

两种定义下理想任意子气体热力学性质的研究

柴啸, 向前, 蔡汉伦, 康明宇

复旦大学 物理学系

(Dated: June 21, 2015)

本文研究了两种定义下的任意子气体的热力学性质。利用 Wilczek 磁流管模型导出了交换因子定义下的二维理想任意子气体的第二 virial 系数；介绍了 Haldane 分数不相容统计；求出了 Haldane 统计定义下的理想任意子气体的巨配分函数；导出了 Haldane 任意子气体的一些热力学量；研究了 Haldane 任意子气体的 Bose-Einstein 凝聚；研究了强筒并及弱筒并条件下的 Haldane 任意子气体的热力学性质；利用第二 virial 系数导出了二维 Haldane 任意子气体的等效相互作用势。

Usage: 热力学与统计物理 I 课程论文

I. 引言：任意子的提出和定义

在三维及更高维度空间当中，粒子或者服从 Bose-Einstein 统计，或者服从 Fermi-Dirac 统计。他们的自旋为整数（Bose 统计）或半整数（Fermi 统计），两种统计在量子力学上的主要区别为：多粒子状态下，进行粒子交换时的波函数对称性的不同，在两个粒子的状态中：

$$|\Psi_1\Psi_2\rangle = \pm|\Psi_2\Psi_1\rangle, \quad (1)$$

等式右边的系数 ± 1 分别代表 Bose 统计和 Fermi 统计。

而在二维空间中，存在一种介于两种统计之间的分数统计，使其系数可以取模为 1 的复数 [1]，即：

$$|\Psi_1\Psi_2\rangle = e^{i\theta}|\Psi_2\Psi_1\rangle, \quad (2)$$

式中，辐角 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，可取其间的任意实数，因此符合这种统计规律的粒子又称为任意子。可以看出，在二维空间当中，Bose 统计和 Fermi 统计仅仅是 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时的特殊情况。因此，对二维空间中任意子的研究更具备普适性，任意子的自旋不再仅仅是整数或者半整数，而是可以连续变化的，因此具有相当的复杂性。这是因为任意子之间存在较复杂的统计相互作用，所以它的单粒子配分函数不能推广到多粒子的情况，我们就很难得到相应的热力学量。

1977 年，Leinass 和 Myrheim 提出了二维的分数统计。1982 年，Frank Wilczek 将符合这种统计规律的粒子命名为任意子。同时他也提出了一种磁流管的动力学模型，展示了分数统计下任意子的物理应用 [2]。从此，科学家对任意子的研究进入了新的阶段，其在分数量子

Hall 效应、液氮薄膜及高温氧化物超导体的研究中，都有十分重要的应用。

事实上，任意子还有另一种定义方式。在前一种定义下，一维空间中的两个粒子交换，必然发生碰撞，导致任意子之间的力学效应不可忽略，1991 年，Haldane 对 Pauli 不相容原理进行了分数统计的推广，从另一角度，定义了不依赖空间维度的任意子模型。[3] Haldane 对 Pauli 不相容的推广如下：

$$\Delta d = -g\Delta N, \quad (3)$$

式中， Δd 表示粒子的数量改变 ΔN 后，新增粒子 Hilbert 空间维度的变化， g 为统计相互作用参数，对于玻色子，新加入的粒子不会受到已存在的粒子的影响，故其 Hilbert 空间维度不发生改变，因此 $g = 0$ ；对于费米子，新加入的粒子不能占据已存在的同种粒子的量子态，故其 Hilbert 空间维度要减少相应的维度，因此 $g = 1$ ；而当粒子服从介于 Bose 统计和 Fermi 统计之间的分数统计时， g 则取其他值，一般为 $0 < g < 1$ 。

Haldane 的推广可描述多种粒子的互关联统计，其公式为：

$$\Delta d_\alpha = -\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \Delta N_\beta, \quad (4)$$

其中 α, β 表示不同种类的粒子， $g_{\alpha\beta}$ 表示两种粒子之间的统计互作用，但本文仅研究同种粒子。

II. 任意子的磁流管模型

根据 Wilczek 的磁流管模型，两个任意子组成系统的拉格朗日量可以写为 [2]：

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2) + \hbar\alpha \frac{d\phi}{dt}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 分别为两个任意子的位矢， \hbar 为约化 Planck 常数， $\alpha = \theta/\pi$ ， θ 为交换算符产生的相位因子中的角度， ϕ 为两个粒子的相对位矢与极轴的夹角。由于我们所添加的项为一个函数的时间全导，因而没有添加项的拉格朗日量产生的运动方程与添加后产生的是一模一样的。这说明，从经典力学的角度来看，任意子与普通的粒子的运动规律没有任何的不同，因而任意子的特性是纯粹量子的。另外，由于这是一个两体问题，我们可以像处理经典的两体问题一样，用系统的质心的位矢，以及粒子的相对位矢重写拉格朗日量：

$$L = m\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{4}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \hbar\alpha\dot{\phi}. \quad (6)$$

质心动量是个不变量，不需要特别考虑。考虑 (6) 式中的相对运动项，将坐标系换为极坐标系，写出相对运动项所对应的哈密顿量：

$$H_r = \frac{1}{m} \left(p_r^2 + \frac{(p_\phi - \hbar\alpha)^2}{mr^2} \right). \quad (7)$$

可以看到，其与经典粒子哈密顿量不同仅在角动量项上。在经典的情形下，由于 $p_\phi \gg \hbar$ ，因而该式退化为经典的情形，这再一次说明任意子的特性只有在微观领域，量子特性变得十分重要时才会体现出来。

下面我们将利用该模型计算二体任意子气体的二阶 virial 系数。Virial 展开的定义如下：

$$\frac{P}{\rho kT} = 1 + a_2(\rho\lambda_T^2) + a_3(\rho\lambda_T^2)^3 + \dots \quad (8)$$

其中 P 为压强， $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar/mkT}$ 为热波长， a_2, a_3 为无量纲的 virial 系数， ρ 为粒子数密度。通过集团化展开，可以得到二阶 virial 系数与系统配分函数的关系 [4]：

$$a_2(\alpha) = -\frac{1}{4} - 2 \lim_{V \rightarrow 0} \left[\tilde{Z}_2(\alpha) - \tilde{Z}_2(0) \right], \quad (9)$$

其中 V 为体系面积， \tilde{Z}_2 是任意子参数为 α 时，两个任意子组成的系统，相对运动部分所对应配分函数，一个对全相空间的积分：

$$\tilde{Z}_2(\alpha) = \frac{1}{h^2} \int e^{-\beta \left[\frac{p_r^2}{m} + \frac{(p_\phi - \hbar\alpha)^2}{mr^2} \right]} dr d\phi dp_r dp_\phi. \quad (10)$$

然而一旦作变量代换 $p_\phi \rightarrow p_\phi + \hbar\alpha$ ，积分区间并未改变，而被积函数则退化到了经典的情形，这说明需要对其中的某些量进行量子化处理。在此考虑角动量的量子化处理，即将积分 $\int dp_\phi$ 变为 $\sum_l \hbar$ ，(10) 式可以进一步变为：

$$\sum_{l \text{ 为偶数}} \tilde{Z}_2^l(\alpha), \quad (11)$$

其中：

$$\tilde{Z}_2^l(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2\pi r^2}(l-\alpha)^2} dr. \quad (12)$$

利用 Poisson 公式：

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-a^2(p+b)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi b) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4a^2}} \right], \quad (13)$$

得到：

$$\sum_{l \text{ 为偶数}} \left[\tilde{Z}_2^l(\alpha) - \tilde{Z}_2^l(0) \right] = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4}, \quad (14)$$

$$a_2(\alpha) = -\frac{1}{4} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (15)$$

III. HALDANE 统计下任意子气体的性质

A. Haldane 统计的微观态

在 I 节中，我们提到了 Haldane 对于 Pauli 不相容原理的推广，如 (3) 式所示，对两边进行积分：

$$\int_{d(1)}^d dd = -g \int_1^N dN, \quad (16)$$

其中，左式积分下限表示系统在没有粒子的情况下加入一个粒子时，该粒子的 Hilbert 空间维度，显然等于单粒子的状态数，设为 G ，当粒子处于同一能级时， G 就是单粒子的简并度。积分结果为：

$$d = G - g(N - 1), \quad (17)$$

可以将 d 理解成有效简并度，不过此时“简并度”与粒子总数有关联。仿照 Bose 统计的微观态数目表达式，我们可以写出 Haldane 统计单能级上的量子态数 W 的表达式：

$$W = \frac{(d + N - 1)!}{N!(d - 1)!}. \quad (18)$$

当 d 为非整数时上式的阶乘实际为 Γ 函数, d 为整数时退化为阶乘。当粒子为玻色子时, $d = G$, (18) 式退化为 Bose 统计:

$$W = \frac{(a + N - 1)!}{N!(G - 1)!}; \quad (19)$$

同样, 当粒子为费米子时, $d = G - N + 1$, (18) 式退化成 Fermi 统计:

$$W = \frac{G!}{N!(G - N)!}. \quad (20)$$

考虑有 N 个粒子占据 G 组能级, 每组能级的粒子数为 N_i , 单粒子态数为 G_i , 则有总微观状态数为:

$$W = \prod_i W_i = \prod_i \frac{[G_i + (N_i - 1)(1 - g)]!}{N_i! [G_i - gN_i - (1 - g)]}. \quad (21)$$

可以看出 $g = 0$ 和 $g = 1$ 时, 分别退化成 Bose 统计与 Fermi 统计。因此, (21) 式可以看作一种介于两者之间的统计规律。

$$\begin{aligned} & \delta \ln W - \alpha \delta N - \beta \delta E \\ &= \sum_i (\delta \ln W_i - \alpha \delta N_i - \beta \varepsilon_i \delta N_i) \\ &= \sum_i \{ (1 - g) \ln [G_i + (N_i - 1)(1 - g)] - \ln N_i + g \ln [G_i - gN_i - (1 - g)] - \alpha - \beta \varepsilon_i \} \delta N_i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

不妨假设 $G_i \gg 1$, 并定义能级 i 的平均占有粒子数为 $n_i = N_i/G_i$, 即每个量子态上的平均粒子数。则 (26) 式变为:

$$[1 + (1 - g)n_i]^{1-g} (1 - gn_i)^g = n_i e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}. \quad (27)$$

为使之后的计算简便, 并可以将 Bose 分布和 Fermi 分布包括进来, 我们假设 (27) 式有如下形式的解:

$$n_i = \frac{1}{\omega_i + g}, \quad (28)$$

由 (27) 式可知 ω_i 满足:

$$\varepsilon_i = kT \ln [z \omega_i^g (1 + \omega_i)^{1-g}], \quad (29)$$

其中, z 为逸度, 定义为 $z = e^{-\alpha} = e^{\mu/kT}$ 。引入参量 ω_0

B. Haldane 统计的最可几分布

下面我们计算 Haldane 统计的最可几分布, 即求 $\ln W$ 的极大值点。假设系统的总能量 E 与总粒子数 N 是确定的, 这样我们就有以下约束条件:

$$N = \sum_i N_i, \quad (22)$$

$$E = \sum_i \varepsilon_i N_i, \quad (23)$$

其中 ε_i 表示第 i 个能级的能量。由于约束的存在, 我们引入 Lagrange 乘子 α, β , 利用已有的热力学知识我们知道:

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \quad (24)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad (25)$$

式中 μ 为系统的化学势, T 为温度, k 为 Boltzmann 常数。考虑到 $N \gg 1$, 由 Lagrange 乘法:

表示零能级处的 ω 值, 则有:

$$\omega_0^{-g} (1 + \omega_0)^{g-1} = z. \quad (30)$$

C. Haldane 统计的巨配分函数

下面我们计算 Haldane 统计下的巨配分函数。保持 z 与 T 不变, (29) 式等号两边同时对 ω_i 求偏微分, 可得:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \omega_i} \right)_{z,T} = kT \frac{\omega_i + g}{\omega_i (1 + \omega_i)}. \quad (31)$$

巨配分函数可以写成如下形式 [5]:

$$\Xi = \prod_p \Xi_p, \quad (32)$$

其中 p 表示对所有量子态的乘积。能级 i 的平均占有粒子数为 n_i 可以由巨配分函数求得：[6]

$$\begin{aligned} n_i &= -\frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \varepsilon_i} \right)_{z, T, \text{其他 } p} \\ &= -kT \left(\frac{\partial \ln \Xi_p}{\partial \varepsilon_i} \right)_{z, T} \\ &= -kT \left(\frac{\partial \ln \Xi_p}{\partial \omega_i} \right) \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \varepsilon_i} \right)_{z, T} \\ &= -\frac{\omega_i(1 + \omega_i)}{\omega_i + g} \frac{\partial \ln \Xi_p}{\partial \omega_i}. \end{aligned} \quad (33)$$

最后一步用到了 (31) 式。联立 (28)(33) 式得：

$$\frac{\partial \ln \Xi_p}{\partial \omega_i} = -\frac{1}{\omega_i(\omega_i + 1)}, \quad (34)$$

两边积分并令积分常数为零，得：

$$\Xi_p = 1 + \frac{1}{\omega_i}. \quad (35)$$

由此我们得到巨配分函数：

$$\Xi = \prod_p \left(1 + \frac{1}{\omega_i} \right). \quad (36)$$

D. 任意子气体的热力学性质

下面我们考察不同能谱下，任意维理想任意子气体的热力学性质。设理想任意子气体的能谱关系式为：

$$\varepsilon = ap^\sigma, \quad (37)$$

其中， p 为动量， a 与 σ 为参数。可以证明态密度函数为 [7]，（暂不考虑自旋自由度）：

$$D(\varepsilon) = \frac{Vd\varepsilon^{\frac{d}{\sigma}-1}}{\sigma a^{\frac{d}{\sigma}}(2\sqrt{\pi}\hbar)^d \Gamma(1 + \frac{d}{2})}, \quad (38)$$

其中 d 为空间维度， V 为空间体积。利用 (36) 式及分部积分的方法，可以得到巨配分函数的对数：

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \int_0^\infty D(\varepsilon) \ln \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) d\varepsilon \\ &= \frac{Vd}{\sigma a^{\frac{d}{\sigma}}(2\sqrt{\pi}\hbar)^d \Gamma(1 + \frac{d}{2})} \int_0^\infty \varepsilon^{\frac{d}{\sigma}-1} \ln \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) d\varepsilon \\ &= \frac{V}{a^{\frac{d}{\sigma}}(2\sqrt{\pi}\hbar)^d \Gamma(1 + \frac{d}{2})} \left[\varepsilon^{\frac{d}{\sigma}} \ln \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) \Big|_{\varepsilon=0}^\infty \right. \\ &\quad \left. - \int_{\omega_0}^\infty \varepsilon^{\frac{d}{\sigma}} d \ln \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

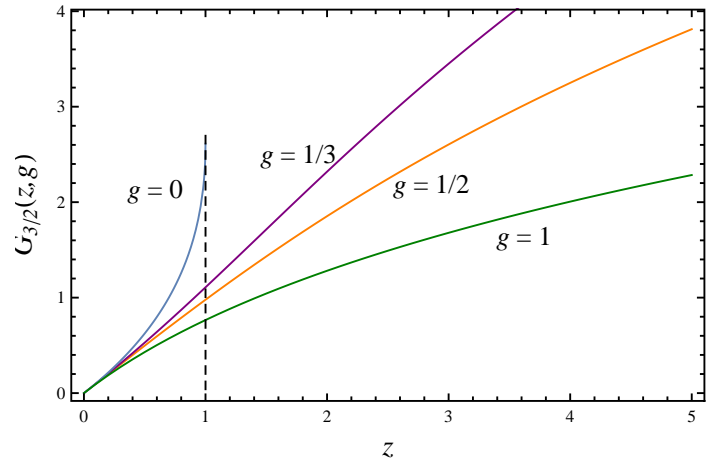


图 1. $G_{3/2}(z, g)$ 在不同 g 下的函数形式。其中 $g = 0$ 时，退化为玻色子，因此只取到 $z < 1$ 的情况。

当 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 或 0 时， $\varepsilon^{d/\sigma} \ln(1 + 1/\omega) \rightarrow 0$ ，故分部积分结果的第一项是 0，第二项中已将积分下限改写为 $\varepsilon = 0$ 对应的 ω_0 。将结果进一步化简得到：

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \frac{V}{a^{\frac{d}{\sigma}}(2\sqrt{\pi}\hbar)^d \Gamma(1 + \frac{d}{2})} \int_{\omega_0}^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{d}{\sigma}}}{\omega(\omega + 1)} d\omega \\ &= AVT^{\frac{d}{\sigma}} G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g), \end{aligned} \quad (40)$$

式中 A 为常参量：

$$A = \frac{k^{\frac{d}{\sigma}} \Gamma(1 + \frac{d}{\sigma})}{a^{\frac{d}{\sigma}} (2\sqrt{\pi}\hbar)^d \Gamma(1 + \frac{d}{2})}, \quad (41)$$

$G_n(z, g)$ 是 Calogero-Sutherland 积分函数 [8]，其表达式为：

$$G_n(z, g) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{\omega(x) + g} dx, \quad (42)$$

其中 $\omega(x)$ 是将 (29) 式作代换 $x = \varepsilon/kT$ 之后，求解得到的：

$$\omega^g(1 + \omega)^{1-g} = \frac{e^x}{z}. \quad (43)$$

可以证明，函数 $G_n(z, g)$ 满足以下关系式 [8]：

$$\frac{\partial G_n(z, g)}{\partial \ln z} = \begin{cases} G_{n-1}(z, g), & n \neq 1 \\ \frac{1}{\omega_0 + g}, & n = 1 \end{cases}, \quad (44)$$

得到了巨配分函数，我们就能求出一系列的热力学

量：

$$N = \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln z} = AVT^{\frac{d}{\sigma}} G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} E &= kT \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln T} = \frac{kAVdT^{\frac{d}{\sigma}+1}}{\sigma} G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g) \\ &= \frac{NkT}{\sigma} \frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} P &= kT \frac{\partial \ln \Xi}{\partial V} = kAT^{\frac{d}{\sigma}+1} G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g) \\ &= \frac{NkT}{V} \frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} S &= k \left(\ln \Xi - \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln \alpha} - \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \ln \beta} \right) \\ &= k \left(\ln \Xi - N \ln z + \frac{E}{kT} \right) \\ &= kAVT^{\frac{d}{\sigma}} \left[\left(\frac{d}{\sigma} + 1 \right) G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g) - \ln z G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g) \right] \\ &= Nk \left[\left(\frac{d}{\sigma} + 1 \right) \frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)} - \ln z \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

下面我们计算系统的等体热容。由等体热容的定义：

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{N, V} \\ &= \frac{Nkd}{\sigma} \left[\frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)} + \left(\frac{\partial \ln z}{\partial \ln T} \right)_{N, V} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(1 - \frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)G_{\frac{d}{\sigma}-1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}^2(z, g)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (49)$$

于是问题化为求逸度对温度的偏导。(45)式两边对 T 求偏导，并保持 N, V 不变，可得：

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N, V} = \begin{cases} -\frac{z}{T} \frac{d}{\sigma} \frac{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}-1}(z, g)}, & \frac{d}{\sigma} \neq 1 \\ -\frac{z}{T} (\omega_0 + g) G_1(z, g), & \frac{d}{\sigma} = 1 \end{cases}, \quad (50)$$

代入 (49) 式得热容表达式：

$$C_V = \begin{cases} Nk \left[\frac{d}{\sigma} \left(1 + \frac{d}{\sigma} \right) \frac{G_{\frac{d}{\sigma}+1}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)} - \frac{d^2}{\sigma^2} \frac{G_{\frac{d}{\sigma}}(z, g)}{G_{\frac{d}{\sigma}-1}(z, g)} \right], & \frac{d}{\sigma} \neq 1 \\ Nk \left[2 \frac{G_2(z, g)}{G_1(z, g)} - (\omega_0 + g) G_1(z, g) \right], & \frac{d}{\sigma} = 1 \end{cases}. \quad (51)$$

E. 理想任意子气体与 Bose-Einstein 凝聚

下面我们讨论理想任意子气体是否存在 Bose-Einstein 凝聚。由 (30) 式我们可以得到基态能级对应的 ω_0 ，代入 (28) 式可得基态能级的平均占有数 n_0

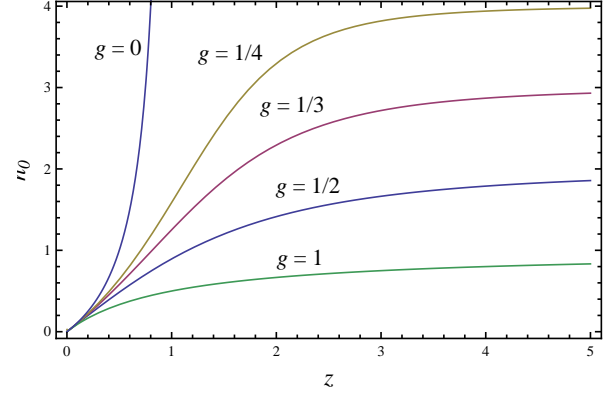


图 2. 不同 g 参数下，基态平均占有数 n_0 随 z 的变化

由图2我们可以看出，只有 $g = 0$ 时， n_0 才会发散；而当 $g > 0$ 时， n_0 收敛于有限值 $1/g$ ，不可能达到大量粒子均处于基态的状态。因此，只有 $g = 0$ ，即粒子为玻色子时，才可能发生 Bose-Einstein 凝聚。

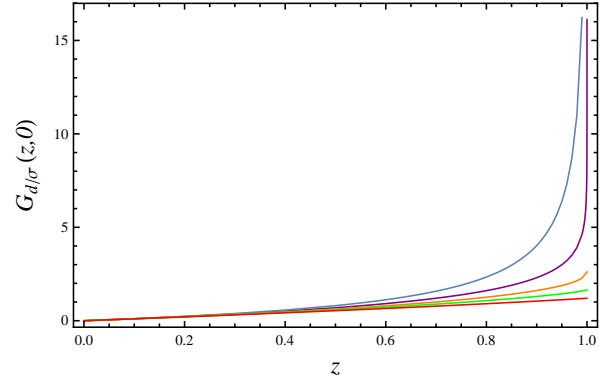


图 3. 不同 d/σ 下的 $G_{d/\sigma}(z, 0)$ ， $d/\sigma = 1/2, 1, 3/2, 2, 3$ (从上至下)

下面我们讨论空间维度 d 与能谱因子 σ 对于凝聚的影响。我们知道，(45) 式实际计算的是激发态的粒子数 N_{exc} [9]。当 $z \rightarrow 1$ 时，若 $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 能够发散，说明激发态上的粒子数没有上限；若 $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 是收敛的，说明激发态上的粒子数在弱简并情况下是有上限的，因此当 $T \rightarrow 0$ 时会发生 Bose-Einstein 凝聚。我们只要讨论在不同 d, σ 值下， $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 在 $z = 1$ 处的极限情况，即

可知道是否会发生 Bose-Einstein 凝聚。

由图3可知, 当 $\sigma = 2$ 且 $d = 3$ 时, 即我们熟悉的三维非相对论情形, $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 会在 1 处收敛, 收敛值为 2.612, 说明会发生 Bose-Einstein 凝聚。当 d/σ 的值取 1 或 1/2 时, $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 会发散。而当 d/σ 取 2 和 3 时, 函数仍是收敛的, 也会发生 Bose-Einstein 凝聚。

我们也可以直接推导 $G_{d/\sigma}(z, 0)$ 在 $z = 1$ 处的收敛情况。已经知道函数 $G_{d/\sigma}(z, g)$ 有如下级数展开式 [10]:

$$G_n(z, g) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n} \frac{\Gamma(l - lg)}{\Gamma(l)\Gamma(1 - lg)}, \quad (52)$$

其收敛半径与 g 有关:

$$R(g) = \frac{1}{g^g(1-g)^{1-g}}. \quad (53)$$

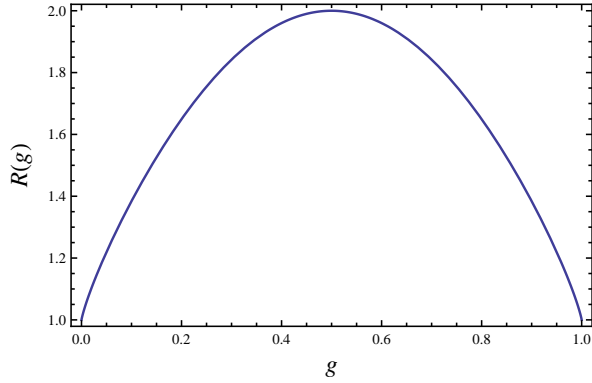


图 4. (52) 式的收敛半径。当 $z < 1$ 时, 对 $0 \leq g \leq 1$ 级数均收敛

当 $g = 0$ 时, 收敛半径为 1, 即在 $0 < z < 1$ 范围内级数收敛, 说明该级数展开式可以应用于 Bose 气体; 当 $z \rightarrow 1$ 时, $G_n(z, 0)$ 的极限有如下表示:

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} G_n(z, 0) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n} = \zeta(n). \quad (54)$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta 函数。由数学知识我们知道, 只有当 $n > 1$ 时 $\zeta(n)$ 才有收敛值。因此, 只有满足 $d/\sigma > 1$ 才能够发生 Bose-Einstein 凝聚。对于非相对论情况, $\sigma = 2$, 只有三维及三维以上的空间才能发生 Bose-Einstein 凝聚; 对于极端相对论情况, $\sigma = 1$, 所以只有二维及二维以上的空间才能发生 Bose-Einstein 凝聚。

对于能够发生凝聚的情形, 我们可以计算相应的临界温度:

$$T_c = \left[\frac{N}{AV\zeta\left(\frac{d}{\sigma}\right)} \right]^{\frac{\sigma}{d}}, \quad (55)$$

F. $g > 0$ 的强简并任意子气体

对于强简并任意子气体, 其 ω 满足方程:

$$\omega^g(\omega + 1)^{1-g} = e^{\beta(\varepsilon - \mu)}, \quad (56)$$

当 $T = 0\text{K}$ 且 $\varepsilon < \mu_0$ (μ_0 表示零温下的化学势) 时, 由此可得 ω 为 0。从而有 $T = 0\text{K}$, $g > 0$ 且 $\varepsilon < \mu_0$ 时:

$$n_i = \frac{1}{g + \omega} = \frac{1}{g}, \quad (57)$$

而当 $T = 0\text{K}$ 且 $\varepsilon > \mu_0$ 时, $\omega \rightarrow \infty, n_i = 0$ 。亦即对于 $g > 0$ 的任意子, 在某一个能级以下所有的能级都被占有, 每个能级粒子数 $1/g$, 而在该能级以上, 所有能级均为空:

$$n_i = \begin{cases} \frac{1}{g}, & \varepsilon < \mu_0 \\ 0, & \varepsilon > \mu_0 \end{cases}, \quad (58)$$

可以看到对于 $g > 0$ 的任意子, 在零温时也会出现 Fermi 球。我们将粒子的最高填充能级称为 Fermi 能级, 记为 $\varepsilon_F = \mu_0$ 。此时系统的总粒子数为:

$$N = \frac{1}{g} \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{AV\varepsilon_F^n}{gk^n\Gamma(n+1)}, \quad (59)$$

其中 $D(\varepsilon)$ 为任意子的态密度函数, $n = d/\sigma$, 而该能量最大值即为 Fermi 能级, 由此可解得 Fermi 能级为:

$$\varepsilon_F = k \left(\frac{gN\Gamma(n+1)}{AV} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (60)$$

对于 T 略高于 0K 的情况, 有:

$$N = AVT^n G_n(z, g), \quad (61)$$

其中 $z \rightarrow \infty$ 时 G 的展开式为 [10]:

$$G_n(z, g) = \frac{\ln z^n}{g\Gamma(n+1)} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{(gn(n-1))}{\ln^2 z} + \dots \right). \quad (62)$$

跟据 (45) 式可求得化学势近似为:

$$\frac{\mu}{\varepsilon_F} = 1 - \frac{\pi^2}{6} g(n-1) \left(\frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2. \quad (63)$$

对于系统的内能有：

$$E = \frac{kAdT^{n+1}}{\sigma} G_{n+1}(z, g), \quad (64)$$

稍化简可得：

$$E = \mu N \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\mu}{\varepsilon_F} \right)^n \left(1 + \frac{\pi^2 gn(n+1)}{6(\beta\mu)^2} + \dots \right). \quad (65)$$

利用 (63) 式中求得 μ 的近似式，可得到系统的能量为：

$$\frac{u}{\varepsilon_F} = N \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(1 + \frac{(n+1)\pi^2 (kT)^2}{12\varepsilon_F^2} \right). \quad (66)$$

从式中可以看到，在 T 略高于 0 的情况，内能与温度的二次方成正比，从而热容与 T 的一次方成正比，在 T 趋于 0 时，热容亦趋于 0，这正是热力学第三定律所要求的。

G. 弱简并条件下的任意子气体

在高温下，气体处于弱简并状态时 $z < 1$ ，展开式 (52) 是收敛的。我们利用 (52) 式可以得到一些热力学量的高温极限。将 (52) 式保留至二阶近似：

$$G_n(z, g) = z + \frac{z^2}{2^n} (1 - 2g) + o(z^2). \quad (67)$$

代入 (45) 式，保留 z 的一阶项，我们可以直接得到逸度 z 的表达式：

$$z = \frac{N}{AVT^{\frac{d}{\sigma}}}. \quad (68)$$

将 (67) 式代入 (46)(47) (48)(51) 式，我们可以得到以下热力学量的近似值：

$$E = \frac{dNkT}{\sigma} \left[1 - \frac{(1-2g)z}{2^{\frac{d}{\sigma}+1}} + o(z) \right], \quad (69)$$

$$P = \frac{NkT}{V} \left[1 - \frac{(1-2g)z}{2^{\frac{d}{\sigma}+1}} + o(z) \right], \quad (70)$$

$$S = Nk \left\{ \left(\frac{d}{\sigma} + 1 \right) \left[1 - \frac{(1-2g)z}{2^{\frac{d}{\sigma}+1}} + o(z) \right] - \ln z \right\}, \quad (71)$$

$$C_v = \begin{cases} Nk \left[\frac{d}{\sigma} + \frac{d}{\sigma} \left(\frac{d}{\sigma} - 1 \right) \frac{z(1-2g)}{2^{\frac{d}{\sigma}+1}} + o(z) \right], & \frac{d}{\sigma} \neq 1 \\ Nk \left[2 - \left(\omega_0 + \frac{1}{2} \right) z + o(z) \right], & \frac{d}{\sigma} = 1 \end{cases} \quad (72)$$

考虑二维空间，非相对论情况，将 (68) 式代入 (70) 式，我们得到：

$$P = \frac{NkT}{V} \left[1 - \frac{(1-2g)N}{4AVT} + o\left(\frac{N}{AVT}\right) \right] \\ = \rho kT \left[1 - \frac{(1-2g)\rho\lambda_T^2}{4} + o(\rho\lambda_T) \right], \quad (73)$$

其中第二个等号用到了 (41) 式。这里 V 表示平面面积， $\rho = N/V$ 表示粒子数密度， λ_T 为热波长。因此我们得到了 Haldane 统计下非相对论二维任意子气体的第二 virial 系数：

$$a_2(g) = -\frac{(1-2g)}{4}. \quad (74)$$

我们发现与第一种定义下的任意子不同，Haldane 统计下的任意子的 a_2 与 g 为线性关系。这说明 Haldane 统计定义的任意子与第一种定义的任意子并不能等同。

H. 用第二 virial 系数讨论

二维任意子气体的等效相互作用势

由之前的计算，已经得到二维任意子二阶 virial 系数为：

$$a_2(g) = -\frac{1}{4}(1-2g), \quad (75)$$

即对于每种特定的任意子，其二阶 virial 系数为一个常数，我们可以将有统计相互作用的任意子气体看成有相互作用势的经典理想气体。此时二阶 virial 系数亦可用集团化展开直接求出 [11]：

$$a_2(g) = \frac{2m\pi^2 kT}{h^2} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\frac{u(r)}{kT}} \right) r dr. \quad (76)$$

可以考虑势场为高斯函数形式：

$$u(r) = A(g)e^{-kr^2}, \quad (77)$$

其中 $A(g)$ 为待定的 g 的函数， k 为一个常数，由于 $e^{u/kT} \approx 1$ ，故可以展开为：

$$e^{-\frac{u(r)}{kT}} = 1 - \frac{A(g)e^{-kr^2}}{kT}, \quad (78)$$

代入式 (76) 积分可得：

$$a_2(g) = \frac{2m\pi^2}{h^2} \int_0^\infty A(g)e^{-kr^2} r dr \\ = \frac{m\pi^2}{\sqrt{k}h^2} A(g), \quad (79)$$

从而求得：

$$A(g) = -\frac{1}{4}(1-2g)\frac{\sqrt{k}h^2}{m\pi^2}. \quad (80)$$

IV. 结论

由于交换因子定义的任意子气体的配分函数不能从单粒子推广到多粒子的情形，所以我们研究该种任意子气体的性质会十分困难。我们利用 Wilczek 磁流管模型计算得到第二 virial 系数，发现第二 virial 系数只与相因子 α 有关，其表达式为 $-1/4 + \alpha - \alpha^2/4$ ，当 $\alpha = 0$ 或 1 时其第二 virial 系数退化成 Bose 气体和 Fermi 气体的形式。

我们求出了 Haldane 统计下的任意子气体的一系列热力学量，并利用求得的结果讨论了不同情形下的任意子气体的性质。我们讨论了任意子气体的 Bose-Einstein 凝聚情况，发现只有 $g = 0$ ，即 Bose 气体才能发生凝聚，并且维度 d 与能谱常数 σ 必须满足关系式 $d/\sigma > 1$ 。在强简并情况下，我们发现 $g > 0$ 的情况下会出现类似 Fermi 能级的情况，并且热容按 T 的幂次趋于零，这与热力学第三定律相符。我们计算了弱简并下的热力学量的近似式，并导出了二维非相对论情形下的第二 virial 系数，发现与第一种定义的任意子第二 virial 系数不相同，这说明两种定义下的任意子不能等同。最后，我们尝试利用二维 Haldane 任意子气体的第二 virial 系数导出了与统计相互作用等效的相互作用势的形式，发现是高斯函数形式的相互作用势。

-
- [1] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *Il Nuovo Cimento B Series* 11 **37**, 1 (1977).
- [2] F. Wilczek, *Physical Review Letters* **49**, 957 (1982).
- [3] F. Haldane, *Physical review letters* **67**, 937 (1991).
- [4] A. Khare, *Fractional statistics and quantum theory*, Vol. 1 (2005).
- [5] Y.-S. Wu, *Physical review letters* **73**, 922 (1994).
- [6] R. K. Pathria and P. D. Beale, “Statistical mechanics, third edition,” (Academic Press, 2011) p. 147, 3rd ed.
- [7] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [8] G. G. Potter, G. Müller, and M. Karbach, *Physical Review E* **75**, 061120 (2007).
- [9] 林宗涵, “热力学与统计物理学,” (北京大学出版社, 2007) p. 350, 1st ed.
- [10] G. S. Joyce, S. Sarkar, J. Spal, K. Byczuk, *et al.*, *Physical Review B* **53**, 990 (1996).
- [11] R. K. Pathria and P. D. Beale, “Statistical mechanics, third edition,” (Academic Press, 2011) p. 309, 3rd ed.