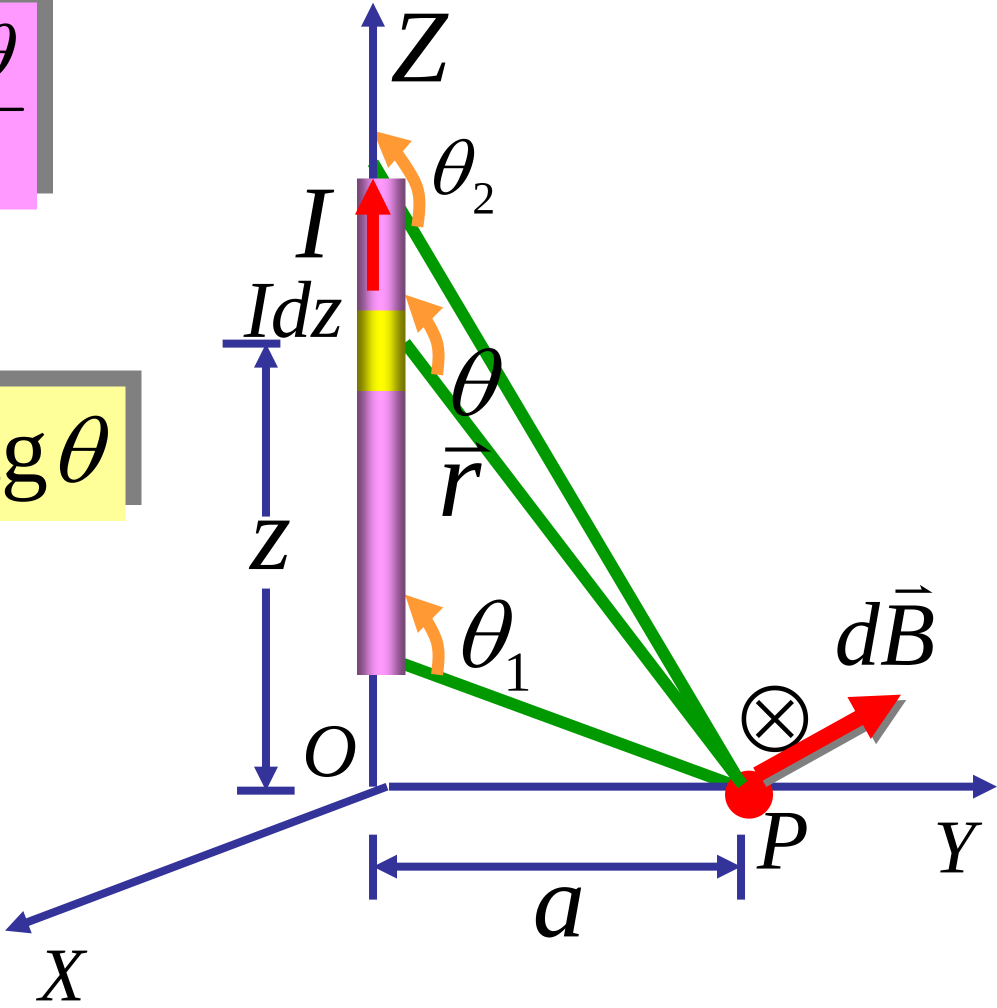
$$B=\int dB=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

由图得

$$z=a\mathrm{ctg}(\pi-\theta)=-a\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$dz=a\csc^2\theta d\theta$$

$$r=\frac{a}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{a}{\sin\theta}$$



所以有

$$B=\int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia\csc^2\theta d\theta}{\left(\dfrac{a}{\sin\theta}\right)^2}\sin\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

讨论：

(1)若导线为无限长时，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，则

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

方向？

(2)若导线为半无限长时，$\theta_1=\frac{\pi}{2}(0)$，$\theta_2=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)$，则

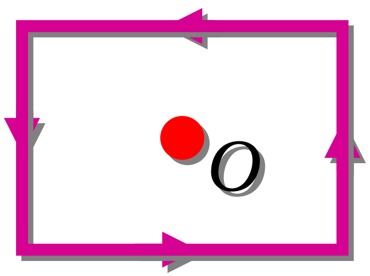
$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

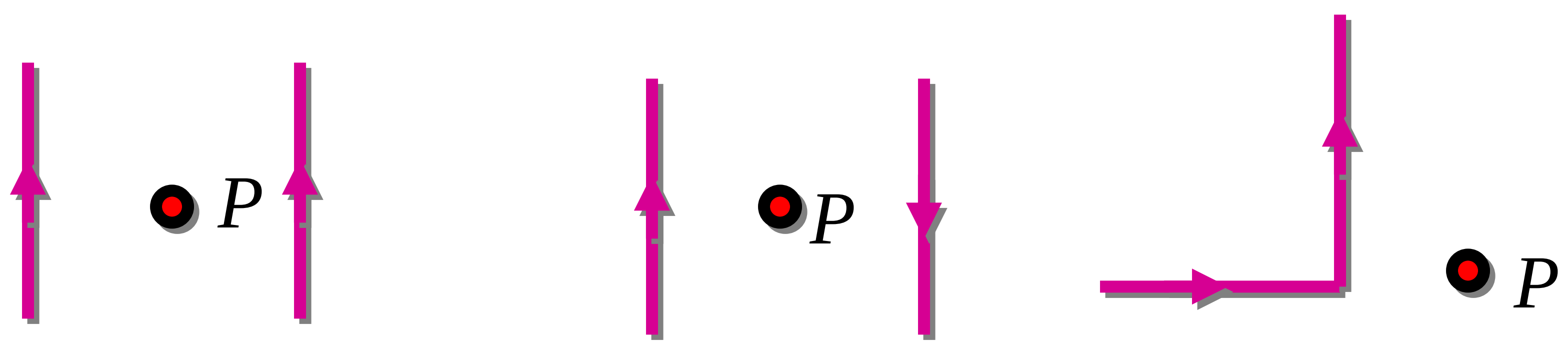
(3)若P点在载流直导线的延长线上，则$B=0$。

（4）解题关键在于确定 θ_1,θ_2

θ_1为电流的起点，θ_2为电流的终点。

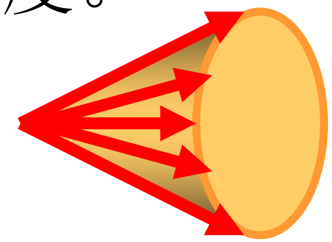
（5）其他例子：





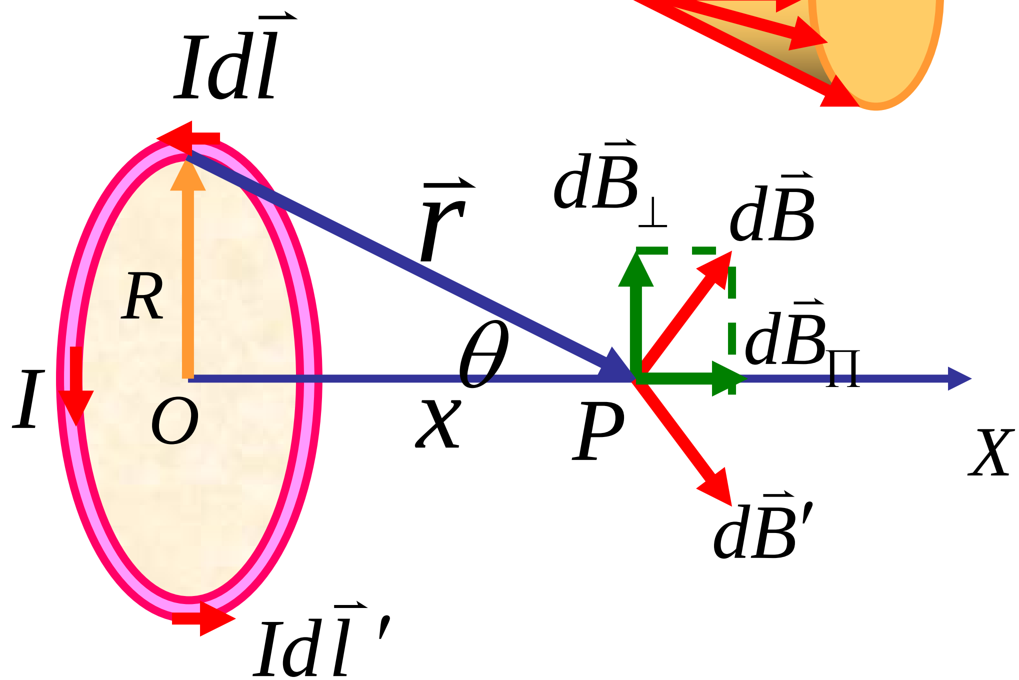
例：圆电流轴线上一点的磁场

有一半径为 R，通电流为 I 的细导线圆环，求其轴线上距圆心 O 为 x 处的P点的磁感应强度。



解： 建立坐标系如图，任取电流元 $I d\vec{l}$ ，由毕—萨定律得

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin 90^0}{r^2}$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$



方向如图：$d\vec{B}\perp\left(\vec{r}, Id\vec{l}\right)$ ，所有$d\vec{B}$ 形成锥面。

若 $$d\vec{B} = d\vec{B}_{//} + d\vec{B}_{\perp}$$

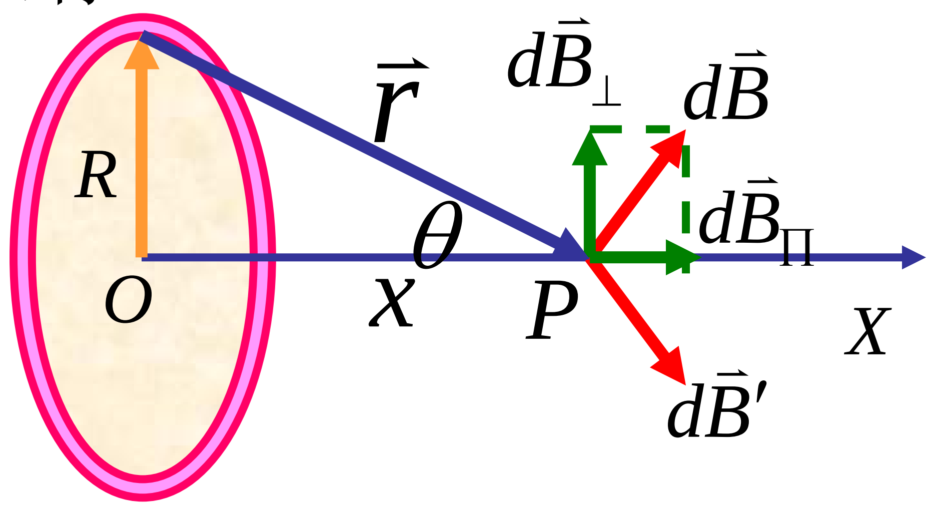
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin 90^0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

由对称性分析得 $$\vec{B}_{\perp} = \int d\vec{B}_{\perp} = 0$$

所以有 $$B = B_{//} = \int dB_{//} = \int dB\sin\theta$$

因为$\sin\theta = \dfrac{R}{r}, r =$ 常量，所以有

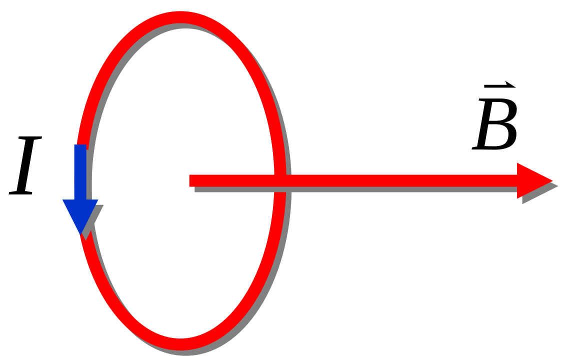
$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{4r^3}$$

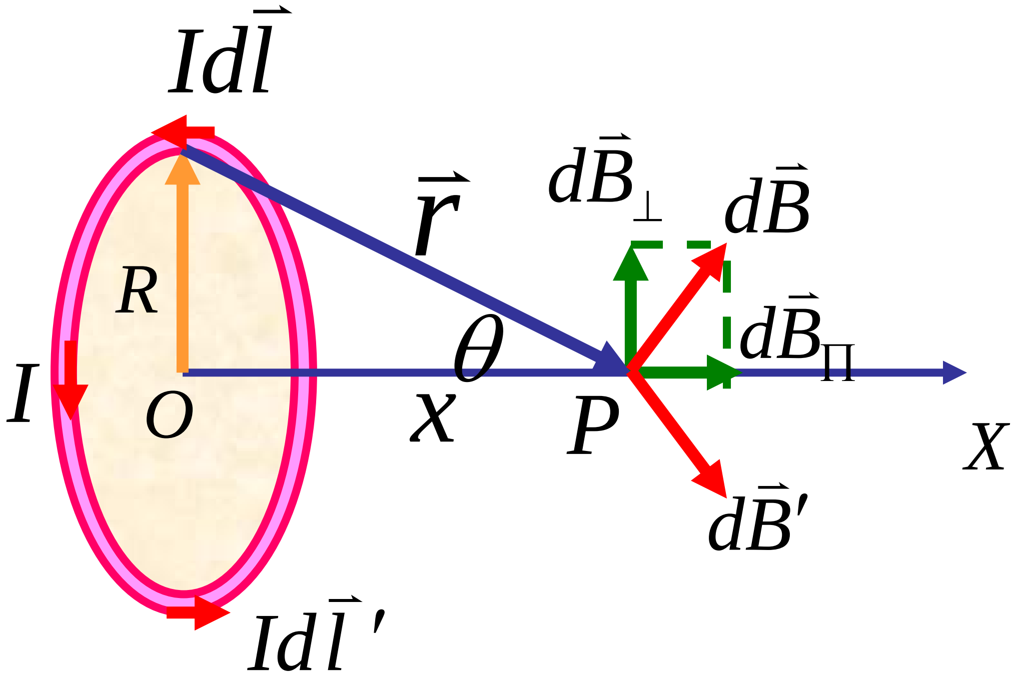


因为$r^2 = x^2 + R^2, S = \pi R^2$,所以有

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}}$$

方向：沿 x 轴正方向，与电流成右螺旋关系。





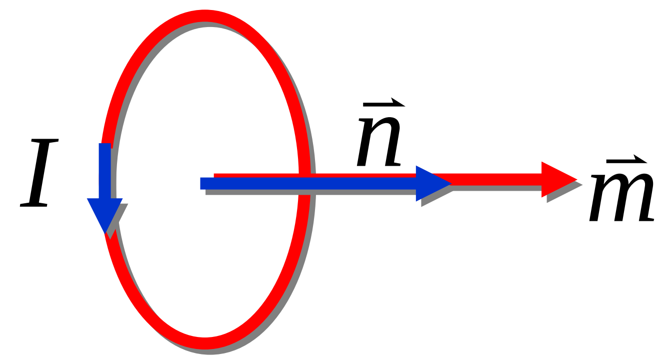
讨论： (1)在圆心处，$x=0$，则圆心处磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 IS}{2\pi\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}}$$

(2)当$x \rangle\rangle R$，即P点远离圆电流时，磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$



定义：圆电流回路的磁矩

$$\boxed{\vec{m}=IS\vec{n}}$$

方向：右螺旋法则。

如果电流回路为N 匝线圈，则载流线圈的总磁矩为

$$\boxed{\vec{m}=NIS\vec{n}}$$

end

§4.3 磁场的高斯定理及安培环路定理

M. Faraday

磁场

根据场论观点：

（1）特殊媒介物质——磁场

电流 $\xleftrightarrow[\text{相互作用}]{\text{磁场}}$ 电流

（2）磁场力

电流 $\xrightarrow{\text{激发}}$ 磁场 $\xrightarrow{\text{磁场力}}$ 电流

电流或运动电荷之间相互作用的磁力是**通过磁场**而作用的。故磁力称为**磁场力**。

（3）磁场是物质的一种特殊形态. 它与电场不同. 静止电荷既不产生磁场, 也不受磁场作用.

(4) 磁场具有能量、动量、质量、角动量。磁场的重要特征：对处在磁场中的运动电荷有力的作用。

磁感应线

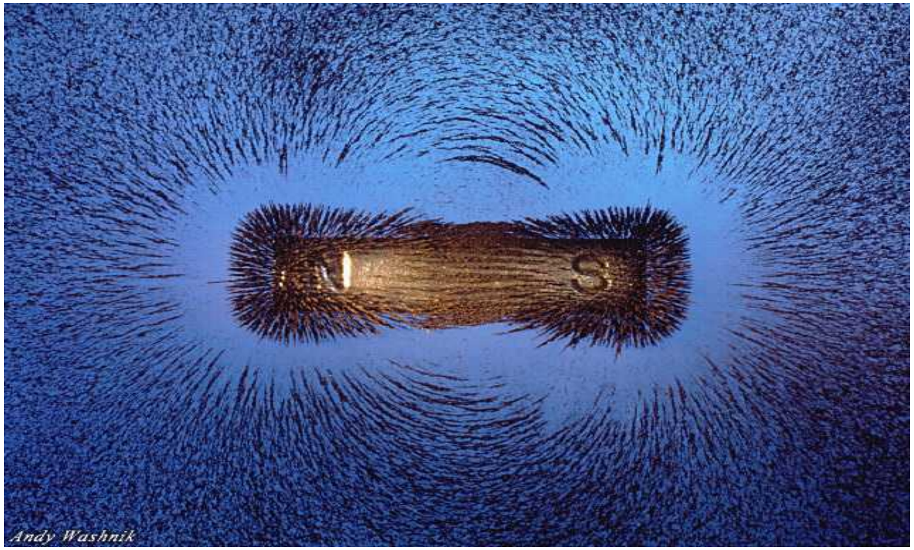
磁感应线（$\vec{B}$线）是为形象描绘磁场空间分布而人为描绘出的一系列曲线族。

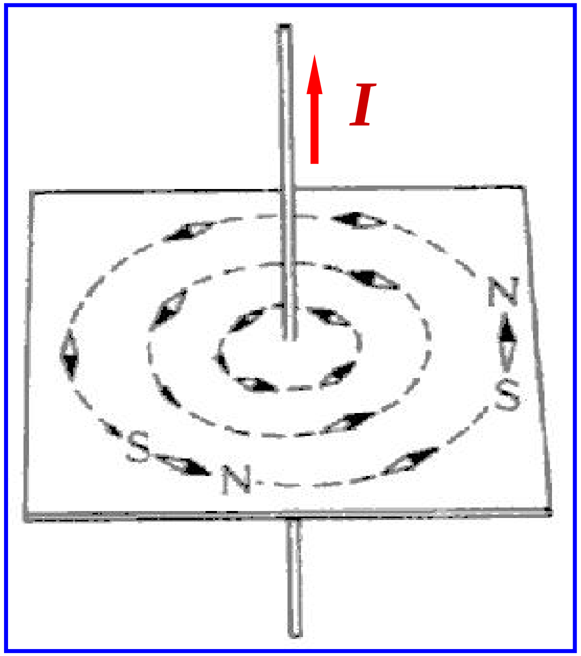
方向：规定磁场中任一磁感应线上某点的切线方向，代表 该点磁感应强度$\vec{B}$ 的方向。

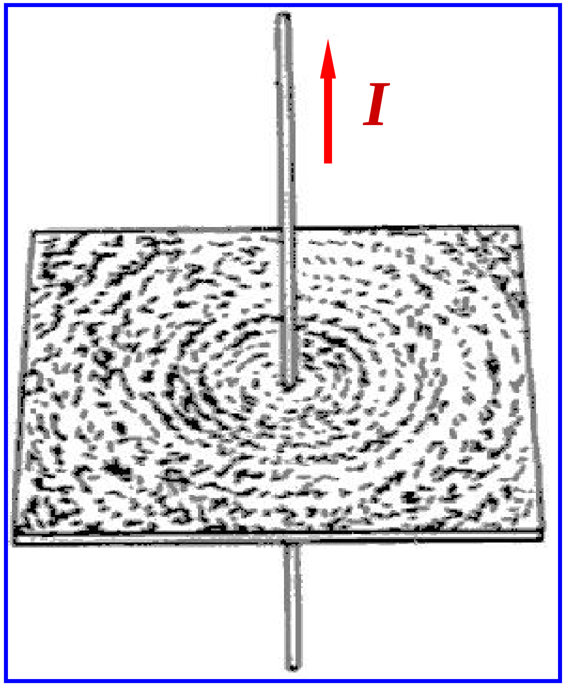
大小：通过垂直于磁感应强度$\vec{B}$ 的单位面积上的磁感应线根数等于该处$\vec{B}$ 的量值。即磁感应线的疏密程度反 映了磁场的强弱。

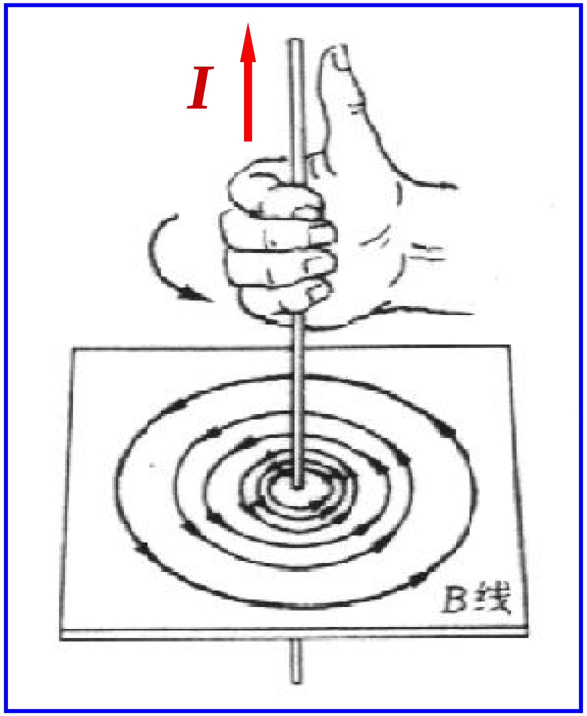
磁感应线

法拉第(M.Faraday) 首先引入。



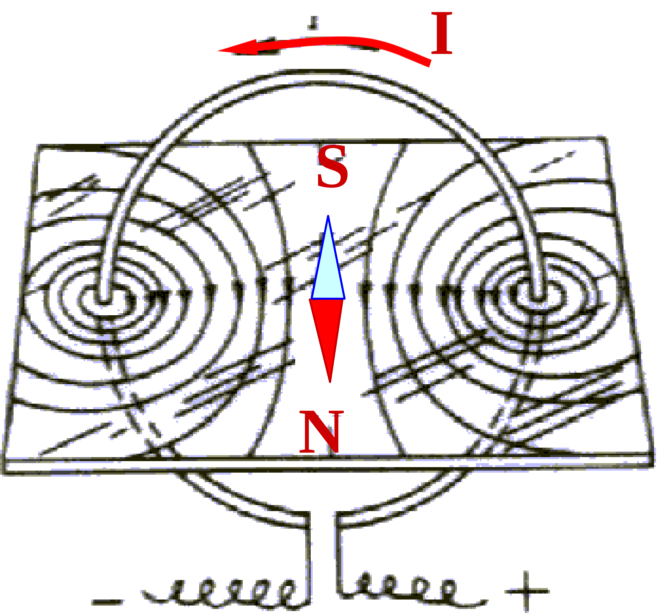




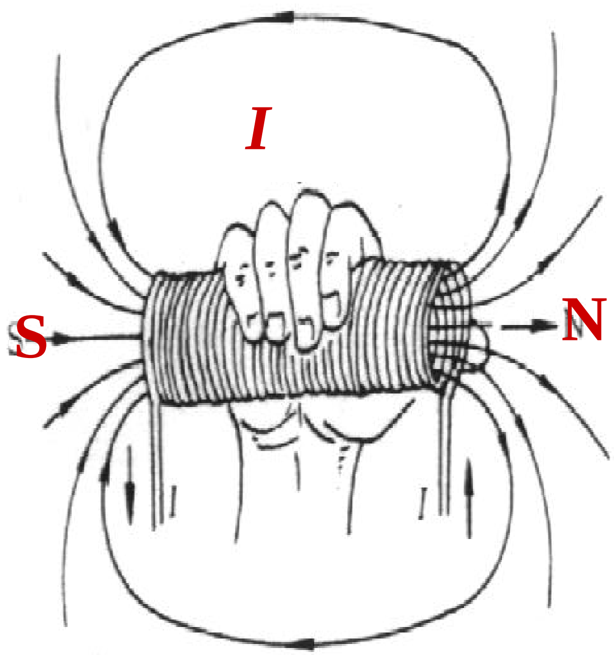


磁感应线的特点

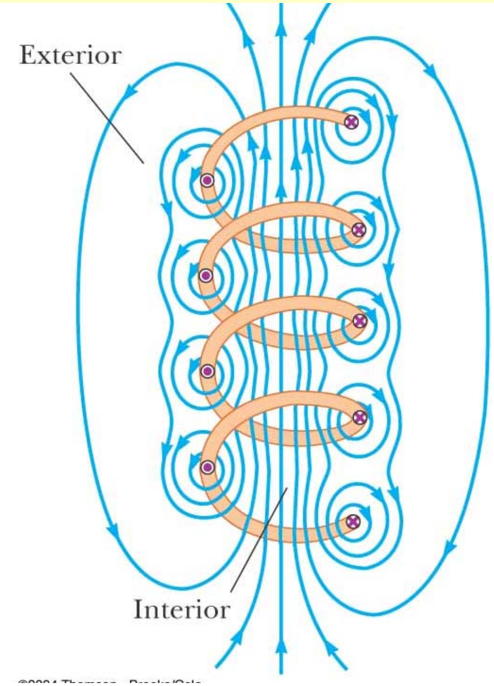
1）磁场中每一条磁感应线都是闭合曲线，或两头伸向无穷远。2）磁感应线的环绕方向与电流方向之间服从 右手螺旋定则。



圆电流



螺线管电流(密)



螺线管电流(疏)

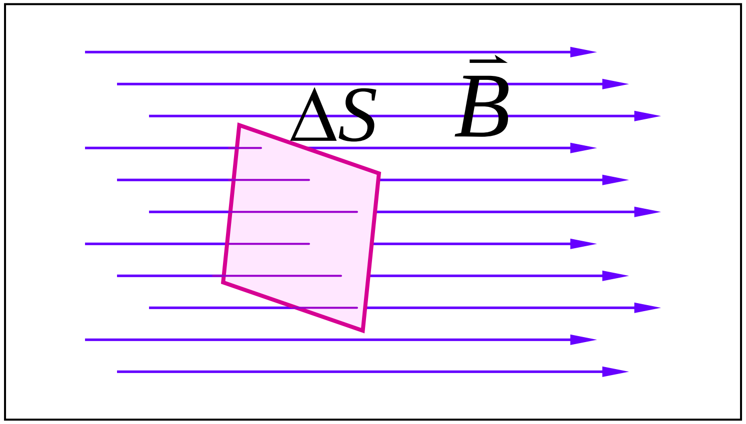
磁通量　磁场的高斯定理

磁场是矢量场，类似电通量可定义磁通量.

◆ 均匀磁场，$\vec{B}$垂直平面

$$B = \frac{\Delta\Phi_m}{\Delta S}$$

磁场中某点处垂直$\vec{B}$矢量的单位面积上通过的磁感线数目等于该点$\vec{B}$的数值.

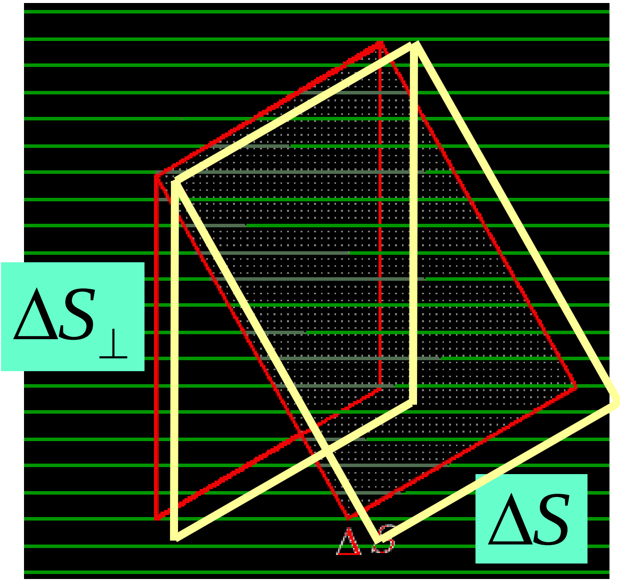


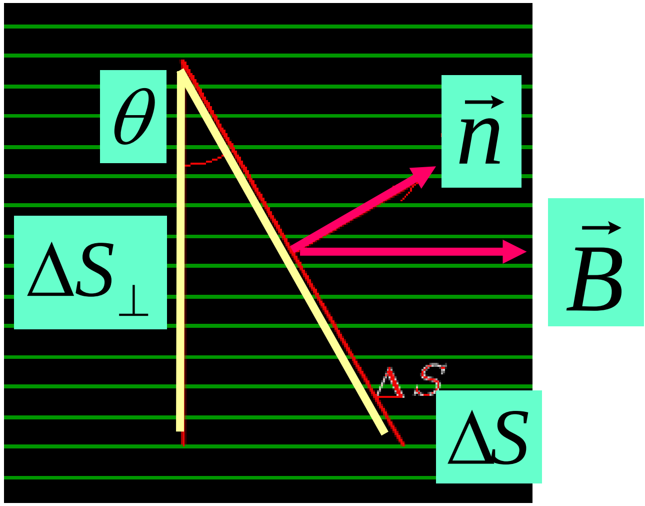
由规定得:

$$B=\frac{d\Phi_m}{dS_\perp}$$

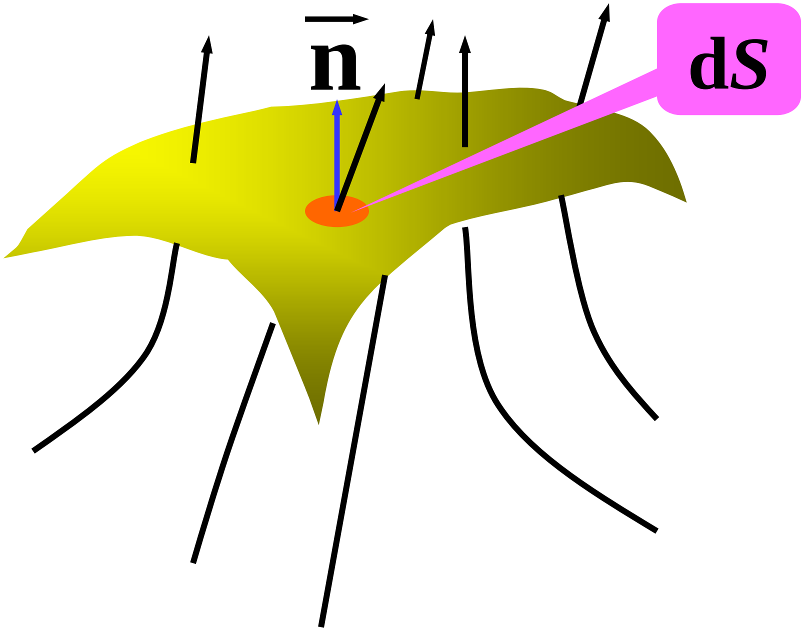
通过面积元dS的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi_m = B\mathrm{d}S_\perp = B\mathrm{d}S\cos\theta = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$





通过有限曲面 ***S*** 的磁通量为



$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

单位（SI）：

韦伯（Wb） $1(Wb) = 1(T \cdot m^2)$

对于闭合曲面S，规定：面元 的法线正方向由内指向曲面外侧，所以有

当$\vec{B}$线穿出封闭曲面时，$0 < \theta \le \dfrac{\pi}{2}, \Phi_m > 0$；

当$\vec{B}$线穿入封闭曲面时，$\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi, \Phi_m < 0$。

由于磁感应线是无头无尾的闭合曲线，故总通量为零，即

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

——真空中的磁场高斯定理

（反映磁场是无源场重要性质的公式）

静电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q/\varepsilon_0$$

$\vec{E}$线出自正电荷，收于负 电荷

静电场为有源场！

磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$\vec{B}$线无头无尾

磁场为无源场！

磁场与电场不同等的原因：自然界无磁单极

安培环路定理

磁场的整体特征

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(内)}$$

在真空中的磁场中，沿任何闭合路径 L 一周的 $\vec{B}$ 矢量的线积分（即 $\vec{B}$ 的环流），等于闭合路径内所包围并穿过的电流的代数和的 μ_0 倍，而与路径的形状大小无关。

Proof 设在真空中有一电流强度为 I 的无限长直导线，方向如图，在垂直于电流 I 的平面上任取闭合路径 L 为积分路径，磁感应强度 $\vec{B}$ 的环流为

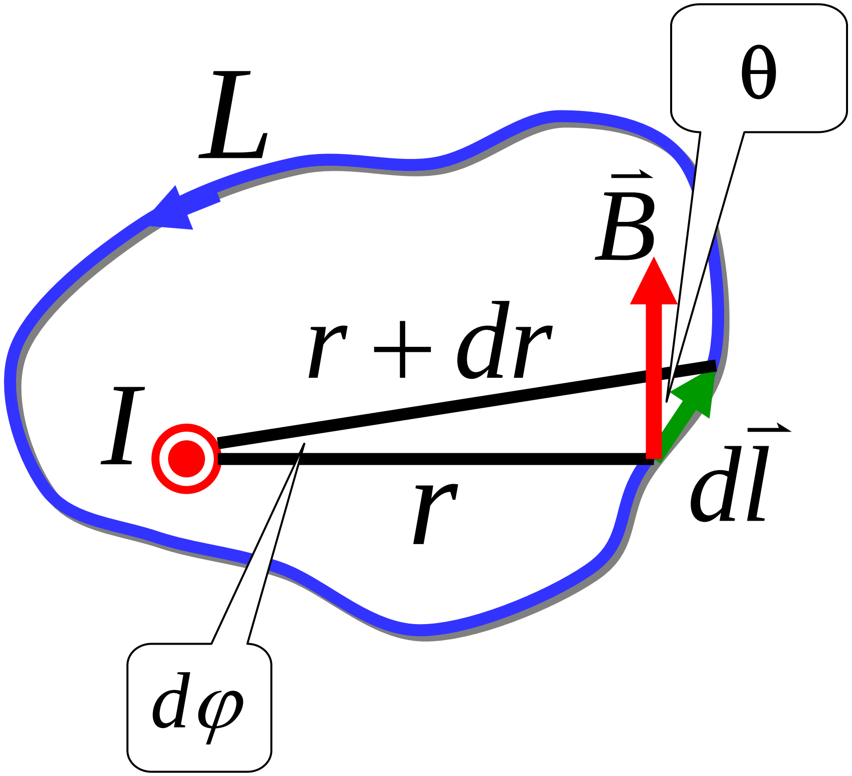
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos\theta dl$$

因为

$$\cos\theta dl = r d\varphi$$

以及

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



所以 $\vec{B}$ 的环流为 $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I$$

若闭合路径上某处 dl 不在上述平面内，则分解得

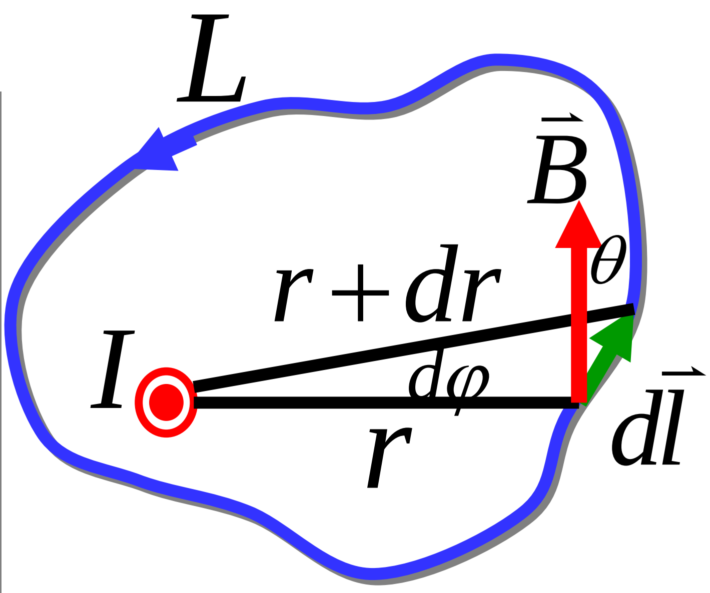
$$d\vec{l} = d\vec{l}_{//} + d\vec{l}_{\perp}$$

故有

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot\left(d\vec{l}_{//} + d\vec{l}_{\perp}\right)$$

$$= \oint_L B\cos 90^0 dl_{\perp} + \oint_L B\cos\theta dl_{//}$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi e} r d\varphi = \mu_0 I$$



仅适用于闭合的载流导线

（1）规定 L (loop) 与 I 构成右手螺旋关系为正，反之为负；

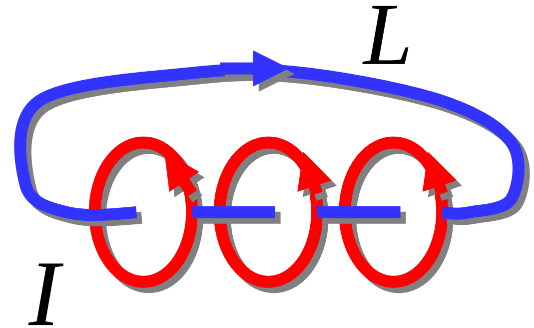
（2）$\sum I$ 为 L 所包围的电流，即可为线电流、面电流或体电流；

（3）$\vec{B}$（L 上的 $\vec{B}$ ）并非仅由 L 内包围的电流所产生，由内外电流共同产生；

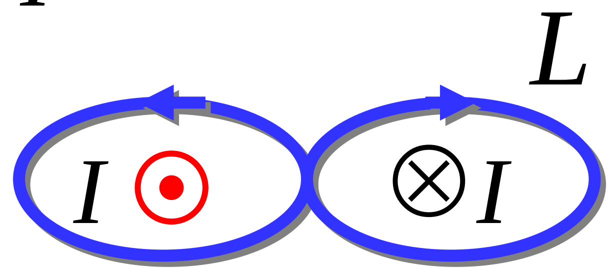
（4）定理仅适用于稳恒电流的稳恒磁场；

（5）若 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$，说明 L 内的电流没有贡献，但 $\vec{B}$ 仍存在。

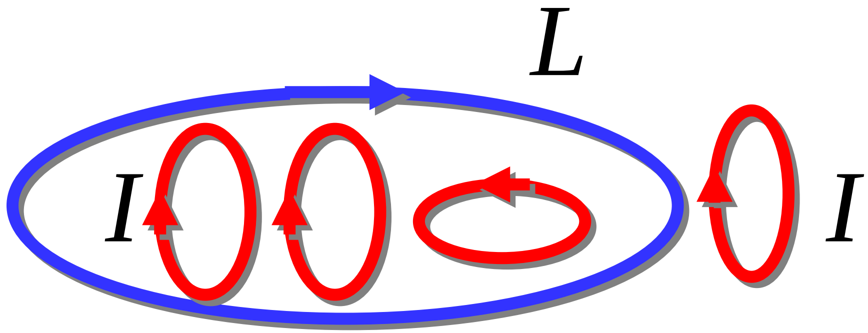
▲ $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$



▲ $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(2I)$$



▲ $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$



安培环路定理的数学表达式：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{(内)}$$

比较

静电场: $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ ⟹ 有源

$\int_L E\cdot d\vec{l} = 0$ ⟹ 无旋 ⟹ 保守场

稳恒磁场: $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ ⟹ 无源

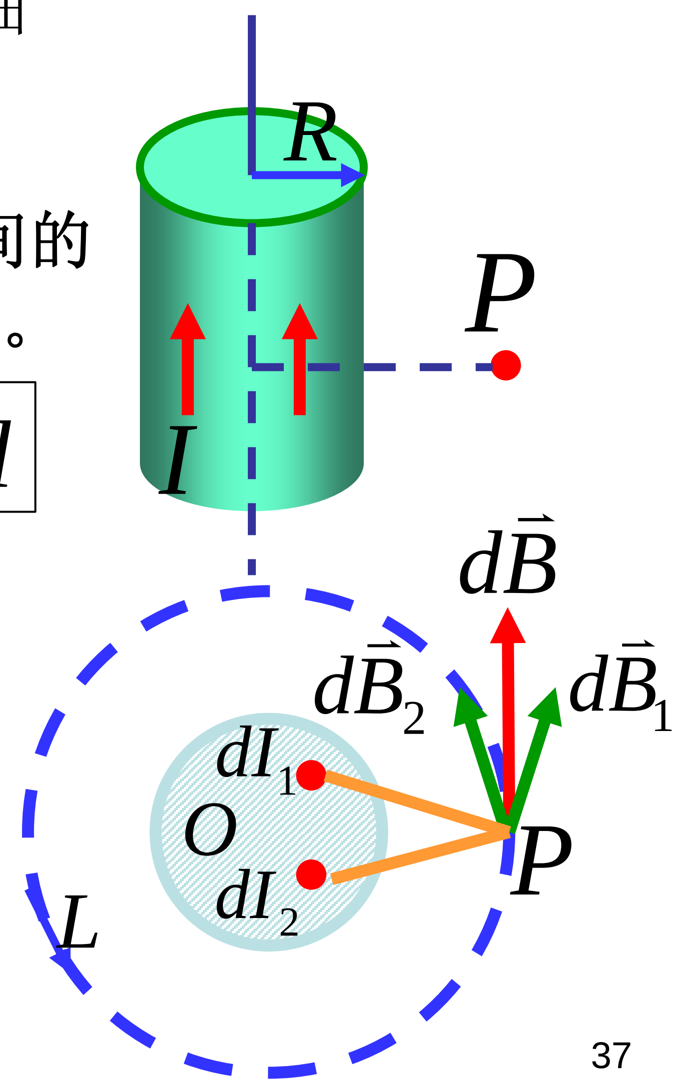
$\int_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$ ⟹ 有旋 ⟹ 非保守场

安培环路定理的应用

当电流分布具有对称性时（无限长、无限大、柱对称等），可应用安培环路定理求磁场分布。

例：无限长载流圆柱形导体的磁场分布

设真空中有一无限长载流圆柱体，圆柱半径为R，圆柱横截面上均匀地通有电流I，沿轴线流动。求磁场分布。



解： 由对称性分析，圆柱体内外空间的磁感应线是一系列同轴圆周线，如图所示。

（1）$r > R$

$$\boxed{\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cos 0^0 dl}$$

应用安培环路定理

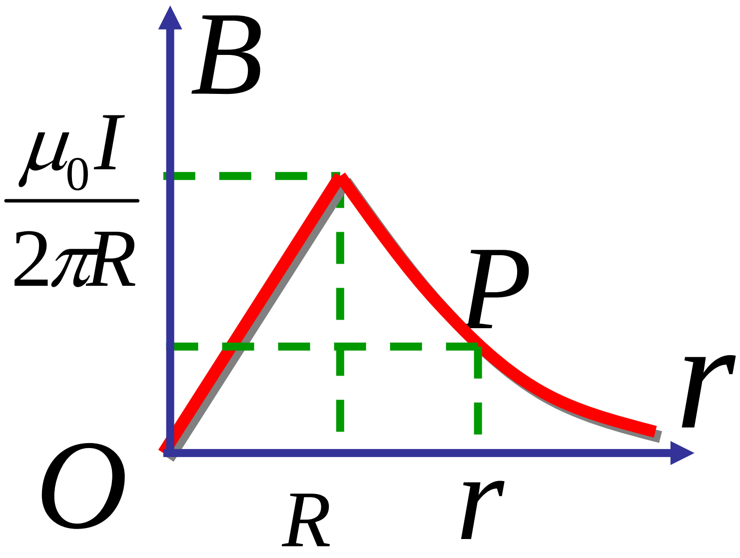
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r\cdot B = \mu_0 I$$

即

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

（2）$r < R$　　　同理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$



即　$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}$$

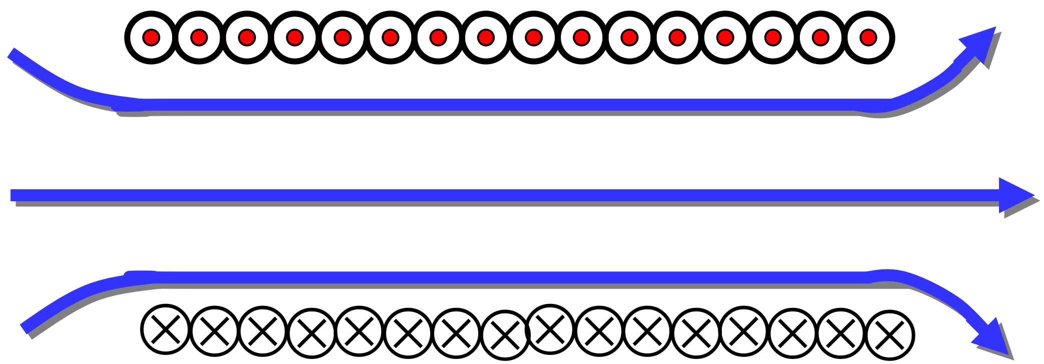
若为面分布，即电流 I 均匀分布在圆柱面上，则由安培环路定理得空间的磁场分布为

$$B = \begin{cases} 0 & r\langle R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r\rangle R \end{cases}$$

例：长直载流螺线管内的磁场分布

设此长直螺线管可视为无限长密绕螺线管，线圈中通电流 I，单位长密绕 n 匝线圈，求管内磁场分布。

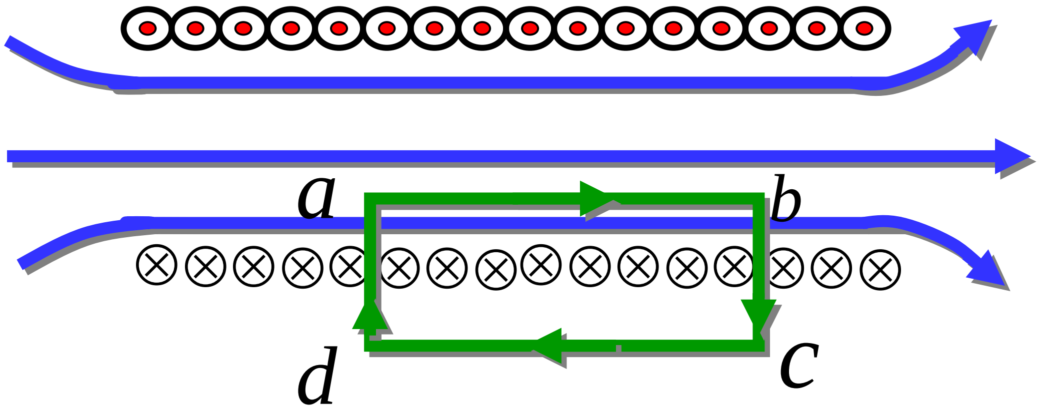
解： 由对称性分析，磁场分布如图：



管内部 $\vec{B}$ 线平行于轴线，离轴等距离处 $\vec{B}$ 大小相等。

管外部 贴近管壁处 $\vec{B}$ 趋近于零。

取过管内任一点 P 的矩形回路 $abcda$ 为积分回路 L ，绕行方向为 $a\to b\to c\to d\to a$ ，则 $\vec{B}$ 环流为



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

因为: $\int_{ab}\vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab} B dl = B\overline{ab}$

$$\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \int_{cd}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \qquad \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

故由安培环路定理得

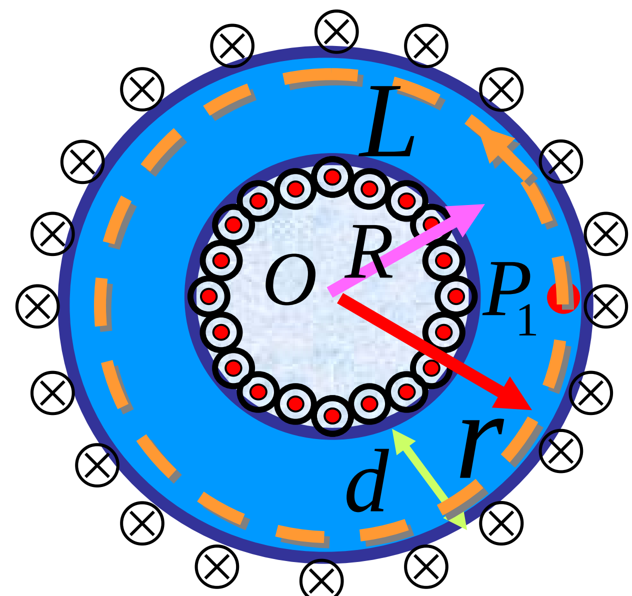
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\overline{ab} = +\mu_0 I\left(n\overline{ab}\right) \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

例：载流螺绕环的磁场分布

环形螺线管称为螺绕环。设螺绕环轴线半径R，环上均匀密绕 N 匝线圈，通有电流 I。求环内磁场分布。

解： 由对称性分析

（1）环内的 $\vec{B}$ 线为一系列与环同心的圆周线，在环内任取一点P_1，过P_1点作以O点为圆心，半径为 r 的圆周作积分回路 L，方向与电流 I 构成右手螺旋方向，由安培环路定理得 $\vec{B}$ 的环流为



$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

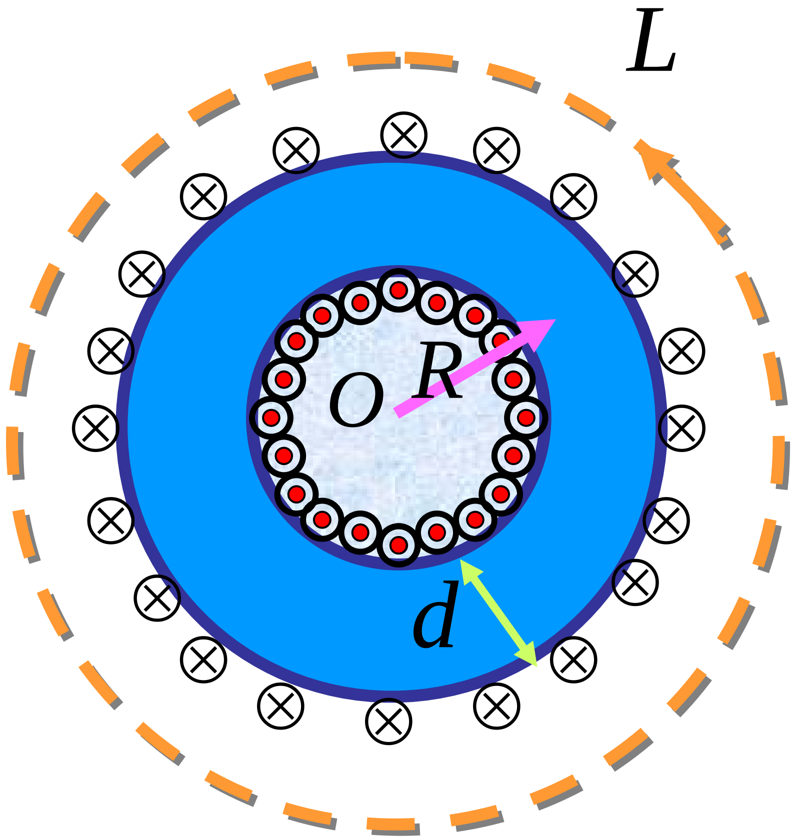
则得 $$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad \left(R-\frac{d}{2}<r<R+\frac{d}{2}\right)$$

$$B=\mu_0 nI$$

（2）管外：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot 2\pi r=0$$

$$\vec{B}=0$$



作业:

(Due date: Mar. 29)

4-3, 4-7, 4-8, 4-9, 4-12, 4-13