

第五章 信号分析与处理

5.1 概述

5.1.1 信号的概念和分类

在科学研究和生产过程中,经常要对许多客观存在的物体或物理的运动过程进行观测,这些客观存在的运动事物中包含着大量标志其本身所处的时间空间特征的数据和“情报”,这些数据和情报就是该事物的“信息”。“信号”是“信息”的载体,是信息的表现形式。信息与信号是互相联系的两个不同概念。信号不等于信息,但信息则是信号所载荷的内容。

测试系统是通过某种技术手段,从被测对象的运动状态中提取所需的信息。这个信息从物理的角度讲,是以某种信号的形式反映出来的。

在工程实际中,测试系统包括信号的获取、加工、处理、显示、反馈、计算等,因此测试系统对被测参量测试的整个过程都是信号的流程。

1. 信号的基本概念

信息本身不具有能量及物质,故信息的传递必须借助于某种中间媒介,而这个包含有特定信息的媒介即为信号。信号一般表现为声、光、电、磁等物理量。

信号一般可以用单个或多个独立变量的函数或图形表示。信号可以描述极为广泛的物理现象,可以计算,合成及分解。一般信号具有以下性质:

- (1) 信号具有特定的意义,即含有特定的信息;
- (2) 信号具有一定的能量;
- (3) 信号易于被测得或感知;
- (4) 信号易于被传输。

2. 信号的分类

为了更好地了解信号的物理特性,常将信号分类后进行研究。常见的分类方法有下列几种:

1) 按信号的规律分类

按信号的规律,信号可分为确定性信号和非确定性信号。

确定性信号:可以用明确的数学关系式描述或可由实验多次复现的信号。

非确定性信号:不能用数学关系式描述,而且其幅值、相位,频率不可预知。这类信号只能用概率统计的规律加以描述。

然而,在实际工程测试过程中,其信号的物理过程往往是很复杂的,即无理想的确定性信号也无理想的非确定性信号,而是相互掺杂的。

上述两大类信号还可根据各自的特点作更细致的划分,见图 5.1 所示。

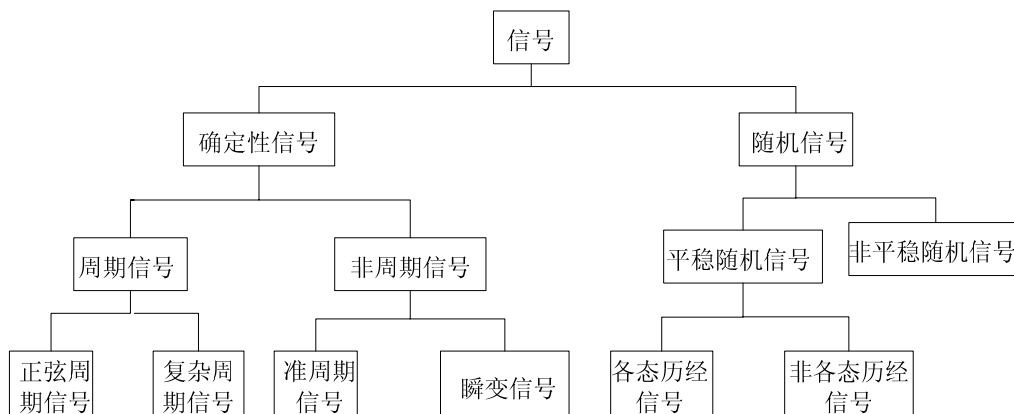


图 5.1 信号的分类

2) 按信号的函数性质分类

按表示的函数性质，信号可分为连续时间信号和离散时间信号。

连续时间信号：是指在某一指定时间内，除若干个第一类间断点外，该函数都可给出确定的函数值的信号。

离散时间信号：是指仅在某些不连续的时刻有定义的信号。

除了对函数在时间上有连续时间信号与离散时间信号之分外，还可以幅值取值上将信号分为连续幅值信号与离散幅值信号。

对于时间和幅值均连续的信号称为模拟信号。时间和幅值均离散，且幅值被量化的信号称为数字信号。

3) 按信号的能量分类

按信号的能量可将信号分为能量信号及功率信号两大类。

能量信号：在所分析的区间能量为有限值的信号。

功率信号：具有有限平均功率的信号。一个能量信号具有零平均功率，而一个功率信号具有无限大能量。

5.1.2 信号的时域分析和频域分析

通常，信号可以被看作是一个随时间变化的量，是时间 t 的函数 $x(t)$ 。在相应的图形表示中，作为自变量出现在横坐标上的是时间。信号的这种描述方法就是信号的时域描述。基于微分方程和差分方程等知识，在时域中对信号进行分析的方法称为信号的时域分析。

对于快速变化的信号，时域描述不能很好地揭示信号特征。此时人们感兴趣的是什么样的幅值在什么频率值或什么频带出现。与此对应，将频率作为自变量，把信号看作是频率 f 的函数 $x(f)$ 。在相应的图形表示中，作为自变量出现在横坐标上的是频率。信号的这种描述方法就是信号的频域描述。信号在频域中的图形表示又称作信号的频谱，包括幅频谱和相频谱等。幅频谱以频率为横坐标以幅度为纵坐标，相频谱以频率为横坐标以相位为纵坐标。基于傅立叶变换理论，在频域中对信号进行分析的方法称为信号的频域分析。

信号分析的主要任务就是要从尽可能少的信号中，取得尽可能多的有用信息。时域分析和频域分析，只是从两个不同角度去观察同一现象。时域分析比较直观，能一目了然地看出信号随时间的变化过程，但看不出信号的频率成分。而频域分析正好与此相反。在工程实际中应根据不同的要求和不同的信号特征，选择合适的分析方法，或两种分析方法结

合起来，从同一测试信号中取得需要的信息。

5.2 周期信号及其频谱

5.2.1 周期信号的定义

如果信号 $x(t)$ 在所有时间 t 内均能满足

$$x(t) = x(t + nT) \quad (5.1)$$

式中： n —任意整数；

T —常数。

则 $x(t)$ 是周期信号， T 称为周期。显然，周期信号是幅值按一定周期不断重复的信号。

周期信号（如图 5.2 所示）又分为正弦信号（包括余弦信号）和复杂的周期信号。正弦信号是最简单的周期信号，其数学表达式为

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + 2n\pi) = x_0 \sin \omega(t + n\frac{2\pi}{\omega}) \quad (5.2)$$

可见，正弦信号的周期 $T = 2\pi / \omega$ ， ω 称为角频率或圆频率，周期的倒数称为频率，即 $f = 1/T$ ， $\omega = 2\pi f$ ， x_0 为常数。

复杂的非正弦周期信号又可称之为非正弦周期函数，如图 5.2 所示。

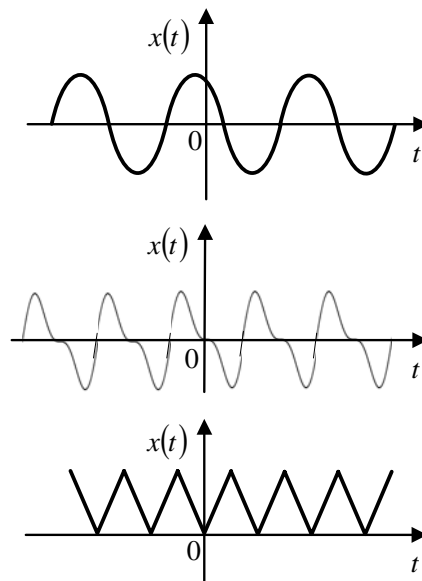


图 5.2 非正弦周期信号

5.2.2 傅里叶级数的三角函数展开式

周期函数的一个重要特征是：它们可以表示成无穷个正弦及余弦函数之和。这个正弦和余弦函数的系列称为傅里叶级数。

若周期函数 $x(t)$ 周期为 T 满足狄里赫利条件，即：

- (1) 在一个周期内，只存在有限数目的极大值和极小值；
- (2) 只存在有限个不连续点；
- (3) 在不连续点取值有界，即函数绝对可积。

则此周期函数可以表示为傅里叶级数的三角函数形式

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5.3)$$

式中: $n=1, 2, 3\dots$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

a_0 、 a_n 、 b_n 称为傅里叶系数, 其值分别为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{cases} \quad (5.4)$$

a_0 值为此周期函数在一个周期内的平均值, 又称直流分量, a_n 是余弦分量的幅值, b_n 是正弦分量的幅值。

在工程测试中常见的周期信号(即周期函数)一般都满足狄里赫利条件。

为了显示出傅里叶级数在工程应用中所具有的物理意义, 可将公式 5.3 写成只包含正弦项或只包含余弦项的形式。如果令

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (5.5)$$

则公式 5.3 可简化为

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (5.6)$$

5.2.3 周期信号的频谱

由公式 5.6 可以看出, 周期信号是由无限个不同频率的谐波分量叠加而成。各次谐波的幅值和初相位分别由 A_n 和 φ_n 决定。当 $n=1$ 时, $A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ 称为信号的一次谐波(基波)分量, ω_0 称为基波角频率。其余各次统称为高次谐波。 $n=2$, 称为二次谐波, $n=3$, 称为三次谐波, 依此类推。由于幅值 A_n , 初相位 φ_n 均为角频率 $\omega = n\omega_0$ 的函数, 以角频率为横坐标, 幅值 A_n 或初相位 φ_n 为纵坐标所作的图形统称为频谱, $A_n - \omega$ 图称为幅频谱, $\varphi_n - \omega$ 图称为相频谱。 A_n 表示信号所具有的谐波分量的幅值; φ_n 是各次谐波分量在时间原点处所具有相位。幅值谱和相位谱结合起来便确定了信号各次谐波的波形。

图 5.3 所示是从一个装有两个偏心转子的轴上测取的加速度信号 $x(t)$ 。在其频谱图上清楚地显示了每个转子引起的振动强度。

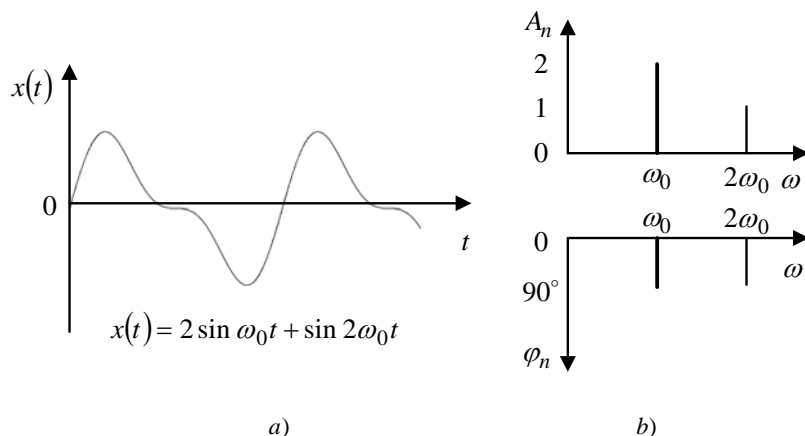


图 5.3 周期信号的时间历程及其频谱

a) 周期信号的时间历程 b) 周期信号的频谱

例5.1 求图 5.4 a 所示的周期性矩形波的傅里叶级数表示，并画出其幅频谱。

解：该波形在一个周期内的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T/2 \\ -A & -T/2 < t < 0 \end{cases}$$

根据公式 5.4 得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} A dt + \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) dt \right] \\ &= 0 \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{T}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cos n\omega_0 t dt + \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) \cos n\omega_0 t dt \\ &= 0 \\ b_n &= \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} A \sin n\omega_0 t dt + \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

代入公式 5.3 得

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7} \sin 7\omega_0 t + \dots \right)$$

图 5.4b 所示是波形的幅频谱图。

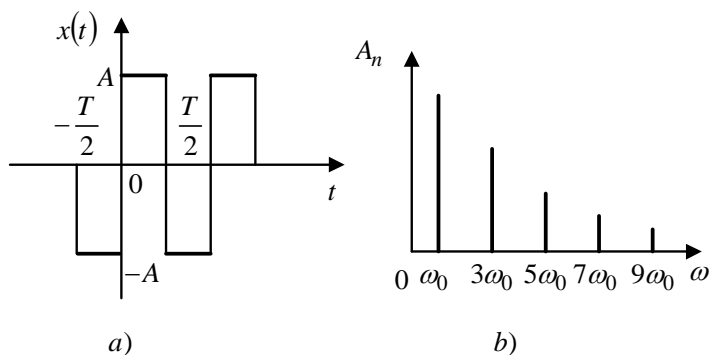


图 5.4 周期性矩形波及其频谱图

上例揭示出周期方波可以分解为无穷多个谐波,在 MATLAB 命令界面下(Command Window) 键入如下程序:

```
A=4;
w0=pi/0.1;
t=-0.5:.001:0.5;
cosine=sin(w0*t)+(1/3)*sin(3*w0*t)+(1/5)*sin(5*w0*t)+(1/7)*sin(7*w0*t)+(1/9)*sin(9*w0
*t)+(1/11)*sin(11*w0*t)+(1/13)*sin(13*w0*t)+(1/15)*sin(15*w0*t)+(1/17)*sin(17*w0*t)+(
1/19)*sin(19*w0*t);
plot(t,cosine)
```

则显示:

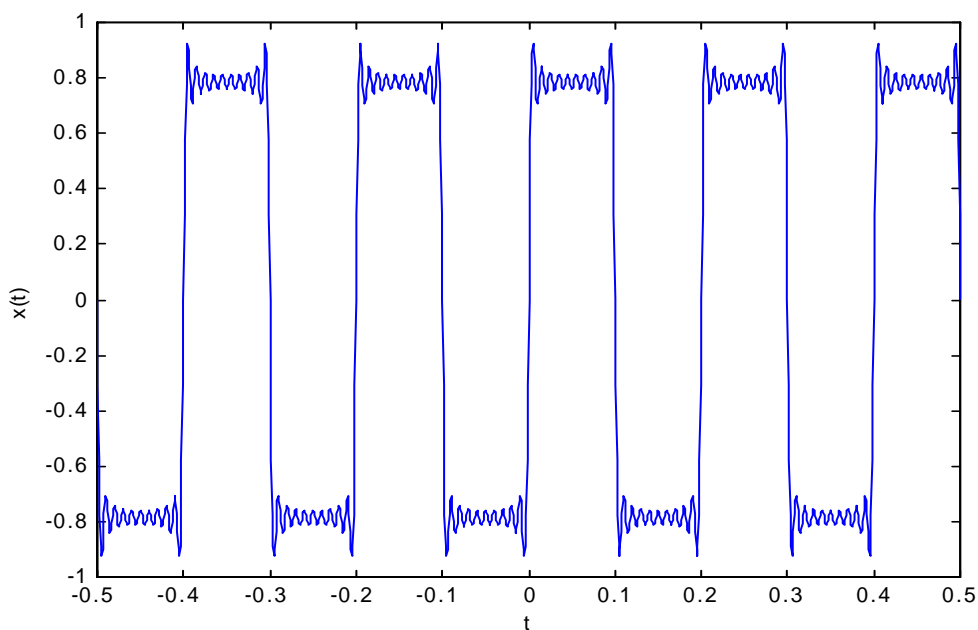


图 5.5 用谐波合成周期方波

5.2.4 复数形式的傅里叶级数

傅里叶级数三角函数展开式虽然能够很清楚的表示原函数中所包含的各个谐波分量，但是其积分运算比较复杂，特别是当原函数 $x(t)$ 为复杂的函数时，其计算就更为繁杂，有时甚至难以计算。

傅里叶级数也可以表示成复指数形式展开式。根据欧拉公式

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \quad (5.7)$$

则公式 5.3 可转换为

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (5.8)$$

式中： C_n 表示周期信号 $x(t)$ 的复振幅，称为傅立叶系数

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.9)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

一般情况下 C_n 是复数，可以写成

$$C_n = |C_n| e^{j\varphi_n} \quad (5.10)$$

式中： $|C_n|$ —复数 C_n 的模；

φ_n —复数 C_n 的幅角。

若

$$C_n = \text{Re}(C_n) + j \text{Im}(C_n) \quad (5.11)$$

式中： $\text{Re}(C_n)$ —复数 C_n 的实部；

$\text{Im}(C_n)$ —复数 C_n 的虚部。

则有

$$|C_n| = \sqrt{[\text{Re}(C_n)]^2 + [\text{Im}(C_n)]^2} \quad (5.12)$$

$$\varphi_n = \text{arctg} \frac{\text{Im}(C_n)}{\text{Re}(C_n)} \quad (5.13)$$

同时可得：

$$\begin{cases} |C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \\ \varphi_n = -\text{arctg} \frac{b_n}{a_n} \end{cases} \quad (5.14)$$

根据 $|C_n| - n\omega_0$ ， $\varphi_n - n\varphi_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的函数关系可画出复数形式的傅里叶频谱图。不过它同三角形形式的傅里叶频谱图在形式上有所不同，这是由于描述谐波分量的数学方法不同而造成的，没有什么本质差别。例如一个余弦信号

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

它在三角形形式的傅里叶级数中仅有一项，即 $n = 1$ ，故其谱线只有一条如图 5.6a 所示，而用复数表示同一信号时，有

$$x(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

故它有两条谱线： $n = \pm 1$ (图 5.6b)。

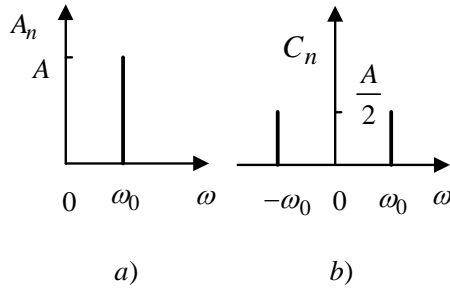


图 5.6 三角形式的傅立叶频谱和复数形式的傅立叶频谱

特别需要指出的是：将一个周期信号展开成复数形式的傅里叶级数后，其频谱图上出现了负频率。然而频率表示每秒钟的变化次数，它不可能是负值。但是，由于用复数表示可以得到简练的复数形式的傅里叶级数，此时，允许 n 取负整数，于是出现了所谓的负频率。在这种形式下， n 单独取正数或单独取负数都不能构成一个谐波分量，只有 $n = k$ 和 $n = -k$ 两项之和才能表示第 k 项。由此可见，负频率的引入仅仅是在将正余弦函数变成一对指数函数的过程中，为缩短式子长度而采取的一种数学手段。

图 5.6a 中的频谱仅在 $\omega > 0$ 的一边有谱线，称作单边谱。图 5.6b 中的频谱两边都有谱线，称作双边谱。由于 C_n 与 C_{-n} 是一对共轭复数，其模相等，所以双边谱对称于 C_n 轴。

由公式 5.14 可知，单边谱线高度为双边谱线的二倍。数据处理中常按此关系将它们相互转化。

复数形式的傅里叶级数除了可用幅频图和相频图表示外，也可以分别以 C_n 的实部和虚部与频率的关系作图表示。

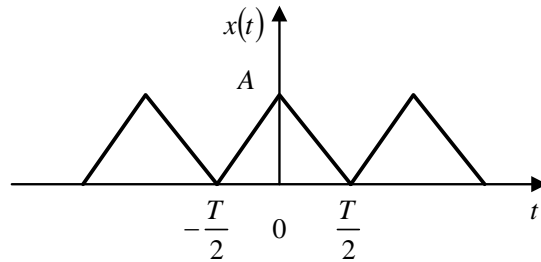


图 5.7 周期三角波

例 5.2 求图 5.7 所示的周期性三角波的幅频谱。

解： $x(t)$ 在一个周期中可表达为

$$x(t) = \begin{cases} A - \frac{2A}{T}t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ A + \frac{2A}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$$

因 $x(-t) = x(t)$ ，故 $x(t)$ 是偶函数， $b_n = 0$ 。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) dt = \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A - \frac{2A}{T}t \right) \cos n\omega_0 t dt \\
 &= \frac{4A}{n^2\pi^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{4A}{n^2\pi^2} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

其幅频谱(单边谱)如图 5.8a 所示。若用复数形式表示, 则根据

$$|C_n| = |C_{-n}| = \frac{1}{2} a_n$$

$$C_0 = a_0$$

可求得如图 5.8b 所示的幅频谱(双边谱)。

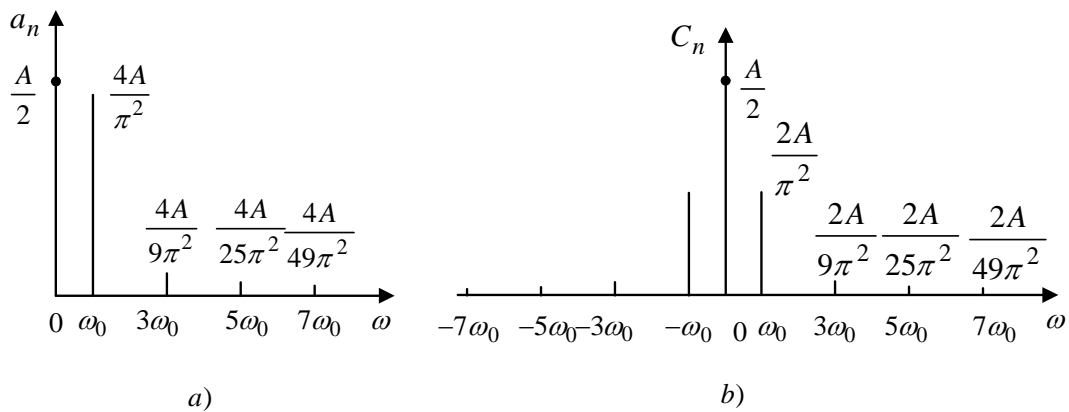


图 5.8 周期三角波幅频谱的两种形式

在 MATLAB 中输入如下程序, 可得出图 5.9 所示周期三角波幅频谱和相频谱:

```

N=8;
n1=-N:-1;
c1=-2*j/pi^2./n1.^2;
c0=1/2;
n2=1:N;
c2=-2*j/pi^2./n2.^2;
cn=[c1 c0 c2];
n=-N:N;
subplot(2,1,1);
stem(n,abs(cn));
ylabel('Cn的幅度');
subplot(2,1,2);
stem(n,angle(cn));
ylabel('Cn的相位');
xlabel('\omega/\omega_0');

```

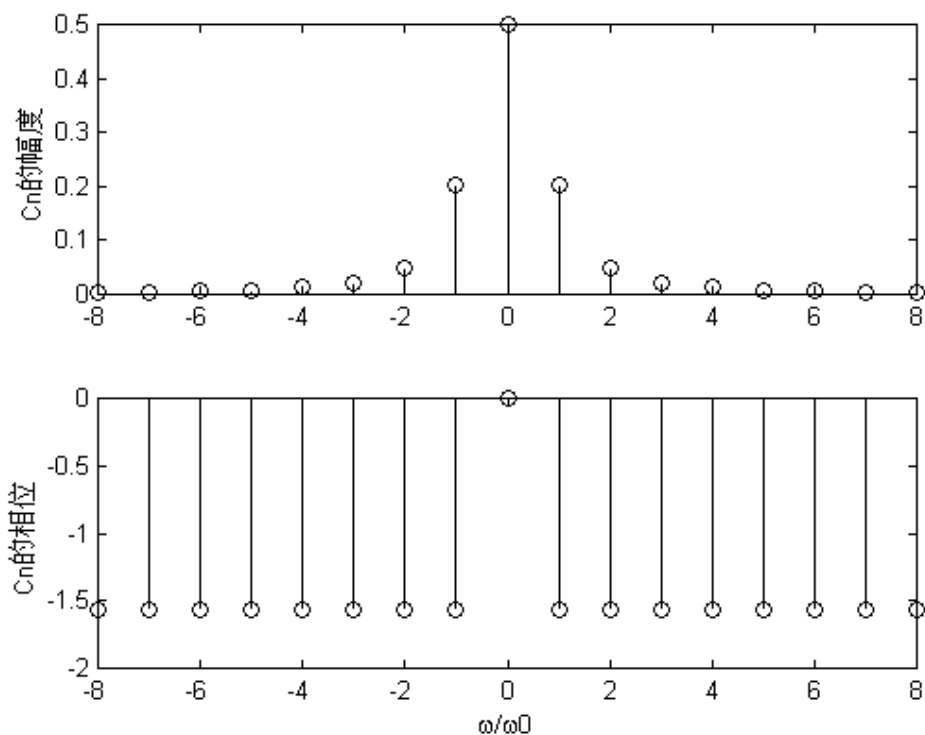


图 5.9 周期三角波的频谱

通过以上例题可以看出，周期信号有以下几个特点：

- (1) 周期信号的频谱是由无限多条离散谱线组成，每一条谱线(单边谱)代表一个谐波分量；
- (2) 各次谐波的频率只能是基波频率的整数倍；
- (3) 谱线的高度表示了相应谐波分量的幅值大小。对于工程中常见的周期信号，其谐波幅值的总的趋势，是随着谐波次数的增高而减小。当谐波次数无限增高时，其幅值就趋于零。

上述三大特点，分别称为周期信号频谱的离散性、谐波性和收敛性。

进一步分析还可发现：信号波形越接近于正弦波，其谱线越稀。信号波形与正弦波相差越大，特别是当信号含有脉冲性突变时，其谐波成分就越丰富。另外，信号波形越接近于正弦波，幅值下降越快，例如，谐波幅值大于基波幅值的 2%的谐波分量，矩形波有 25 个，全波整流信号有 6 个，三角波仅有 4 个。由此可知，对于工程中遇到的大多数周期信号，可以忽略那些次数过高的谐波分量，用有限个谐波之和来代替傅里叶级数中的无限多项，而不会引起太大的误差。从基波开始，到还需要考虑的最高谐波分量的频率间的频段，称为信号的频带宽度，这在选用仪器时要充分注意。

5.3 非周期信号及其频谱

5.3.1 傅里叶积分

非周期信号是指在时域上不按周期重复出现，但仍可用准确的解析数学关系表达的信号。非周期信号包括准周期信号和瞬变非周期信号两种。

1. 准周期信号

复杂周期信号可以用傅里叶级数展开成许多以至无限项正(余)弦谐波信号之和, 其频谱具有离散性。反之, 几个正(余)弦信号叠加是否一定是周期函数, 这主要取决于组成此信号的各正(余)弦信号的频率之比。如果组成信号各正(余)弦信号的频率比是有理数, 那么就可以找到它们之间的公共周期, 这些正(余)弦信号合成后仍为周期信号, 因为经过公共周期后又会重演原来信号。但若各正(余)弦信号的频率比不是有理数, 例如 $x(t) = \sin \omega_0 t + \sin 2\pi\omega_0 t$, 各正(余)弦信号间找不到公共的周期, 它们在合成后不可能经过某一周期重复, 所以合成后不可能是一个周期信号, 但是这样的一种信号在频域表达上却是离散频谱, 这种信号称之为准周期信号。在工程技术领域内, 不同的相互独立振源对某对象的激振而形成的振动往往是属于这一类的信号。

2. 瞬变非周期信号与连续频谱

瞬变非周期信号是指除准周期信号以外的非周期信号。通常所称非周期信号就是指这种信号。常见的瞬变非周期信号如图 5.10 所示。

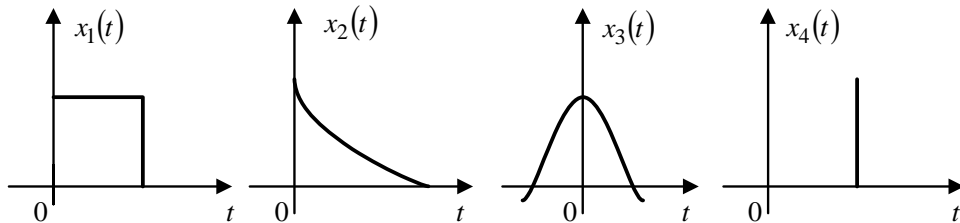


图 5.10 非周期信号

下面只讨论瞬变信号, 在本书以后的叙述中, 凡提到的非周期信号均指瞬变信号。

非周期信号按照定义不能按傅里叶级数分解成许多正(余)弦谐波之和。但为了了解其频域描述, 可援引周期信号的方法加以解决。将一非周期信号仍当作周期信号处理, 认为其周期趋于无穷大。

如设 $x(t)$ 为周期信号, 其频谱应为离散的。当认为 $x(t)$ 的周期趋于无穷大时, 则该信号即成为非周期信号。从频谱图可以看出, 周期信号频谱谱线的频率间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T$, 当周期 T 趋于无穷大时, 其频率间隔趋于无穷小, 所以非周期信号的频谱应该是连续的。如周期信号 $x(t)$, 在 $(-T/2, T/2)$ 区间内傅里叶展开式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

将 C_n 代入上式, 得

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

式中, n 取整数 $0, \pm 1, \pm 3, \dots$, 因而各谐波频率 $n\omega_0$ 只能取离散值; 相邻谐波谱线间的频率增量

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

于是上式可写成

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \Delta\omega$$

当信号的周期 T 不断增大时, 谱线间的频率增量 $\Delta\omega$ 不断减小, 即谱线变得愈来愈密。若 $T \rightarrow \infty$, 则 $\Delta\omega \rightarrow 0$, 原来只能取离散值的谐波频率 $n\omega_0$ 变为可连续取值的连续变量 ω_0 。不仅如此, 而且原来在频谱图上代表谐波幅值的谱线高度的含义也发生了本质的变化, 这点以后将要提到。

在数学上, $T \rightarrow \infty$, 就意味着上式中 $\sum \rightarrow \int$, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$, 于是

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

将 $\omega = 2\pi f$ 代入上式得

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi ft} df \quad (5.15)$$

这样就避免了在傅里叶变换中出现 $1/2\pi$ 的常数因子, 使公式简化。

公式 5.15 称为傅里叶积分, 其存在条件是:

- (1) $x(t)$ 在有限区间上满足狄里赫条件;
- (2) 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ 收敛, 即 $x(t)$ 在无限区间上绝对可积。

周期信号可以通过傅里叶级数分解成为无限多项谐波的代数和。与此类似, 非周期信号则可通过傅里叶积分“分解”成“无限多项谐波”的积分和。从所起的作用看, 傅里叶积分与傅里叶级数类似。

5.3.2 傅里叶变换与非周期信号的频谱

在公式 5.15 括号里的积分中, t 是积分变量, 因此积分的结果是一个以频率 f 为自变量的函数。记作

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (5.16)$$

此式称为函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 (**FT**)。傅里叶变换是把时域函数 $x(t)$ 变换为频域函数 $X(f)$ 的桥梁, 其功能与公式 5.9 类似。只是 C_n 中的自变量 $n\omega_0$ 只能跳变取离散值, 而 $X(f)$ 中 f 可连续取值。此外, $X(f)$ 与 C_n 的量纲也有差别, 这点下面将要论述。

将公式 5.16 代入公式 5.15, 可得到傅里叶反变换 (**IFT**) 公式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (5.17)$$

它把经过傅里叶变换后得到的频域 $X(f)$ 再变成时域函数。由此可知，傅里叶变换与傅里叶反变换构成一对傅里叶变换对，即

$$\left. \begin{aligned} X(f) &= F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ x(t) &= F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

$$x(t) \begin{array}{c} \xrightarrow{FT} \\ \xleftarrow{IFT} \end{array} X(f) \quad (5.18)$$

值得指出的是：傅里叶级数和傅里叶变换虽然都可理解为把一个信号分解为其它简单波形的“叠加”，但两者的叠加有着本质的差异。傅里叶级数是离散的叠加，其谐波中存在着一个基本频率 ω_0 ，其余频率是 ω_0 的整数倍，所以叠加的结果是一个周期为 $T(T=2\pi/\omega_0)$ 的信号。而傅里叶变换则是“连续的叠加”，虽然叠加的每一项 $X(f)e^{j2\pi ft} df$ 都可看作周期函数(周期为 $1/f$)，但不存在什么基本频率，因而叠加的结果必然是非周期信号。更为重要的是： $X(f)e^{j2\pi ft} df$ 是一个无穷小量，它表示非周期信号 $x(t)$ 在频率等于 f 处的谐波分量的幅值趋近于零。只有在一定的频带内，该谐波分量才具有一定的大小。由此可知，非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(f)$ 本身并不能代表谐波分量的幅值，只有在一定频带内对频率 f 积分后才含有幅值意义。从量纲上看， $X(f)df$ 具有幅值的量纲，而

$$X(f) = \frac{X(f)df}{df}$$

则具有幅值/频率的量纲，或称单位频率上的幅值，即有分布密度的含义，故称 $X(f)$ 为信号 $x(t)$ 的频谱密度。由此看来，非周期信号的频谱具有两大特点：连续性和密度性。因此，非周期信号的频谱应叫频谱密度，不过习惯上仍称频谱。

前面已经提到，周期函数的傅里叶系数是一个复数。与此类似，非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(f)$ 是一个以实变量 f 为自变量的复变函数，它可表示为

$$X(f) = X_R(f) + jX_I(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)} \quad (5.19)$$

式中： $X_R(f)$ — $X(f)$ 的实部；

$X_I(f)$ — $X(f)$ 的虚部；

$|X(f)|$ —非周期信号 $x(t)$ 的幅频谱， $|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$ ；

$\varphi(f)$ —非周期信号 $x(t)$ 的相位频谱， $\varphi(f) = \arctg \left[\frac{X_I(f)}{X_R(f)} \right]$ 。

由于

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi ftdt \\ X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi ftdt \end{aligned}$$

所以 $X(f)$ 与 $X(-f)$ 是一对共轭复数, 其模相等。因此 $X(f)-f$ 曲线对称于纵轴如图 (5.11 a) 所示, 并称为双边谱。为了在工程上应用方便, 把负频率半边的谱图折算到正频率半边而得到单边谱图 5.11 b 此时的谱图高度为双边谱的 2 倍。

图 5.11 b 中的阴影面积 (即幅值谱密度在 Δf 区间上的积分) 表示非周期信号的 Δf 频带上的谐波分量的幅值, 而频率恰好等于 f_n 的谐波分量幅值为零。可见非周期信号的谐波分量是依一定密度分散在 $0 \sim \infty$ 的连续频带内的, 而周期信号的谐波分量则是依一定规律集中在一些离散的频率上, 这就是两者的本质差别。

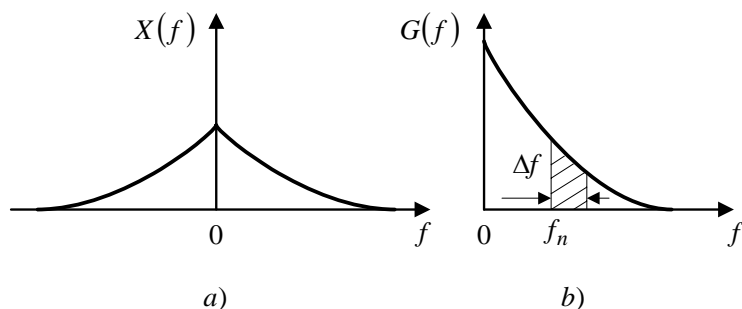


图 5.11 非周期信号的幅值谱密度

a) 双边谱 b) 单边谱

例 5.3 求图 5.12 a 所示的单个矩形脉冲的频谱, 其中

$$u(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

解: 设 $u(t)$ 的傅立叶变换为 $U(f)$, 由傅立叶变换定义:

$$\begin{aligned} U(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{-1}{j2\pi f} (e^{-j2\pi f\tau} - e^{j2\pi f\tau}) \\ &= \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \\ &= \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) \end{aligned}$$

相应的频谱如图 5.12 b 所示。

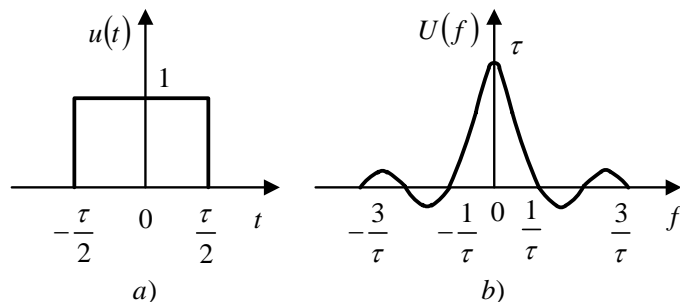


图 5.12 单个矩形脉冲及其频谱

a) 单个矩形脉冲 b) 频谱

定义 $\text{sinc}x = \frac{\sin x}{x}$ ，叫做 sinc (赛音克) 函数。该函数值由数学表可查得，它以 2π 为周期并随 x 的增加而做衰减振荡。sinc 函数是偶函数，在 n/τ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) 处其值为零。由于 sinc 函数在傅里叶分析及线性时不变系统的研究中起着非常重要的作用。

在 MATLAB 中编辑如下程序：

```
A=4;
w0=40*pi;
phi=pi/6;
t=-0.5:0.001:0.5;
cosine=A*sin(w0*t+phi)./(w0*t+phi);
plot(t,cosine)
```

则显示：

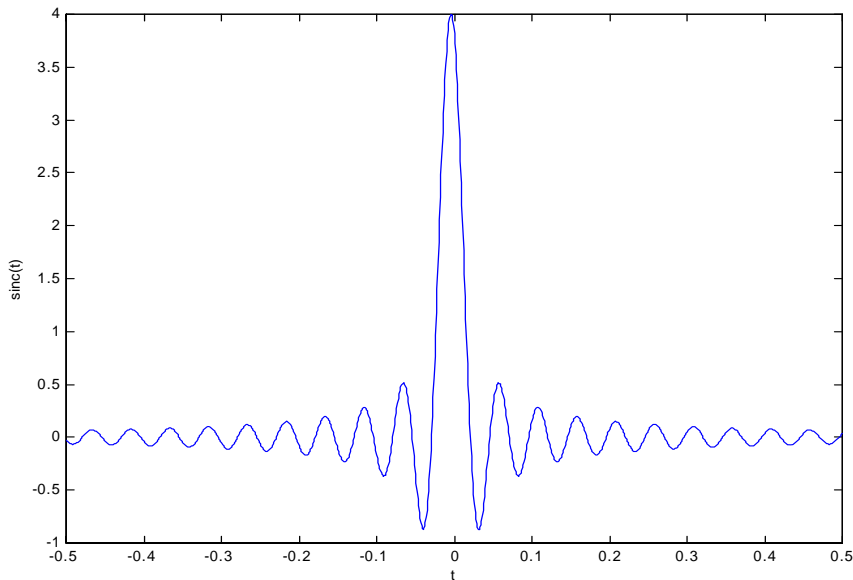


图 5.13 在 MATLAB 中生成的 sinc 函数

5.3.3 傅里叶变换的性质

如前所述，傅里叶变换是信号分析及处理中，进行时间域和频率域之间变换的一种基本数学工具。当信号在时间域中的变化规律改变后，其在频率域中的变化规律也会对应改变；同样，当信号在频率域中的变化规律改变后，其在时间域中的变化规律也会对应改变。这种改变的对应关系，体现在傅立叶变换的性质中。

傅立叶变换的主要性质有：奇偶虚实性、线性叠加性、对称性、时移性、频移性、尺度改变性、卷积定理、微分特性和积分特性等。傅立叶变换的主要性质列于表 5.1 中。

表 5.1 傅立叶变换的主要性质

性质	时域	频域
奇偶虚实性	实偶函数	实偶函数
	实奇函数	虚实函数

	虚偶函数	虚偶函数
	虚奇函数	实奇函数
线性叠加	$ax(t)+by(t)$	$aX(f)+bY(f)$
对称	$X(t)$	$x(-f)$
尺度改变	$x(kt)$	$X(f/k)/k$
时移	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
频移	$x(t)e^{\mp j2\pi f_0 t}$	$X(f \pm f_0)$
翻转	$x(-t)$	$X(-f)$
共轭	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
时域卷积	$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
频域卷积	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
时域微分	$d^n x(t)/dt^n$	$(j2\pi f)^n X(f)$
频域微分	$(-j2\pi f)^n x(f)$	$d^n X(f)/df^n$
积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$X(f)/j2\pi f$

5.3.4 几种特殊信号的频谱

1. 矩形窗函数及频谱

矩形窗函数即为单个矩形脉冲函数，其频谱在本节例 5.3 中已讨论。一个在时域有限区间有值的信号，其频谱却延伸至无限频率。在时域中，若截取信号的一段记录长度，则相当于原信号和矩形窗函数乘积，根据傅里叶变换的频域卷积特性，所得信号的频谱将是原信号频谱函数和 sinc 函数的卷积，它将是连续的，频率无限延伸的频谱。

2. 单位脉冲函数(δ 函数)及频谱

1) δ 函数的定义

在数学上，如果函数 $s_\varepsilon(t)$ 仅在区间 $[0, \varepsilon]$ 上具有脉冲样图形(矩形脉冲、三角形脉冲等)，并且此图形与 t 轴围成的面积为 1(图 5.14 a)，那么当脉冲宽度 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，函数 $s_\varepsilon(t)$ 的极限称为 δ 函数。根据此定义不难看出 δ 函数有如下特点：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (5.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\varepsilon} s_\varepsilon(t) dt = 1 \quad (5.21)$$

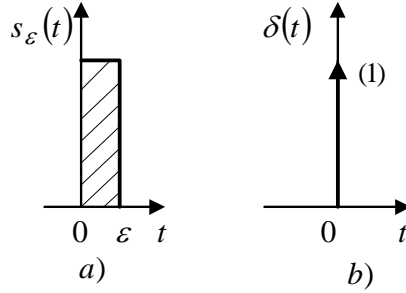


图 5.14 δ 函数

a) 脉冲 b) 有向线段

在工程上，常将 δ 函数用一个高度等于 1 的有向线段来表示，如图 5.14b 所示，这个线段的高度表示 δ 函数的积分，亦称 δ 函数的强度（并非幅度值）。用这种方法表示的 δ 函数称为单位脉冲函数。

2) δ 函数的采样性质

若 $x(t)$ 为一时域连续信号，则乘积 $\delta(t)x(t)$ 仅在 $t=0$ 处得到 $\delta(t)x(0)$ ，其余均为零，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(0)dt = x(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = x(0)$$

可见 $\delta(t)$ 与 $x(t)$ 相乘后积分，其作用就是取出了信号 $x(t)$ 在 $t=0$ 时刻的一个值， $x(0)$ 为一个采样点。

同样，对有延时的 δ 函数 $\delta(t-t_0)$ ，其值仅在 $t=t_0$ 时刻才不为零，于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)x(t_0)dt \\ &= x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt \\ &= x(t_0) \end{aligned}$$

此时，得到了 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻的一个采样点 $x(t_0)$ 。

在工程上，利用单位脉冲函数的概念，可将采样过程看成是信号与单位脉冲函数的简单乘积。

3) δ 函数的频谱

将 δ 函数进行傅里叶变换，即可得到其频谱函数：

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \\ &= 1 \end{aligned} \tag{5.22}$$

可见时域的脉冲信号具有无限宽广的频谱，而且各频率上的信号强度都相等。在信号的检测中，一般爆发电火花地方(如雷电、火花塞等)都会对测试系统引起严重干扰，这是因为尖脉冲(类似 δ 函数，能量均匀地分布在 $0 \sim \infty$ 的频带内)的高频部分以射频形式发射出来，对测试系统形成干扰的缘故。凡是频谱为常数的信号俗称白噪声。“白”是由白色光引申而来，意即白色的光谱频率丰富。 δ 脉冲就是一种理想的白噪声。

根据傅里叶变换的对称性、时移性和频移性等，可得到下列傅里叶变换对：

时域	↔	频域	
$\delta(t)$	↔	1	}
1	↔	$\Delta(f)$	
$\delta(t - t_0)$	↔	$e^{-j2\pi ft_0}$	
$e^{j2\pi ft}$	↔	$\Delta(f - f_0)$	

(5.23)

4) δ 函数与其它函数的卷积

在函数卷积运算中，若其中有一个函数是 δ 函数，则运算极为简便。例如，若 $U(f)$ 为图 5.15 所示的矩形函数， $\Delta(f) = \Delta(f - f_s) + \Delta(f + f_s)$ 为在频率轴上的两个单位脉冲函数，则其卷积

$$\begin{aligned} \Delta(f) * U(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\tau) U(f - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - f_s) + \delta(\tau + f_s)] U(f - \tau) d\tau \end{aligned}$$

根据 δ 函数的采样性质

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - f_s) U(f - \tau) d\tau &= U(f - f_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - f_s) d\tau \\ &= U(f - f_s) \end{aligned}$$

所以

$$\Delta(f) * U(f) = U(f - f_s) + U(f + f_s)$$

由此得出一个重要结论：任意函数和 δ 函数的卷积，就是简单地将该函数在自己的横轴上平移到 δ 函数所对应的位置。此结论对时域函数同样适用。

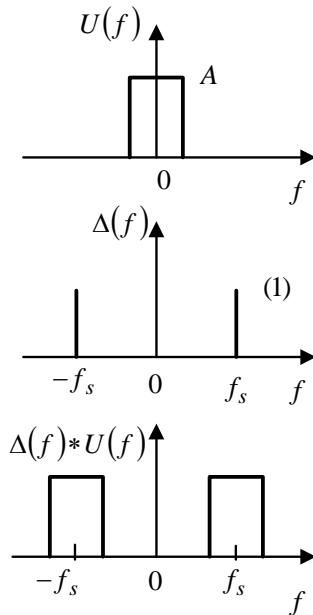


图 5.15 函数与 δ 函数的卷积

3. 周期性单位脉冲序列及频谱

等间隔的周期性单位脉冲序列，周期为 T_s ，如图 5.16 a 所示。它的数学表达式为

$$\delta_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (5.24)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

若用傅里叶级数表示, 则

$$\delta_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta_n(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt \\ &= \frac{1}{T_s} e^{-j2\pi n f_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_s} \end{aligned}$$

所以

$$\delta_n(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_s t} \quad (5.26)$$

根据公式 5.23 并对公式 5.26 两端取傅里叶变换, 即得 $\delta_n(t)$ 的频谱

$$\begin{aligned} A_n(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta(f - n f_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

由其频谱图(图 5.16 b)可以看出, 时域中周期为 T_s 的脉冲序列, 在频域中乃是周期为 $1/T_s$ 的脉冲序列, 其幅值为时域中脉冲幅值的 $1/T_s$ 倍。

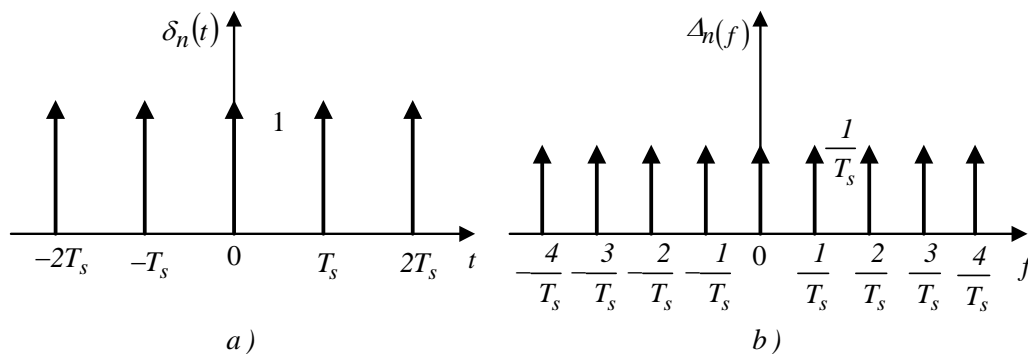


图 5.16 周期单位脉冲序列及其频谱

a) 周期单位脉冲序列 b) 频谱

用计算机进行信号分析时, 首先要将连续的模拟信号 $x(t)$ 变为一连串离散的时间序列。以数字量的形式存入一个个内存单元, 然后进行各种计算。为了实现这一过程, 可先用 $\delta_n(t)$ 与连续信号 $x(t)$ 相乘。根据 δ 函数的采样性质可知, 相乘的结果便得到一离散的时间序列。由此看来, 周期性单位脉冲序列 $\delta_n(t)$ 在数学上具有采样功能, 因此又称采样函数。相应地, T_s 称采样间隔, 也称采样周期, 其倒数 $1/T_s = f_s$ 称采样频率。

4. 正(余)弦函数及频谱

由于正(余)弦函数不满足绝对可积条件, 因此不能直接应用傅里叶积分变换式, 而需在傅里叶变换时引入 δ 函数。

根据欧拉公式, 正(余)弦函数可写成

$$\sin 2\pi f_0 t = j \frac{1}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t})$$

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} (e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t})$$

由公式 5.23 即可求得正、余弦函数的傅里叶变换如下(图 5.17):

$$\sin 2\pi f_0 t \Leftrightarrow j \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \quad (5.28)$$

$$\cos 2\pi f_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (5.29)$$

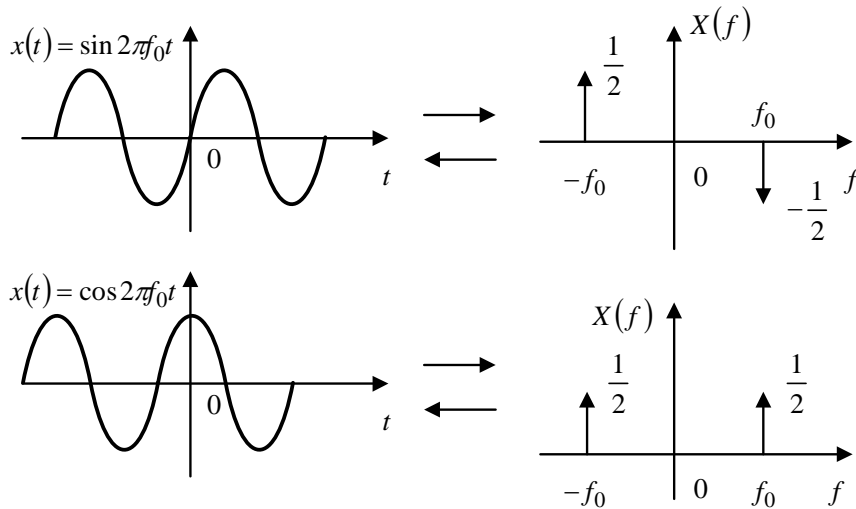


图 5.17 正、余弦函数及其频谱

5.4 数字信号分析与处理

随着计算机技术的发展, 特别是 1965 年快速傅里叶变换(FFT)算法问世以来, 数字信号处理得到越来越广泛的应用。现在除了在通用计算机上发展各种数字信号处理软件以外, 还发展了有专用硬件的数字信号处理芯片(DSP), 其处理速度已近乎“实时”。数字信号处理技术已形成了一门新的学科。

数字处理的特点是处理离散数据, 因此首先要把连续信号采样成离散的时间序列。尽管现在已发展了不少数字式传感器, 但传感器所测试的大多数物理过程本质上仍是连续的, 所以总是有一个采样过程。这一过程把连续信号改变成等间隔的离散时间序列, 其幅值也经过量化。此外, 数字计算机不管怎样快速, 其容量和计算速度毕竟有限, 因而处理的数据长度是有限的, 信号必须要经过截断。这样数字信号处理就必然引入一些误差。很自然会提出这样的问题: 如何恰当地运用这一技术, 使之能够比较准确地提取原信号中的有用信息。本节将对用数字方法处理测试信号时的一些基本方法和概念作一些介绍。

5.4.1 信号的数字化

大部分传感器的输出信号都是随时间连续变化的模拟电量，若要采用数字式处理，则需要将连续模拟量转换成离散数字量，这可利用模/数转换装置(A/D转换器)来实现。如图 5.18 所示为数字信号处理系统的简单框图。

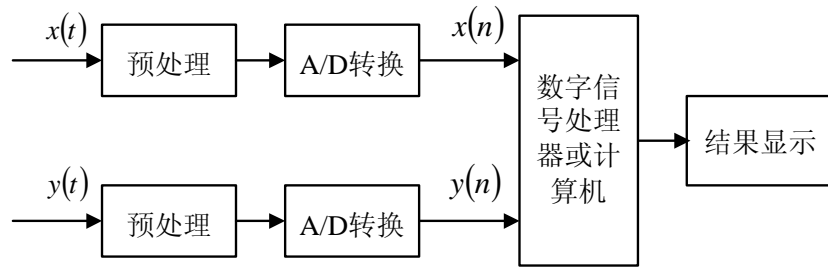


图 5.18 数字信号处理系统的简单框图

A/D 转换器的输入量为模拟信号 A 和模拟参考信号 R ，而输出量是数字编码信号 D (一般是按二进制编码)。 A 、 R 和 D 之间的关系可表示为

$$D \equiv \left[\frac{A}{R} \right] \quad (5.30)$$

式中的恒等式和中括号的含义是：在数字能够表示的最精确的范围内， D 是最接近 A/R 之值。

这一转换的实现，要经过下述三个过程。

1. 采样

采样就是将连续变化的模拟信号离散化的过程。若将一个模拟信号 $x(t)$ 和一个等间隔的脉冲序列 $\delta_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$ (T_S 是采样间隔) 相乘，由于 δ 函数的采样性质，相乘以后只有在 $t = nT_S$ 处有值。因此，采样后得到如图 5.19c 所示的一系列在时间上离散的信号序列 $x(nT_S)$, $n=0, 1, 2, \dots$ 。

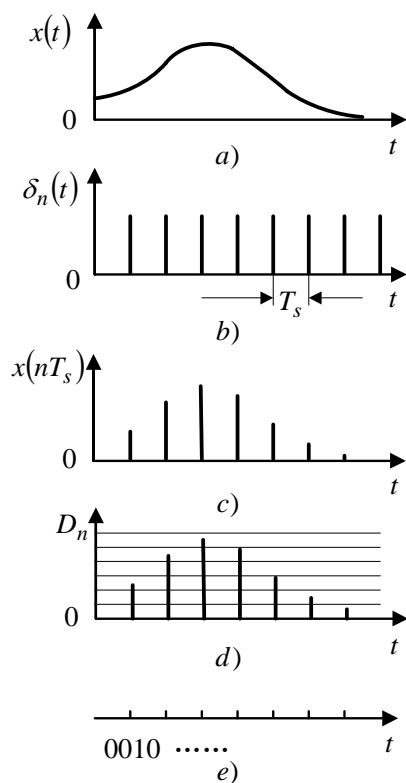


图 5.19 模拟—数字转换过程

a) 模拟信号 b) 采样脉冲 c) 离散信号 d) 信号的量化 e) 信号的编码

由图还可以看出，采样间隔 T_s 越小， $x(nT_s)$ 越能如实反映原模拟信号 $x(t)$ 。而正确的采样必须保证采样得到的离散序列 $x(nT_s)$ 应该包含原信号 $x(t)$ 所隐含的主要信息。假如 T_s 过大， $x(nT_s)$ 相对于 $x(t)$ 会失真，也就是经过采样之后的信号 $x(nT_s)$ 不能完全恢复成原信号 $x(t)$ 所隐含的主要信息，因而影响数据分析的精度。 T_s 过小，则数据的数量过多，使计算工作量急剧增加。因此，必须有一个选择采样间隔 T_s 的准则，以确定 $x(nT_s)$ 不失真的最大允许间隔 T_s ，这个准则称为采样定理。

采样定理指出：一个连续的模拟波形，若它的最高频率分量为 f_m ，则当采样频率 $f_s \geq 2f_m$ 时，采样后的信号可以无失真地恢复成原来的连续信号。

2. 量化

数字信号只能以有限的字长表示其幅值，对于小于末位数字所代表的幅值部分只能采取“舍”或“入”的方法。

量化过程就是把采样取得的各点上的幅值与一组离散电平值比较，以最接近于采样幅值的电平值代替该幅值，并使每一个离散电平值对应一个数字量(图 5.19d)。若两相邻量化电平之间的增量为 Δx ，则量化误差最大为 $\pm \Delta x / 2$ ，由此可见，在量化过程中相邻量化电平之间的增量越小(供比较的离散电平值的数量越多)，误差越小。

3. 编码

编码过程是把已量化的数字量用一定的代码表示并输出。通常采用二进制代码。经过编码之后，信号的每个采样值对应一组代码(图 5.19e)。

5.4.2 离散傅里叶变换(DFT)

随着数字计算机的普及和应用，人们越来越多地利用数字计算机来进行傅里叶变换，

以提高处理速度和处理精度。数字计算机不能对一个连续的模拟信号进行处理。其原因是：第一，数字计算机仅能处理离散数据。第二，计算机的内存容量总是有限的，它不能存放无限多的采样数据。因此“数值离散”和“点数有限”是使用数字计算机进行傅里叶变换的两大特点，为了区别常见的傅里叶变换，我们称它为离散傅里叶变换。

下面从连续傅里叶变换出发，从图形上来认识离散傅里叶变换的演变过程及出现的问题。

图 5.20 a 所示是某一连续信号 $x(t)$ 及其傅里叶变换 $X(f)$ 。将 $x(t)$ 乘以采样函数 $\delta_n(t)$ (图 5.20 b) 得到一无限的离散函数 $x_1(t) = x(t)\delta_n(t)$ (图 5.20 c)。根据卷积定理(时域的乘积对应于频域的卷积)可知， $x_1(t)$ 的傅里叶变换 $X_1(f) = X(f) * \Delta_n(f)$ 。而函数与 δ 函数的卷积就是把该函数简单地平移到 δ 函数所对应的位置，于是得到图(5.20 c)，比较 $X_1(f)$ 与 $X(f)$ 可知，时域函数的离散导致频域图形的周期化。这是离散傅里叶变换引入的第一次误差。

至此，采样后的函数 $x_1(t)$ 仍有无限个离散点，而计算机只能接受有限个。因此要对 $x_1(t)$ 进行时域截断，取出 N 个有限点。这在数学上可理解为用一高度为 1 的矩形函数 $u(t)$ (图 5.20 d) 乘以 $x_1(t)$ ，由于 $u(t)$ 的作用相当于一个窗户，故称窗函数。 T 为截断长度，即采样时间。截断后的信号为 $x_2(t) = x_1(t) \cdot u(t)$ (图 5.20 e)，其傅里叶变换 $X_2(f)$ 仍利用频域的卷积 $X_1(f) * U(f)$ 进行计算。卷积的结果使得在 $X_1(f)$ 的基础上出现许多皱波 (Ripple)，即与截断前信号的频谱不同了，这说明信号所包含的能量也发生变化，我们称此种现象为泄漏。

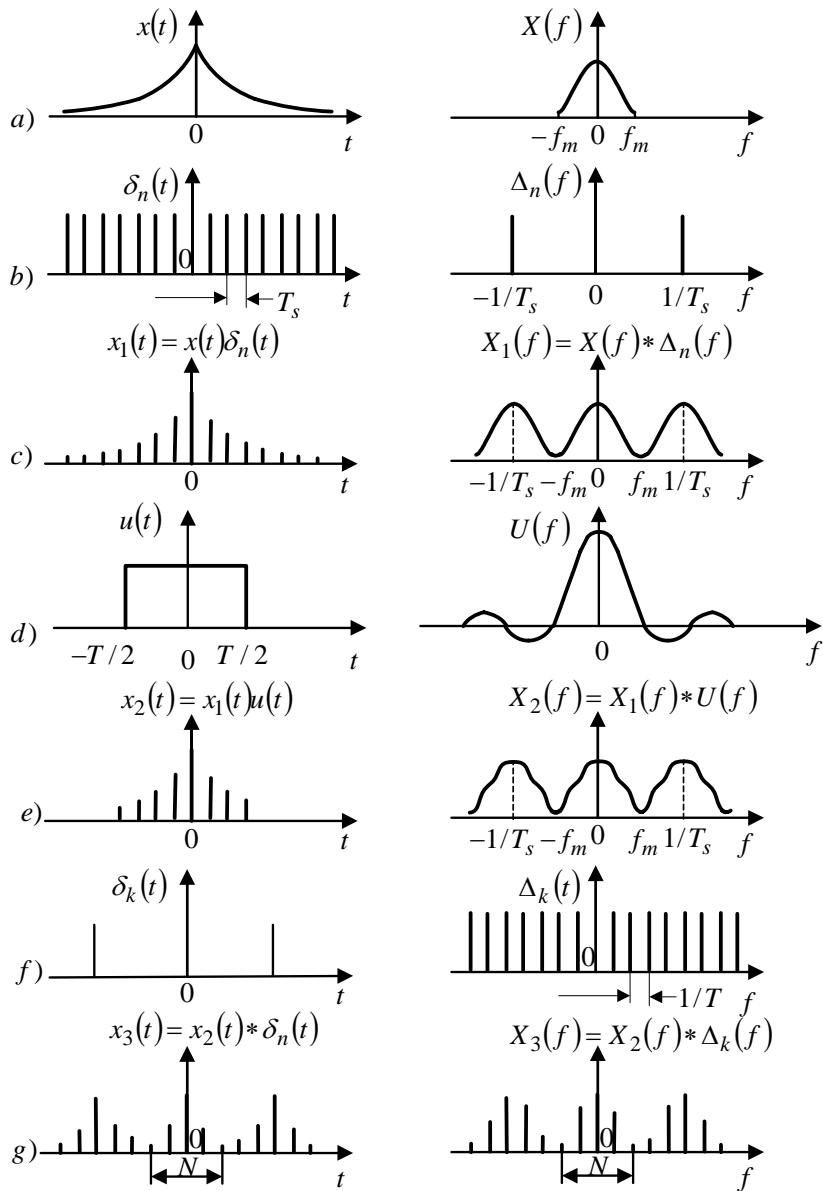


图 5.20 离散傅立叶变换的图解说明

- a) 模拟信号及其傅立叶变换 b) 采样信号及其傅立叶变换
- c) 离散信号及其傅立叶变换 d) 矩形函数及其傅立叶变换
- e) 矩形函数采样信号及其傅立叶变换 f) 频域采样函数及其傅立叶逆变换
- g) 离散信号傅立叶变换

泄漏是由于窗函数 $u(t)$ 频谱 $U(f)$ 有许多旁瓣而引起的 (图 5.20 d)，中间的主峰叫做主瓣，在主峰两侧出现的一系列小峰叫旁瓣，所以把窗函数的频谱出现旁瓣的现象称为泄漏。如果增加采样时间 T ，则 $U(f)$ 将变窄变高，泄漏就随之减小 (如图 5.22 所示)。当 $T \rightarrow \infty$ (即不施行时域截断) 时， $U(f)$ 变为 δ 函数，皱波便完全消失。可见时域函数的截断导致频域函数出现皱波，这是离散傅里叶变换引入的第二次误差。

图 5.20 e 中的傅里叶变换对、频域函数 $X_2(f)$ 仍不是计算机能接受的离散函数，因此还须乘以频域采样函数 $\Delta_k(f)$ (图 5.20 f)，得到 $X_3(f) = X_2(f)\Delta_k(f)$ (图 5.20 g)。根据卷积定理， $X_3(f)$ 的傅里叶逆变换为 $x_3(t) = x_2(t) * \delta_k(t)$ 。至此，得到了如图 5.20 g) 所示的离

散傅里叶变换对，它在时域和频域都是用离散值表示的。

在理解离散傅里叶变换时，特别要注意的是，时域上采样的结果将得到频率的周期函数(图 5.20 c)；而频域上采样的结果将得到时间的周期函数(图 5.20 g)。由此可知，离散傅里叶变换需要将原时间函数和频率函数都修改成周期函数。换句话说，离散傅里叶变换意味着在时域、频域两方面都周期化。不过在计算机中仅存储了 N 个时域采样值和 N 个频域采样值，它们分别表示时域波形和频域波形的一个周期，并且近似于原来的连续傅里叶变换对。

按照上述推演离散傅里叶变换的思路，可从理论上导出离散傅里叶变换的数学表达式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1) \quad (5.31)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (5.32)$$

式中： $X(k)$ ——频率分辨力为 $\Delta f = 1/T$ 的 N 个频域采样值；

$x(n)$ ——时间采样间隔为 T 的 N 个时域采样值。

例 5.4 求序列 $x(n) = \{1, 2, 1, 0\}$ 当 $N = 4$ 的离散傅立叶变换 $X(k)$ 。

解 由公式 5.31：

$$k = 0: \quad X(0) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j2\pi nk/N} = 1e^0 + 2e^0 + 1e^0 + 0 = 4$$

$$k = 1: \quad X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j2\pi nk/N} = 1e^0 + 2e^{-j2\pi \times 1 \times 1/4} + 1e^{-j2\pi \times 1 \times 2/4} + 0 = -j2$$

$$k = 2: \quad X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j2\pi nk/N} = 1e^0 + 2e^{-j2\pi \times 1 \times 2/4} + 1e^{-j2\pi \times 2 \times 2/4} + 0 = 0$$

$$k = 3: \quad X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n)e^{-j2\pi nk/N} = 1e^0 + 2e^{-j2\pi \times 1 \times 3/4} + 1e^{-j2\pi \times 2 \times 3/4} + 0 = j2$$

因此可得 $x(n)$ 的 4 点 DFT： $X(k) = \{4, -j2, 0, j2\}$

5.4.3 数字式分析处理中的若干问题

1. 频率混淆

由图 5.20 c 中可以看出，时域的采样引起了频域的周期化。这时如果采样频率 f_s 选得足够高。则频域各周期的图形不会发生重叠。与此同时，在应用中仅取 $[-f_s/2, f_s/2]$ (双边谱) 或仅取 $[0, f_s/2]$ (单边谱) 进行分析，其余各周期不予理会，则频域周期化所带来的误差就可能完全避免。工程上，称采样频率的一半 $f_n = f_s/2$ 为奈奎斯特频率或截止频率。

如果由于原信号频带很宽或采样频率 f_s 选得太低，则频域中相邻周期的波形就会发生重叠，从而引起误差(图 5.21)。这种现象称频率混淆，简称频混。

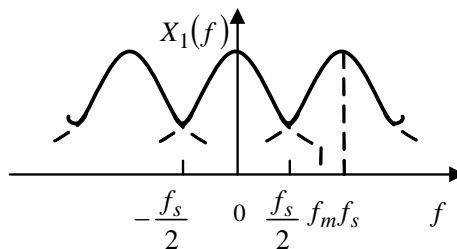


图 5.21 混叠现象

如果一个信号的频谱具有无限的带宽，则不论如何选择采样频率 f_S ，频混误差都无法避免。然而这种信号并不多见，比较常见的是一个有用的低频信号混进了一个高频的噪声信号。因此在采样之前先用低通滤波器滤去高频噪声，这种低通滤波器称为抗混淆滤波器。在现代数字式分析系统中，它已被列为基本组成环节。抗混淆滤波器的截止频率选为 $f_S/2$ 。

2. 采样频率及频率分辨力

由采样定理可知：对于一个频率为 $0 \sim f_m$ 的有限带宽连续信号进行采样，只有当采样频率 $f_S \geq 2f_m$ 时，其离散傅里叶变换才不发生频率混淆，因而只有用这样采样的点才能得到离散信号的频谱。同时也只有用这样采样的点才能够完全恢复原时域信号的连续波形 $x(t)$ ，不过此时要借助插值公式

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) \frac{\sin \frac{\pi(t-nT_S)}{T_S}}{\pi(t-nT_S)/T_S} \quad (5.33)$$

来求出采样点以外的其它点。

采样定理要求 $f_S \geq 2f_m$ ，但采样频率 f_S 并非选得越高越好。由 N 个时域采样点进行离散傅里叶变换，得到 N 个频域点，俗称 N 条谱线，对应的频率范围为 $[-f_S/2, f_S/2]$ ，因此相邻谱线的频率增量为。

$$\Delta f = \frac{\frac{f_S}{2} - \left(-\frac{f_S}{2}\right)}{N} = \frac{f_S}{N} \quad (5.34)$$

可见当采样点数 N 一定时，采样频率 f_S 越高，频率增量越大，频率分辨力越低。因此，在满足采样定理的前提下，采样频率不应选得过高。一般取 $f_S = (2 \sim 3)f_m$ 就够了。

由公式 5.34 可以看出，采样频率 f_S 选定后，要想提高频率分辨力，就要增加采样点数 N ，这就意味着要增加采样时间，多占计算机内存容量和延长计算时间。为解决此矛盾，可采用小波变换等现代信号分析处理方法。小波变换具有多分辨率的特点，可以按粗细不同的尺度观察信号，对频率信号的分析采用不同的分辨率，弥补了常规分析方法的不足。

3. 采样点数 N 的选择

离散傅里叶变换为使用计算机进行频谱分析提供了理论依据，但还存在一个实际问题，就是计算工作量太大，即使利用计算机这个强有力的快速计算工具也要花费很长的时间。于是人们力图寻找一种快而简便的算法，使离散傅里叶变换真正具有实用价值。1956 年美国库利 (J. W. Cooley)、图基 (J. W. Tukey) 提出了一种称为快速傅里叶变换 (FFT) 的算法，问题才得到了圆满解决。FFT 算法将 DFT 算法的计算速度提高到原来的 $N/\log_2 N$ 倍，使傅里叶变换可以在一瞬间完成。目前已有许多关于离散傅里叶变换的硬件、软件及专用机，可供使用。

FFT 算法 (后面有简单介绍) 要求采样点数 N 必须是 2 的正整数次幂，因此采样点数 N 必须选用为 $N = 2^P$ (P 为正整数)，还常取 $P = 9 \sim 11$ ，采样点数取得过多则计算时间太长。

4. 窗函数、截断和泄漏

信号的历程一般较长，在进行数字信号处理技术时要进行截断。截断就是将无限长的信号乘以有限宽的窗函数。“窗”的意思是指透过窗口能够“看到‘外景(信号)’”的一部

分。最简单的窗是矩形窗(图 5.22)，其函数为

$$\omega(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ \frac{1}{2} & |t| = T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (5.35)$$

其频谱函数为

$$W(f) = 2T \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} = 2T \operatorname{sinc}(2\pi fT) \quad (5.36)$$

对信号截取一段 $(-T, T)$ ，就相当于在时域中 $x(t)$ 乘以矩形窗函数 $\omega(t)$ ，于是有

$$x(t)\omega(t) \Leftrightarrow X(f)*W(f)$$

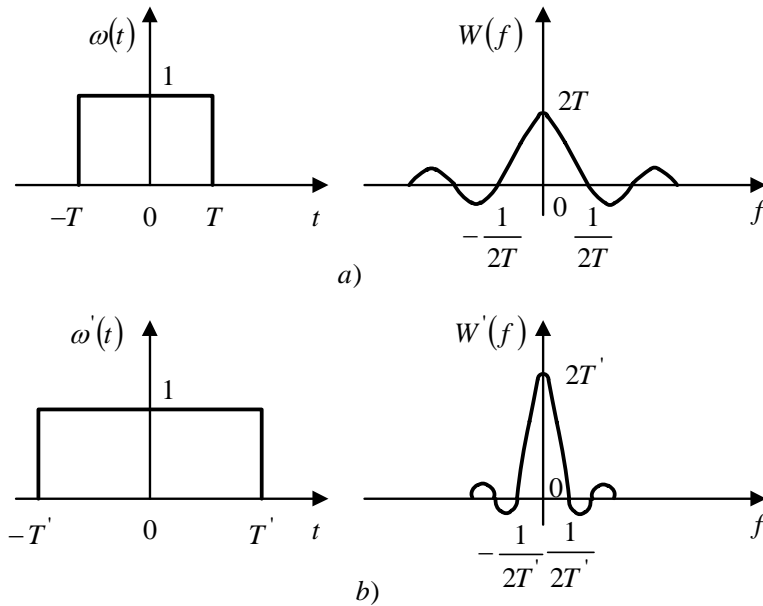


图 5.22 矩形窗

由于 $\omega(t)$ 是一个频带无限的函数，所以即使 $x(t)$ 是限带信号，而在截断以后也必须成为无限带宽的函数，这说明信号的能量分布扩展了。又从上面的讨论可知，无论采样频率多高，只要信号一经截断就不可避免地导致一些误差，这一现象称为泄漏。

如果增大截断长度，则 $W(f)$ 图形将压缩变窄(图 5.22b)，虽在理论上其频谱范围仍为无穷宽，但实际上中心频率以外的频率分量衰减较快，因而泄漏误差将减小。当 T 趋于无限大时，则 $W(f)$ 将变为 $\delta(f)$ 函数，而 $\delta(f)$ 函数与 $X(f)$ 的卷积仍为 $X(f)$ 。这就说明了：如果不截断就没有泄漏误差。

一个时域信号愈是变化剧烈(即愈含有脉冲性突变或阶跃性突变)，其频率成分越丰富。泄漏与窗函数频谱的旁瓣有关。矩形窗函数频域中的旁瓣就是由于窗两端的阶跃性突变所致。因此，只要选择两端比较平滑的窗函数，便能减少泄漏误差。根据这一原理，人们提出了许多实用的窗函数，如汉宁窗、哈密窗、高斯窗、三角窗等。图 5.23 给出了它们的图形。

比较 5 种窗，矩形窗旁瓣最高但主瓣最窄，高斯窗旁瓣最低但主瓣却最宽，最理想的窗函数应该是主瓣窄而旁瓣低。因此在处理数据时，要根据具体要求来选择窗函数。一般来说应注意下述几点：

第一，如果要分析信号中那些幅值很小的频率成分(即次要的频率成分)，则不能用矩形窗，应该用泄漏最小的高斯窗。因为那些幅度较小的谱密度将被矩形窗本身引起的皱波所淹没。

第二，如果仅仅分析信号的主要频率成份，而不考查频谱的细微结构，则可用计算最为简单的矩形窗。

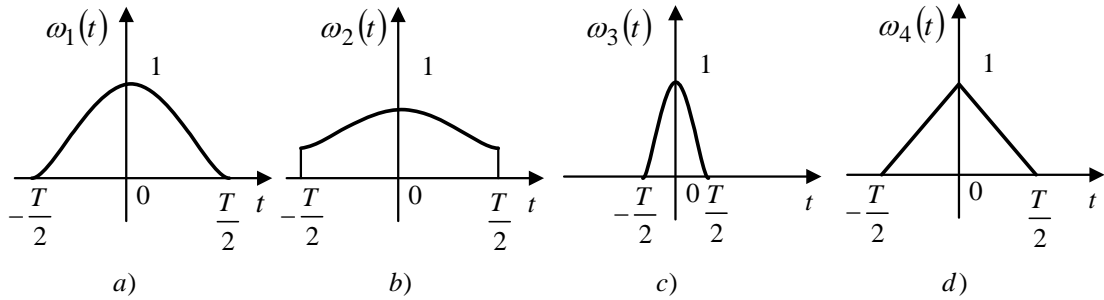


图 5.23 常用窗函数

a) 汉宁窗 b) 哈明窗 c) 高斯窗 d) 三角窗

第三，如果要两者兼顾，则可用汉宁窗或哈明窗，而哈明窗的应用最为广泛。

需要指出的是，除了矩形窗外，其它窗在对时域函数截断的同时，还对时域函数的幅值有影响，导致频域函数幅值下降，因而要乘以一个修正系数进行修正，这点在计算时要特别注意。

5. 平均化处理

离散傅里叶变换是连续傅里叶变换的一种近似。对信号进行截断分析，用数学的语言来说就是抽出总体信号的一个样本进行分析。如果多抽出一些样本进行离散傅里叶变换，最后取其平均值，必然会抵消一些随机误差而获得较高精度，这种方法称为平均化。它在数据处理中得到了广泛的应用。具体做法是先把足够多的点数采入计算机存储器，然后一段接一段进行分析，最后取平均。若总点数不够，取用时各断之间可以交叉，使同一数据能够多段重复使用。

5.4.4 快速傅里叶变换(FFT)

快速傅里叶变换(FFT)是离散傅立叶变换(DFT)的快速算法，它在确定DFT的系数时，使所要求的乘法及加法次数减少。FFT的算法有很多种，其中大多数已编制了程序，从而使应用于数字频谱分析、滤波器模拟及相关领域的计算技术产生了较大的发展。

在按照公式 5.31 的离散傅里叶变换直接计算 $X(k)$ 值时，对于 N 个 $X(k)$ 中的每一个必须作 N 次 $x(n)$ 乘以 $e^{-j2\pi kn/N}$ ，所以共有 N^2 次复数乘法运算，而且还要作 $N(N-1)$ 次复数相加的运算。计算工作量直接与 N 的大小有关，当 N 较大时，计算工作量将急剧增加。

FFT 算法的实质就是把一个长数据序列 $x(n)$ ，经多次分选抽取，最终分割成 $n/2$ 个，每个有两个数据的序列作 DFT 计算，分别算出分割后比较短的子序列的频谱，然后按一定的规则组合，即可得到整个序列 $x(n)$ 的频谱。

例如有一数据序列 $\{x(n)\}$ ， $n=0, 1, 2, \dots, N-1$ ，如图 5.24 所示 ($N=8$)。将序列 $\{x(n)\}$ 按偶数项和奇数项，经一次抽取组合成两个较短的半序列 $\{y(n)\}$ 和 $\{z(n)\}$ ，其中

$$\begin{cases} y(n) = x(2n) \\ z(n) = x(2n+1) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (5.37)$$

如图 5.24 所示。若两个半序列 $\{y(n)\}$ 和 $\{z(n)\}$ 的离散傅里叶变换分别为 $Y(k)$ 和 $Z(k)$ ，则它们与 $X(k)$ 的关系为

$$\begin{cases} X(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + e^{-j2\pi kn/N} Z(k)] \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}[Y(k) - e^{-j2\pi kn/N} Z(k)] \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (5.38)$$

公式 5.38 表明，原序列 $\{x(n)\}$ 的 DFT 能直接根据两个半序列的 DFT 计算出来。

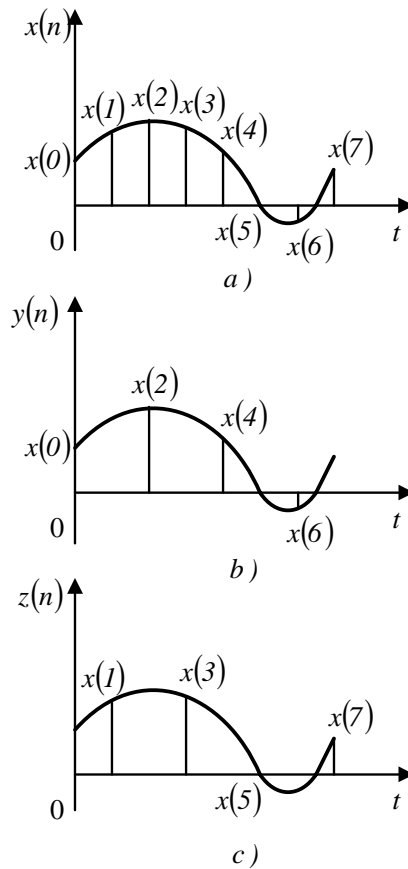


图 5.24 原始序列 $\{x(n)\}$ 及其半序列 $\{y(n)\}$ 和 $\{z(n)\}$

如果原序列 $\{x(n)\}$ 的总项数 $N = 2^p$ ，则可以把它分割成两上半序列，半序列 $\{y(n)\}$ 和 $\{z(n)\}$ 又可以分成 4 个 1/4 序列，然后再分成 8 个 1/8 序列，直到最后每个序列只剩下二项为止。这样，只须对只有二项的“序列”求 DFT，然后应用公式 5.38 逐步“合并”，最终可求得原序列 $\{x(n)\}$ 的 DFT。按 FFT 算法逻辑步骤，排好程序用电子计算机进行计算。

在 MATLAB 中可以利用工具函数 `fft` 进行计算。

例 5.5 模拟信号 $x(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$ ，以 $t = 0.01n (n = 0 \sim N-1)$ 进行取样，分别求其 $N = 64$ 和 $N = 512$ 点 DFT 的幅值谱。

解 在 MATLAB 输入如下程序：

```
subplot(2,1,1)
N=64;n=0:N-1;t=0.01*n;
```

```

q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
plot(q,abs(y))
title('FFT N=64')
%
subplot(2,1,2)
N=512;n=0:N-1;t=0.01*n;
q=n*2*pi/N;
x=2*sin(4*pi*t)+5*cos(8*pi*t);
y=fft(x,N);
plot(q,abs(y))
title('FFT N=512')

```

则得到如下结果:

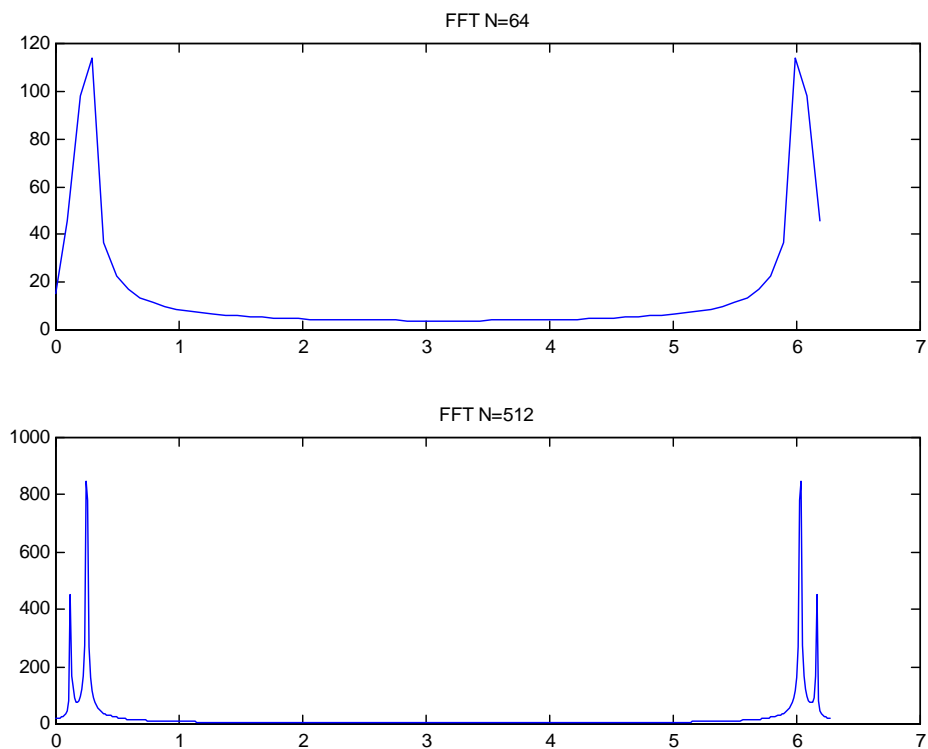


图 5.25 $x(t)$ 的 64 点和 512 点 DFT 幅值谱

5.5 随机信号分析与处理

5.5.1 基本概念

1. 随机过程

随机信号是非确定性信号，它不能用确定的数学关系式来描述，不能预测它未来任何瞬时的精确值，任一次观测值只代表在其变动范围内可能产生的结果之一。但其值的变动

服从统计规律。描述随机信号必须用概率和统计学的方法。对随机信号按时间历程所作的各次长时间观测记录称为样本函数，记作 $x(t)$ (图 5.26)。在有限时间区间上的样本函数称为样本记录。在同一试验条件下，全部样本函数的集合(总体)就是随机过程，以 $\{x(t)\}$ 表示，即

$$\{x(t)\} = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)\} \quad (5.39)$$

虽然随机过程不能用确定的数学关系式表示，但它仍包含一些规律性因素，可以采用数理统计的方法来描述。

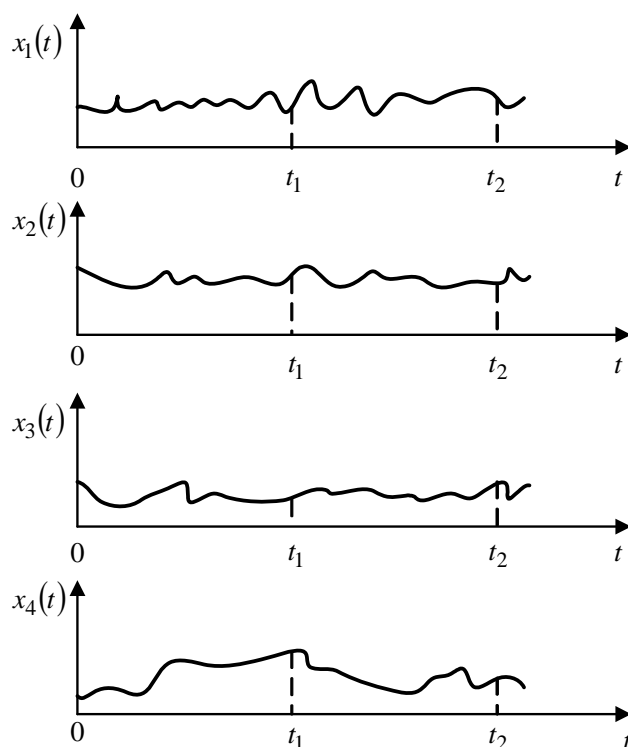


图 5.26 随机过程与样本函数

随机过程的基本特性可以从幅值域、时差域和频率域进行数学描述。主要的统计参数有均值、方差、均方值、概率密度函数、自相关函数、互相关函数、功率谱密度函数和互谱密度函数等。其中有些统计参数用于描述单个随机信号的数据特性，有些统计参数用于描述两个或多个随机信号的联合特性。

随机过程的各种平均值(均值、方差、均方值和均方根值等)是按集合平均来计算的。集合平均的计算不是沿某单个样本的时间轴进行，而在集合中的某时刻 t_i 对所有样本函数的观测值取平均。为了与集合平均相区别，称按单个样本的时间历程进行平均的计算叫做时间平均。

随机过程可分为平稳随机过程和非平稳随机过程。

2. 平稳随机过程

平稳随机过程就是统计特征参数不随时间变化而改变的随机过程。例如对某一随机过程的全部样本函数的集合，选取不同的时间 t 进行计算，得出的统计参数都相同，则称这样的随机过程为平稳随机过程，否则就是非平稳随机过程。

3. 各态历经随机过程

若从平稳随机过程中任取一样本函数，如果该单一样本在长时间内的平均统计参数(时

间平均)和所有样本函数在某一时刻的平均统计参数(集合平均)是一致的,则称这样的平稳随机过程为各态历经随机过程。显然,各态历经随机过程必定是平稳随机过程,但是平稳随机过程不一定是各态历经的。

各态历经随机过程是随机过程中比较重要的一种,因为根据单个样本函数的时间平均可以描述整个随机过程的统计特性,从而简化了信号的分析 and 处理。但是要判断随机过程是否各态历经的随机过程是相当困难的。所以一般的做法是,先假定平稳随机过程是各态历经的,然后再根据测定的特性返回到实际中分析、检验原假定是否合理。由大量事实证明,一般工程上遇到的平稳随机过程大多数是各态历经随机过程。虽然有的不一定是严格的各态历经过程,但在精度许可的范围内,也可以当作各态历经随机过程来处理。事实上,一般的随机过程需要足够多的样本(理论上应为无限多)才能描述它,而要进行大量的观测来获取足够多的样本函数是非常困难或做不到的。实际的测试工作常把随机信号按各态历经过程来处理,以有限长度样本记录观察分析来推断,估计被测对象的整个随机过程。在测试工作中常以一个或几个有限长度的样本记录来推断整个随机过程,以其时间平均来估计集合平均。

5.5.2 各态历经随机过程的统计参数

下面对各态历经随机过程主要统计参数的定义、物理意义等作简要介绍。

1. 均值、方差、均方值

1) 均值

均值是样本记录所有值的简单平均,即

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5.40)$$

式中: $x(t)$ —各态历经随机过程的样本记录;

T —样本记录时间。

均值反映了随机信号的静态分量(直流分量)。

在实际的测试工作中,要获取观测时间 T 为无限长的样本函数是不可能的,用有限的长度样本记录而代之,这样计算的均值称为估计值,以加注“ $\hat{}$ ”来区分

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (5.41)$$

2) 方差

方差用以描述随机信号的动态分量,它定义为

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (5.42)$$

方差的大小反映了随机变量对均值的离散程度,即代表了信号的动态分量(交流分量)。其正平方根称为标准差。

方差估计值为

$$\hat{\sigma}_x^2 = \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad (5.43)$$

3) 均方值

均方值的定义是

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (5.44)$$

它描述了随机信号的强度或平均功率。它的正平方根称为均方根值(或称有效值)。

均方值估计值为

$$\hat{\psi}_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (5.45)$$

均值、方差和均方值之间有如下关系:

$$\psi_x^2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2 \quad (5.46)$$

2. 概率密度函数

概率密度函数是表示信号瞬时值落在某指定区间内的概率。例如图 5.27 所示的信号 $x(t)$, 其值落在区间 $(x, x + \Delta x)$ 内的时间为

$$T_x = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad (5.47)$$

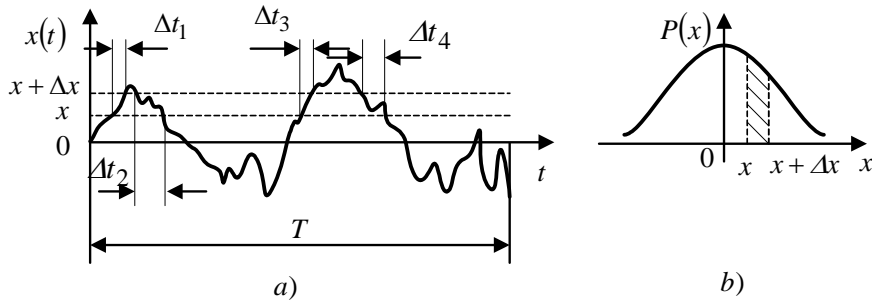


图 5.27 随机信号的概率密度函数

a) 随机信号 $x(t)$ 的时域波形 b) 随机信号 $x(t)$ 的概率密度函数图形

当样本记录时间 T 趋于无限大时, T_x/T 的比值就是幅值落在区间 $(x, x + \Delta x)$ 内的概率, 即

$$P(x < x(t) \leq x + \Delta x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad (5.48)$$

而概率密度函数定义为

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < x(t) \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

其估计值为

$$\hat{P}(x) = \frac{T_x}{T \Delta x} \quad (5.50)$$

概率密度函数反映了随机信号幅值分布的规律。由于不同的随机信号具有不同的概率密度函数图形, 故可根据它识别信号。图 5.28 所示为 4 种典型信号(均值为零)及其概率密度函数图形。

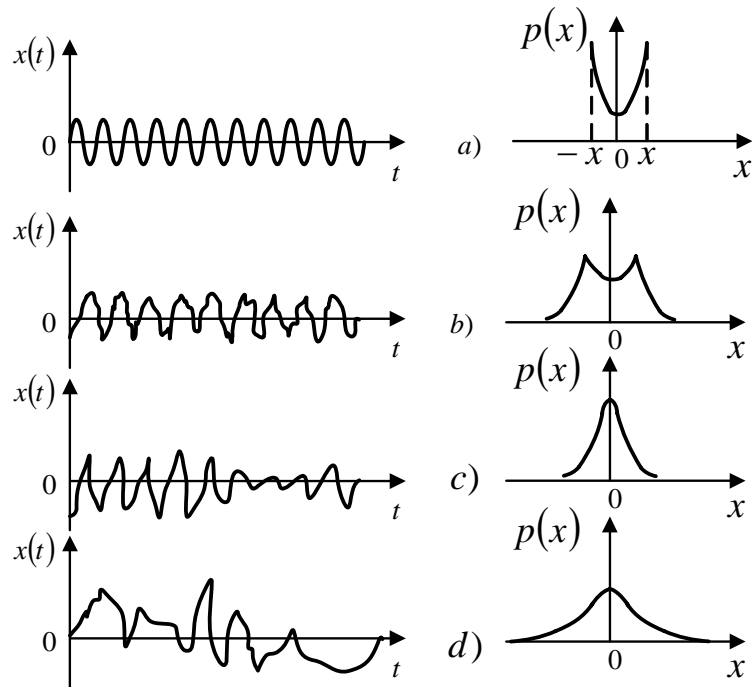


图 5.28 四种典型信号及其概率密度函数

- a) 正弦函数及其概率密度函数 b) 正弦函数加随机信号及其概率密度函数
 c) 窄带随机信号及其概率密度函数 d) 宽带随机信号及其概率密度函数

5.5.3 相关分析

1. 相关

在测试结果的分析中，相关是一个非常重要的概念。所谓“相关”是指变量之间的线性关系。对于确定性的信号来说，两个变量之间可用函数关系来描述，两者一一对应并为确定的数值。两个随机变量之间就不具有这样确定的关系，但是，如果这两个变量之间具有某种内涵的物理联系，那么，通过大量统计就能发现它们之间还是存在着某种虽不精确但却具有相应的表征其特征的近似关系。例如，树高与直径之间不能用确定性函数表述，但是通过大量的统计可以发现，同种树木树高的直径也常常大些，这两个变量之间有一定的线性关系。又例如机器上某个回转部件的动不平衡会引起该机器的振动，但是从所测得的机座振动却是各种振源（包括轴承振动、齿轮啮合振动、地基振动等等）的综合。对于一个线性系统，由于回转部件动不平衡引起的强迫振动的频率总是和其转速相对应的，此频率和其它振动源引起的强迫振动频率不一样。因此，可以认为和该部件转速不一致的振动与其动不平衡无关。研究振动信号中和该部件转速有关的成分，就可以获得其动不平衡状况的信息。雷达测距和声发射探伤都应用了相关分析的原理。

图 5.29 表示由两个随机变量 x 和 y 组成的数据点的分布情况。图 5.29 a 中各点分布很散，可以说变量 x 和变量 y 之间是无关的。图 5.29 b 中 x 和 y 虽无确定关系，但从统计结果、总体上看，具有某种程度的线性关系，因此说它们之间有一定的相关关系。

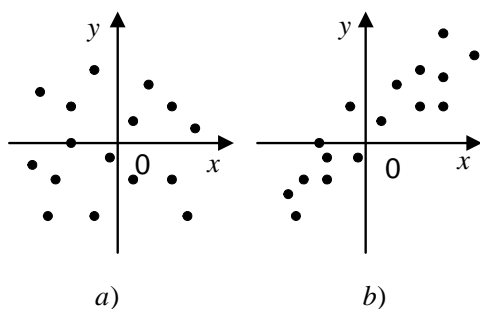


图 5.29 随机变量 x 和 y 的相关性

对于能量型变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之间的相关程度常用相关系数 ρ_{xy} 表示:

$$\rho_{xy} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt}} \quad (5.51)$$

通常, $|\rho_{xy}| \leq 1$ 。当 $|\rho_{xy}| = 1$ 时, 说明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 两变量是理想的线性相关。 $|\rho_{xy}| = 0$ 表示 $x(t)$ 和 $y(t)$ 两变量之间完全无关。

在 MATLAB 中, 利用 `corrcoef` 工具箱函数可以从输入矩阵中计算出相关系数矩阵。

2. 自相关函数

自相关函数 $R_x(\tau)$ 定义为乘积 $x(t)x(t+\tau)$ 的平均值, 即

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.52)$$

式中: $x(t)$ —样本函数;

$x(t+\tau)$ —从 t 移至 τ 后的样本;

τ —时移量, $-\infty < \tau < \infty$ 。

自相关函数描述了信号的某时刻值与延时一定时间后的值之间的相互关系, 它定量地描述了一个信号在时间轴上平移 τ 后所得波形与原波形相似的程度。

若 $x(t)$ 是各态历经过程的样本记录, 则自相关函数 $R_x(\tau)$ 的估计值

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.53)$$

自相关函数具有以下主要性质:

(1) 自相关函数为实偶函数;

(2) 在 $\tau = 0$ 时, $R_x(0) = \psi_x^2$, 取极大值即

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

(3) 均值为零的随机信号, 随着时移量 τ 的增加, 自相关函数趋近于零, 即

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$$

(4) 周期信号的自相关函数仍是与信号的时域周期相同的周期函数。

图 5.30 所示是 4 种典型信号的自相关函数, 从图中亦可看出自相关函数的上述特性。

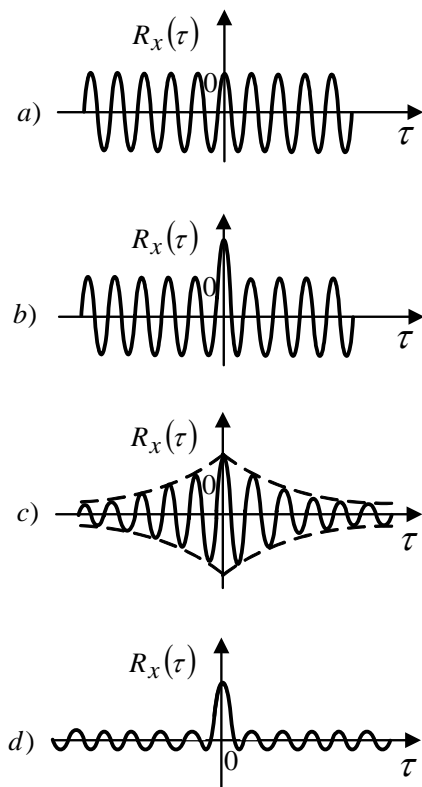


图 5.30 四种典型信号的自相关函数

- a) 正弦函数的自相关函数 b) 正弦函数加随机信号的自相关函数
 c) 窄带随机信号的自相关函数 d) 宽带随机信号的自相关函数

自相关函数同概率密度函数一样，也可以作为判断信号性质的工具。在工程测试中，自相关函数最主要的应用是检查混淆在随机信号中的确定性周期信号。

例如，在汽车进行平稳性试验时，测得汽车在某处的加速度的时间历程如图 5.31 a 所示。将此信号送入信号处理机处理，获得图 5.31 b 所示的相关函数。由相关图看出车身振动含有某一周期振动信号，从两个峰值的时间间隔为 0.11s，可算出周期振动信号的频率为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.11} = 9(\text{Hz})$$

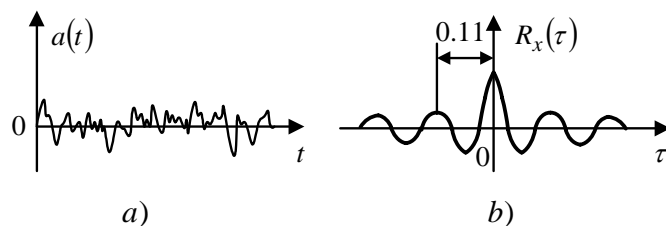


图 5.31 加速度时间历程及其自相关函数

3. 互相关函数

若有两个随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，它们之间的互相关函数定义为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (5.54)$$

其估计值为

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (5.55)$$

此互相关函数描述了两信号之间一般的依赖关系。互相关函数既非偶函数，也非奇函数，是可正可负的实函数。书写时应注意脚符号的顺序， $R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau)$ 。它在 $\tau=0$ 处不一定具有最大值，但可能在 $\tau=\tau_0$ 达到最大值。如图 5.32 它表示两信号在 τ_0 处相关程度最高。

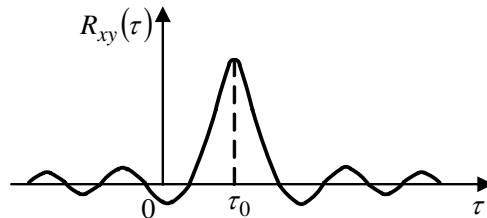


图 5.32 互相关函数图

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个完全独立无关的信号(即所谓统计独立)，且其均值 μ_x 、 μ_y 中至少有一个为零，则对所有时移量 τ ，互相关函数 $R_{xy}(\tau)=0$ 都成立。

如果两随机信号中具有频率相同的周期成分，则其互相关函数即使 $\tau \rightarrow \infty$ 也会出现该频率的周期成分。互相关函数中还包含有相位信息。

如果两个周期信号的频率不相同，则其互相关函数

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

即两个频率不同的周期信号是不相关的。

在 MATLAB 中，利用 `xcorr` 工具箱函数可以估计出随机过程的自相关函数序列和两个随机过程的互相关函数序列。例如在 MATLAB 中输入

```
x=1:3;
y=4:6;
c1=xcorr(x)
```

可得 x 的自相关函数序列：

```
c1=3.000    8.000    14.000    8.000    3.000
```

输入

```
c2=xcorr(x,y)
```

可得 x 、 y 的互相关函数序列：

```
c2=12.000    23.000    32.000    17.000    6.000
```

互相关函数在工程中的应用主要有以下几方面：

1) 滞后时间的测量

(1) 测量运动速度：互相关函数可用来测定汽车、炮弹、轧制钢带的速度，以及导管内和风洞内气流的速度等。例如要测定炮弹的速度、可在相距 l 米的两处设置两个光电式传感器如图 5.33，炮弹通过时拾取反射光的信号做出互相关函数图，根据峰值出现的时间 τ_0 如图 5.33，即可求得速度

$$v = \frac{l}{\tau_0}$$

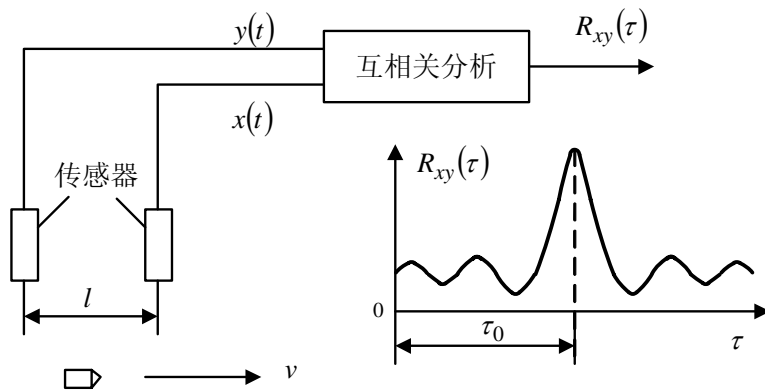


图 5.33 运动速度的测量

(2) 确定深埋在地下的输油管裂损的位置：如图 5.34 所示，漏损处 K 视为传播声源，两侧管道分别放置传感器，因为放传感器的两点距漏损处的距离不相等，放漏油的音响传至两传感器就有时差。在互相关图上 $\tau = \tau_0$ 处 $R_{xy}(\tau)$ 有最大值，这个 τ_0 就是时差。根据 τ_0 便可确定漏损处的位置。

$$S = \frac{1}{2} v \tau_0$$

式中： S —两传感器的中点至漏油处的距离；
 v —音响通过管道的传播速度。

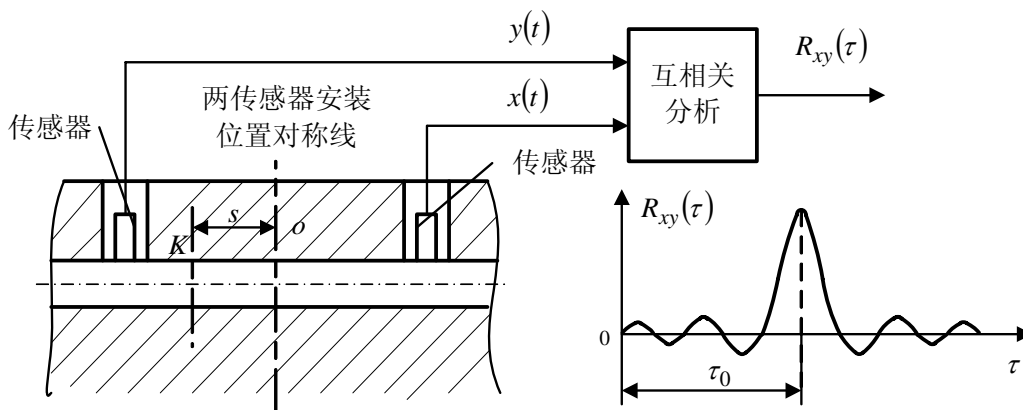


图 5.34 输油管裂损位置的检测

3) 传递通道的确定

利用互相关函数分析法可以检查引起汽车司机座振动的振源。测试时在发动机、司机座和后轮轴上布置加速度计。根据获得的相关图，发现发动机与司机座之间的相关性较差，而司机座与后轮之间的互相关函数出现明显的相关。因此，可以认为，司机座的振动主要是由于后轮的振动引起的。

4) 检测混淆在噪声中的信号

由转子动不平衡引起的振动，是和转子同频率的周期信号，设其为 $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ 。但用传感器测量该信号时，拾取的信号不可能是单纯的 $x(t)$ ，而是混有各种随机干扰噪声，例如噪声 $n(t) = \sum_{n=1}^n A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 。为了提取出感兴趣的信号 $x(t)$ ，可以利用自相关处理的办法，但自相关函数中只能反映信号 $x(t)$ 的幅值(对应于动不平衡量

的大小), 而失去了相位信息(对应于动不平衡的方位)。如果我们设法建立一个无噪声参考信号 $y(t) = y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_y)$, 并用它去和拾取到的信号 $[x(t) + n(t)]$ 作互相关处理, 则由于 $n(t)$ 与 $y(t)$ 的频率无关, 因而两者的互相关函数恒为零, 只有 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 存在。 $R_{xy}(\tau)$ 的幅值反应了动不平衡量的大小, 峰值的偏移量 τ_0 反映了相位差 $(\varphi_y - \varphi_x)$, 若参考信号 $y(t)$ 的 φ_y 已知, 就测出了不平衡的方位。

5.5.4 功率谱分析

1. 功率谱密度函数

若自相关函数 $R_x(\tau)$ 的傅里叶变换存在, 则定义 $R_x(\tau)$ 的傅里叶变换

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5.56)$$

定义为 $x(t)$ 的自功率谱密度函数, 简称功率谱密度函数、功率谱或自谱。根据傅里叶逆变换, 有

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (5.57)$$

当 $\tau = 0$ 时, 式 5.57 变为

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

因为 $R_x(0) = \psi_x^2$, 所以

$$\psi_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df \quad (5.58)$$

由此可知, $S_x(f)$ 曲线和频率轴所包围的面积就是信号的平均功率。而 $S_x(f)$ 就表示了信号的功率按频率分布的规律。

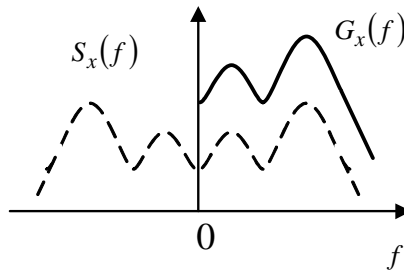


图 5.35 单边和双边功率谱

把各态历经随机过程的样本记录 $x(t)$ 送入中心频率为 f 、带宽为 B 的带通滤波器, 其输出记为 $[x(t)]_B$, 则功率谱密度的估计值

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{BT} \int_0^T [x(t)]_B^2 dt \quad (5.59)$$

即对带通滤波器的输出 $[x(t)]_B$ 进行平方、平均等运算后, 便可得到对应于 f 的功率谱密度。若改变带通滤波器的中心频率, 则可得到功率谱密度与频率的关系图。

通常把在 $(-\infty, \infty)$ 频率范围内定义的功率谱 $S_x(f)$ 称为双边功率谱, 而把只在 $(0, \infty)$ 频率范围内定义的功率谱 $G_x(f)$ (如图 5.35) 称为单边功率谱, 二者之间的关系为

$$G_x(f) = \begin{cases} 2S_x(f) & 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (5.60)$$

另外一种常用的表示方法是取功率谱的对数

$$G_x(\lg) = 10 \lg G_x(f) \quad (5.61)$$

单位是分贝 (dB), 称为对数功率谱。

因为 $R_x(\tau)$ 是实偶函数, 根据傅里叶变换的性质可知, $S_x(f)$ 亦为实偶函数。

在 MATLAB 中用工具箱函数 psd 可以估计信号的功率谱密度。

功率谱的应用范围很广, 大致可归纳为以下几方面:

(1) 分析振动信号的频率成分和结构。例如内燃机车谐振频率的测定; 桥梁和各种结构自振频率和振型的测定等。

(2) 故障的判断和分析。例如, 对于一些重要设备, 如火箭、飞机和汽轮机以及发动机、齿轮箱等, 均可根据功率谱的变化 (有否额外谱峰) 来判断故障发生的原因, 以便迅速排除故障。

(3) 功率谱能反映出载荷在各频率成分上的振动能量与振幅, 因而为确定载荷谱提供了条件。这对于研究零部件的强度和疲劳寿命是非常重要的。

(4) 在医学上, 可根据检测的脑电波, 心电波进行功率谱分析来研究病症及病理。

(5) 通过功率谱分析还可判别周期信号和随机信号。

(6) 对于线性系统, 当其输入为 $x(t)$, 输出为 $y(t)$, 系统的频率响应为 $H(f)$ 时, 其输入、输出的功率谱与系统的频率响应有如下关系

$$S_x(f) = |H(f)| S_y(f) \quad (5.62)$$

可见, 通过输入、输出功率谱的分析, 就能得出系统的幅频特性。但是在功率谱分析中会丢失相位信息, 因而不能得出系统的相频特性。

此外, 功率谱分析在军事上的应用也很广泛。

2. 互谱密度函数

如果互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 满足傅里叶变换的条件, 则定义 $R_{xy}(\tau)$ 的傅里叶变换

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5.63)$$

为信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的互谱密度函数, 简称互谱。

互谱和互相关函数构成一对傅里叶变换对, 所以二者包含有相同的信息, 都可用来描述信号之间的相关性, 不同点是互相关函数在时差域上, 而互谱密度函数是在频率域上。

像功率密度函数一样, 把在 $(-\infty, \infty)$ 频率范围内定义的互谱密度函数 $S_{xy}(f)$, 称为双边互谱, 而在 $(0, \infty)$ 频率范围内定义的互谱, 称为单边互谱, 并记为 $G_{xy}(f)$, 两者关系为

$$G_{xy}(f) = \begin{cases} 2S_{xy}(f) & 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{其余} \end{cases} \quad (5.64)$$

互谱密度函数在信号处理中很重要。利用互谱密度函数可以测定滞后时间; 通过互谱和自谱之间的关系

$$S_{xy}(f) = H(f) S_x(f) \quad (5.65)$$

可以测量求得线性系统的频率响应函数。由此可得到的 $H(f)$ 不仅含有幅频特性, 而且含有相频特性, 这是因为互谱中包含有相位差信息。

在 MATLAB 中用工具箱函数 `csd` 可以估计两信号的互谱密度。下面的程序是在 MATLAB 中产生两个有色噪声，在具有 95% 置信区间的互谱密度：

```
h=fir1(30,2,boxcar(31));  
h1=ones(1,10)/sqrt(10);  
r=randn(16384,1);  
x=filter(h1,1,r);  
y=filter(h,1,x);  
csd(x,y,1024,10000,triang(500),0,[ ])
```

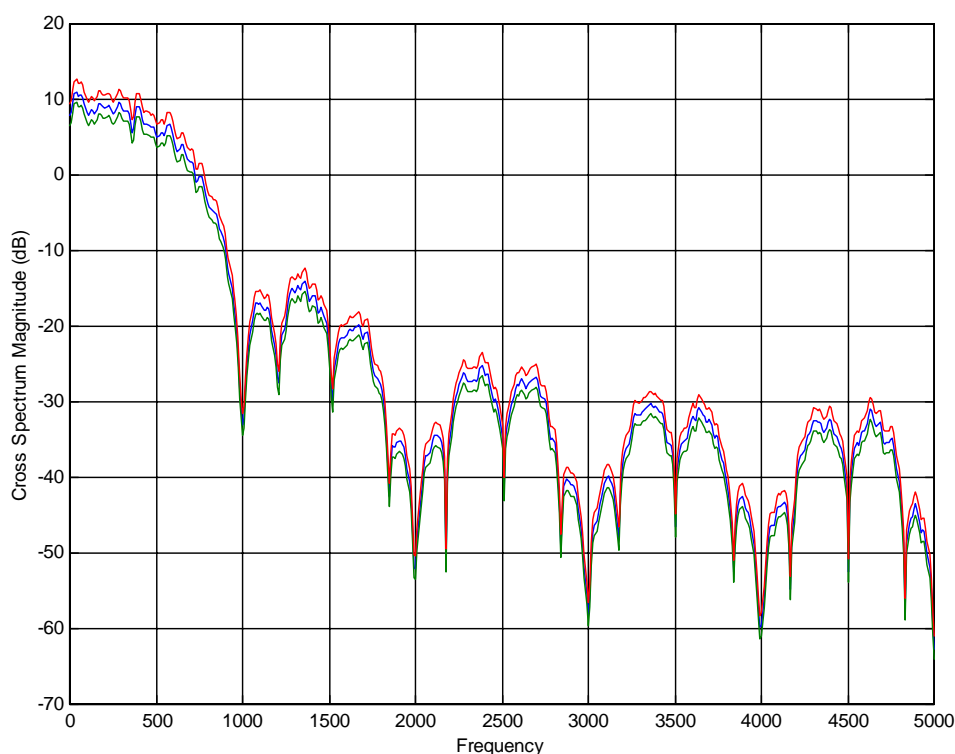


图 5.36 两个有色噪声在具有 95% 置信区间的互谱密度

5.6 虚拟测试系统及其中的信号处理模块

5.6.1 虚拟仪器概述

虚拟仪器 (virtual instrumentation) 是基于计算机的仪器。计算机和仪器的密切结合是仪器发展的一个重要方向。这种结合有两种方式，一种是将计算机装入仪器，其典型的例子就是所谓智能化的仪器。随着计算机功能的日益强大以及其体积的日趋缩小，这类仪器功能也越来越强大，目前已经广泛出现含嵌入式系统的仪器。另一种方式是将仪器装入计算机。以通用的计算机硬件及操作系统为依托，实现各种仪器功能。虚拟仪器主要是指这种方式。图 5.37 反映了常见的虚拟仪器方案。

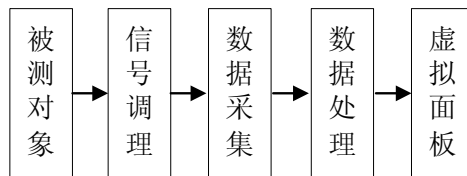


图 5.37 虚拟仪器组成框图

虚拟仪器的主要特点有：

- (1) 尽可能采用了通用的硬件，各种仪器的差异主要是软件。
- (2) 可充分发挥计算机的能力，有强大的数据处理功能，可以创造出功能更强的仪器。
- (3) 用户可以根据自己的需要定义和制造各种仪器。

虚拟仪器实际上是一个按照仪器需求组织的数据采集系统。虚拟仪器的研究中涉及的基础理论主要有计算机数据采集和数字信号处理。目前在虚拟仪器领域内，使用较为广泛的开发平台是美国 NI 公司的 LabVIEW。

普通的 PC 有一些不可避免的弱点。用它构建的虚拟仪器或计算机测试系统性能不可能太高。作为计算机化仪器的一个重要发展方向是制定了 VXI 总线标准，这是一种插卡式的仪器。每一种仪器是一个插卡，为了保证仪器的性能，又采用了较多的硬件，但这些卡式仪器本身都没有面板，其面板仍然用虚拟的方式在计算机屏幕上出现。这些卡插入标准的 VXI 机箱，再与计算机相连，就组成了一个测试系统。由于 VXI 仪器价格昂贵，业界又推出了一种较为便宜的 PXI 标准仪器。

虚拟仪器研究的另一个问题是各种标准仪器的互连及与计算机的连接。目前使用较多的是 IEEE 488 或 GPIB 协议。未来的仪器也应当是网络化的。

5.6.2 LabVIEW 简介

LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering) 是一种图形化的编程语言，它广泛地被工业界、学术界和研究实验室所接受，视为一个标准的数据采集和仪器控制软件。LabVIEW 集成了与满足 GPIB、VXI、RS-232 和 RS-485 协议的硬件及数据采集卡通讯的全部功能。它还内置了便于应用 TCP/IP、ActiveX 等软件标准的库函数。这是一个功能强大且灵活的软件。利用它可以方便地建立自己的虚拟仪器，其图形化的界面使得编程及使用过程都生动有趣。

图形化的程序语言，又称为“G”语言。使用这种语言编程时，基本上不写程序代码，取而代之的是流程图或程序图。它尽可能利用了技术人员、科学家、工程师所熟悉的术语、图标和概念，因此，LabVIEW 是一个面向最终用户的工具。它可以增强你构建自己的科学和工程系统的能力，提供了实现仪器编程和数据采集系统的便捷途径。使用它进行原理研究、设计、测试并实现仪器系统时，可以大大提高工作效率。

利用 LabVIEW，可产生独立运行的可执行文件，它是一个真正的 32 位编译器。像许多重要的软件一样，LabVIEW 提供了 Windows、UNIX、Linux、Macintosh 的多种版本。

5.6.3 LabVIEW 应用程序的构成

所有的 LabVIEW 应用程序，即虚拟仪器 (VI)，它包括前面板 (front panel)、流程图 (block diagram) 以及图标/连接器(icon/connector)三部分。

1. 前面板

前面板是图形用户界面，也就是 VI 的虚拟仪器面板，这一界面上有用户输入和显示

输出两类对象，具体表现有开关、旋钮、图形以及其他控制(control)和显示对象(indicator)。图 5.38 所示是一个随机信号发生和显示的简单 VI 是它的前面板，上面有一个显示对象，以曲线的方式显示了所产生的一系列随机数。还有一个控制对象——开关，可以启动和停止工作。显然，并非简单地画两个控件就可以运行，在前面板后还有一个与之配套的流程

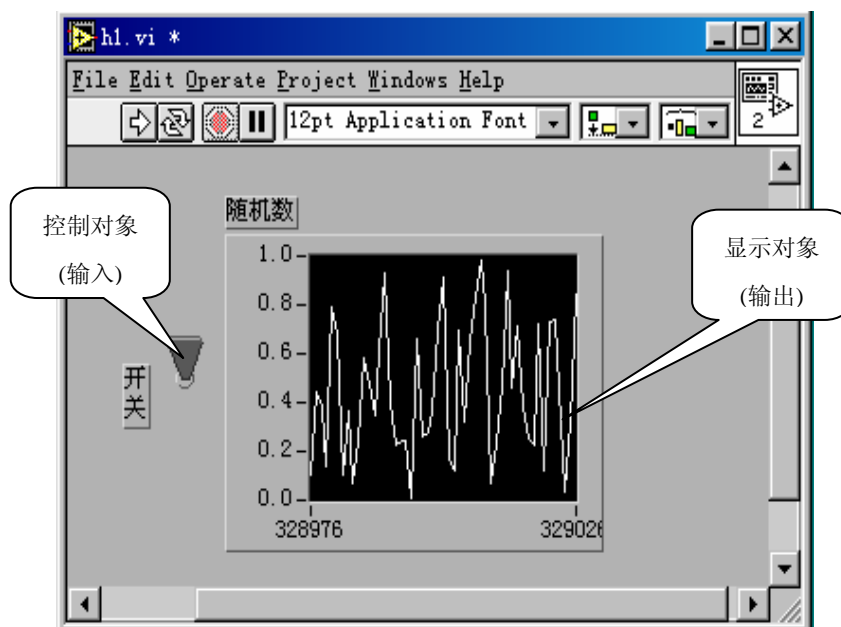


图 5.38 随机信号发生器的前面板

2. 流程图

流程图提供 VI 的图形化源程序。在流程图中对 VI 编程，以控制和操纵定义在前面板

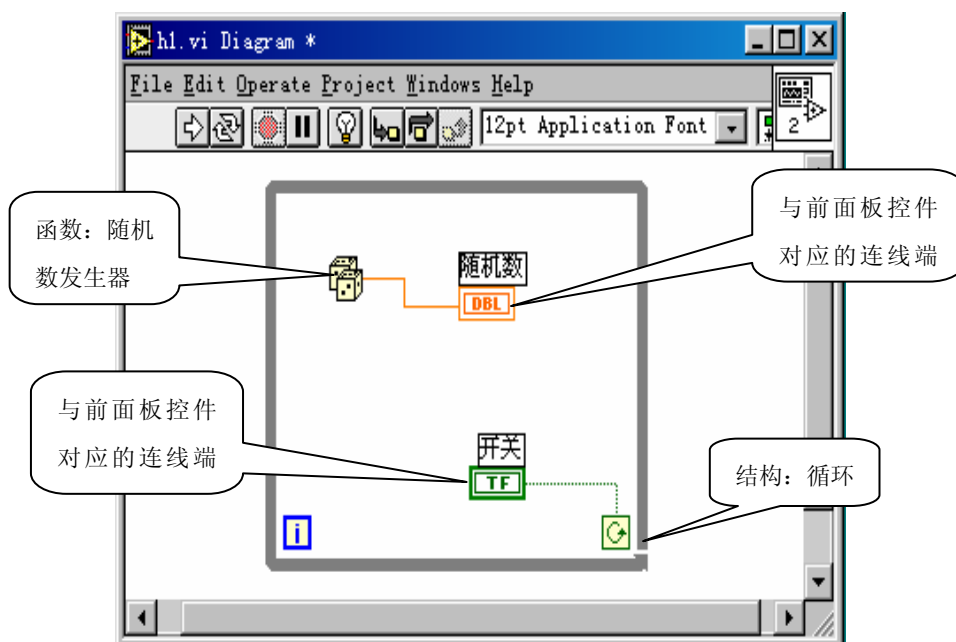


图 5.39 随机信号发生器的流程图

上的输入和输出功能。流程图中包括前面板上的控件的连线端子，还有一些前面板上没有，

但编程必须有的东西，例如函数、结构和连线等。图 5.39 是与图 5.38 对应的流程图。可以看到流程图中包括了前面板上的开关和随机数显示器的连线端子，还有一个随机数发生器的函数及程序的循环结构。随机数发生器通过连线将产生的随机信号送到显示控件，为了使它持续工作下去，设置了一个 While Loop 循环，由开关控制这一循环的结束。

如果将 VI 与标准仪器相比较，那么前面板上的东西就是仪器面板上的东西，而流程图上的东西相当于仪器箱内的部分东西。在许多情况下，使用 VI 可以仿真标准仪器，不仅在屏幕上出现一个惟妙惟肖的标准仪器面板，而且其功能也与标准仪器相差无几。

3. 图标/连接器

VI 具有层次化和结构化的特征。一个 VI 可以作为子程序，这里称为子 VI (subVI)，被其他 VI 调用。图标与连接器在这里相当于图形化的参数。

5.6.4 LabVIEW 中的信号分析与处理工具箱

1. 概述

LabVIEW 的流程图编程方法和分析 VI 库的扩展工具箱，使得分析软件的开发变得更加简单。LabVIEW 分析 VI 通过一些可以互相连接的 VI，提供了最先进的数据分析技术。使用者不必像在普通编程语言中那样关心步骤的具体细节，而可以集中注意力解决信号处理与分析方面的问题。LabVIEW 7i 版本中，有两个子模板涉及信号处理和数学分析，分别是 **Analyze** 子模板和 **Mathematics** 子模板。这里主要涉及前者。

进入 **Functions** 模板 **Analyze》Signal Processing** (《表示根据菜单项逐级操作) 子模板。

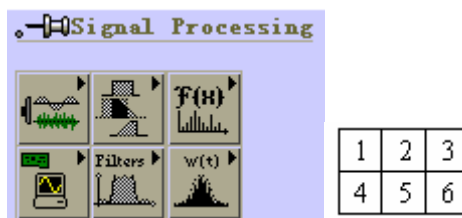


图 5.40 信号分析子模板

其中共有 6 个分析 VI 库。如图 5.40 所示，其中包括：

- (1). **Signal Generation** (信号发生)：用于产生数字特性曲线和波形。
- (2). **Time Domain** (时域分析)：用于进行时域分析等。
- (3). **Frequency Domain** (频域分析)：用于进行频域转换、频域分析等。
- (4). **Measurement** (测量函数)：用于执行各种测量功能，例如单边 FFT、频谱、比例加窗以及泄漏频谱、能量的估算。
- (5). **Digital Filters** (数字滤波器)：用于执行 IIR、FIR 和非线性滤波功能。
- (6). **Windowing** (窗函数)：用于对数据加窗。

下面将介绍如何使用分析库中的 VI 创建函数发生器和简单实用的频谱分析仪，如何使用数字滤波器，窗函数的作用以及不同类型窗函数的优点，以及其他一些内容。在 labview\examples\analysis 目录中找到一些演示程序。

2. 信号的产生

本节将介绍怎样产生标准频率的信号，以及怎样创建模拟函数发生器。参考例子见

examples\analysis\sigxmpl.llb。

还将介绍怎样使用分析库中的信号发生 VI 产生各种类型的信号。信号产生的应用主要有：

(1) 无法获得实际信号时，(例如没有 DAQ 板卡来获得实际信号或者受限制无法访问实际信号)，信号发生功能可以产生模拟信号测试程序。

(2) 产生用于 D/A 转换的信号

在 LabVIEW 7i 中提供了波形函数，为制作函数发生器提供了方便。以 Waveform>>Waveform Generation 中的基本函数发生器 (Basic Function Generator.vi) 为例，其图标如图 5.41 所示：

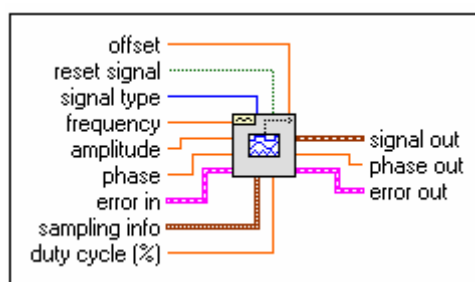


图 5.41 基本函数发生器

其功能是建立一个输出波形，该波形类型有：正弦波、三角波、锯齿波和方波。这个 VI 会记住产生的前一波形的时间标志，并且由此点开始使时间标志连续增长。它的输入参数有波形类型、样本数、起始相位、波形频率（单位：Hz）

使用该 VI 制作的函数发生器如图 5.42，由框图可以看出，其中没有附加任何其他部件。

3. 标准频率

在模拟状态下，信号频率用 Hz 或者每秒周期数为单位。但是在数字系统中，通常使用数字频率，它是模拟频率和采样频率的比值，表达式如下：

$$\text{数字频率} = \text{模拟频率} / \text{采样频率}$$

这种数字频率被称为标准频率，单位是周期数/采样点。

有些信号发生 VI 使用输入频率控制量 f ，它的单位和标准频率的单位相同：周期数/每个采样点，范围从 0 到 1，对应实际频率中的 0 到采样频率 f_S 的全部频率。它还以 1.0 为周期，从而令标准频率中的 1.1 与 0.1 相等。例如某个信号的采样频率是奈奎斯特频率 ($f_S/2$)，就表示每半个周期采样一次 (也就是每个周期采样两次)。与之对应的标准频率是 1/2 周期数/采样点，也就是 0.5 周期数/采样点。标准频率的倒数 $1/f$ 表示一个周期内采样的次数。

如果使用的 VI 需要以标准频率作为输入，就必须把频率单位转换为标准单位：周期数/采样点。

4. 数字信号处理

1) FFT 变换

信号的时域显示 (采样点的幅值) 可以通过离散傅立叶变换 (DFT) 的方法转换为频域显示。为了快速计算 DFT，通常采用一种快速傅立叶变换 (FFT) 的方法。当信号的采样

点数是 2 的幂时，就可以采用这种方法。

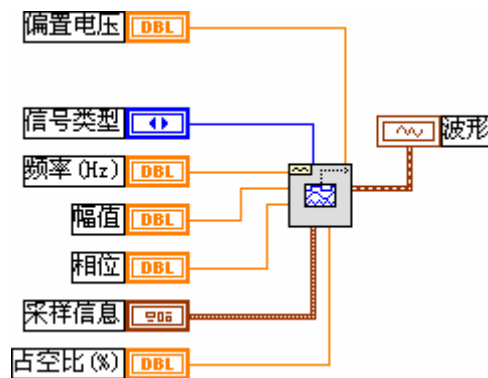
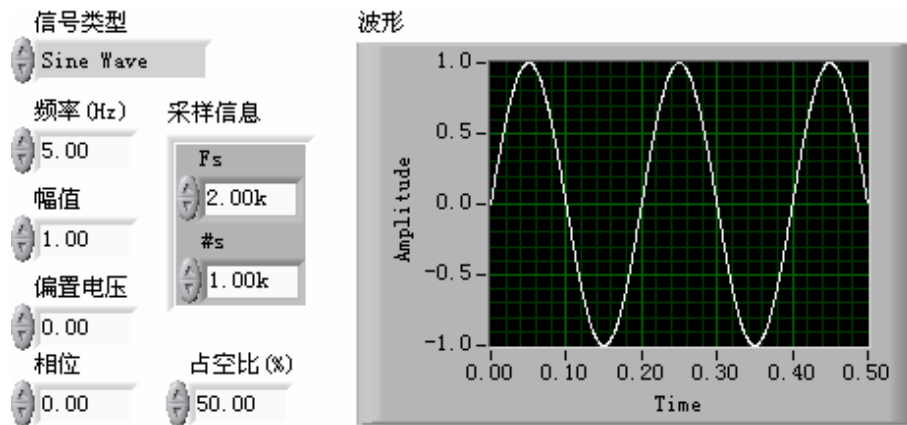


图 5.42 函数发生器

FFT 的输出都是双边的，它同时显示了正负频率的信息。通过只使用一半 FFT 输出采样点转换成单边 FFT。FFT 的采样点之间的频率间隔是 f_s / N ，这里 f_s 是采样频率。

Analyze 库中有两个可以进行 FFT 的 VI，分别是 Real FFT VI 和 Complex FFT VI。

这两个 VI 之间的区别在于，前者用于计算实数信号的 FFT，而后者用于计算复数信号的 FFT。它们的输出都是复数。

大多数实际采集的信号都是实数，因此对于多数应用都使用 Real FFT VI。当然也可以通过设置信号的虚部为 0，使用 Complex FFT VI。使用 Complex FFT VI 的一个实例是信号含有实部和虚部。这种信号通常出现在数据通信中，因为这时需要用复指数调制波形。

计算每个 FFT 显示的频率分量能量的方法是对频率分量的幅值平方。高级分析库中 Power Spectrum VI 可以自动计算能量频谱。Power Spectrum VI 的输出单位是 V_{rms}^2 。但是能量频谱不能提供任何相位信息。

FFT 和能量频谱可以用于测量静止或者动态信号的频率信息。FFT 提供了信号在整个采样期间的平均频率信息。因此，FFT 主要用于固定信号的分析（即信号在采样期间的频率变化不大）或者只需要求取每个频率分量的平均能量。如图 5.43 所示用 FFT 分析正弦波频谱的 VI。

流程图中的 Array Size 函数用来根据样本数转换 FFT 的输出，得到频率分量的正确幅值。

(1) 双边 FFT

检查频谱图可以看到有两个波峰，一个位于 10Hz，另一个位于 90Hz，90Hz 处的波峰

实际上是 10Hz 处的波峰的负值。因为图形同时显示了正负频率，所以被称为双边 FFT。

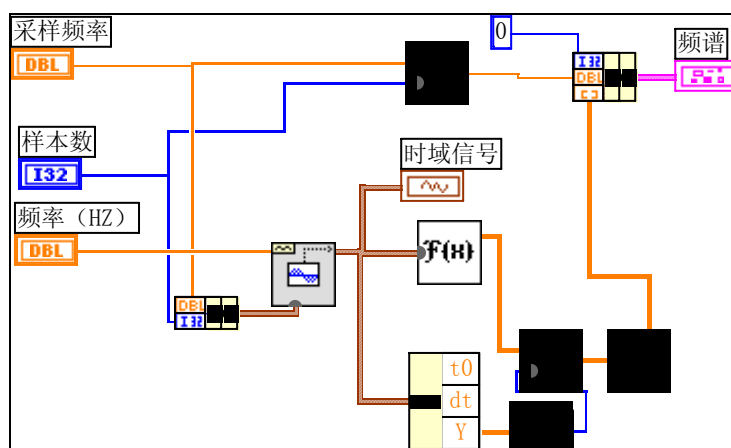
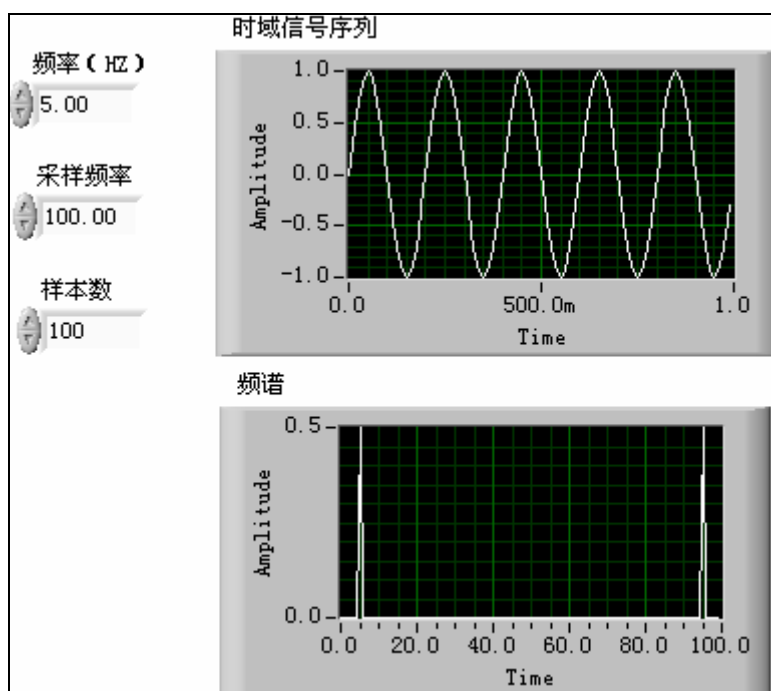


图 5.43 用 FFT 分析正弦波频谱

(2) 单边 FFT

因为 FFT 含有正负频率的信息，所以具有重复信息。按照图 5.44 修改流程图。经过修改之后，只显示一半的 FFT 采样点（正频率部分）。这样的方法叫做单边 FFT。单边 FFT 只显示正频率部分。

注意要把正频分量的幅值乘以 2 才能得到正确的幅值。但是，直流分量保持不变。（若程序中考虑含直流分量的情况，应当增加一个分支或 case 结构。

2. 窗函数

计算机只能处理有限长度的信号，原信号 $x(t)$ 要以 T (采样时间或采样长度) 截断，即有限化。有限化带来的泄露问题，在频域造成很宽的附加频率成分，这些附加频率成分在原信号 $x(t)$ 中其实是不存在的。

在实际应用中如何选择窗函数一般说来是要仔细分析信号的特征以及最终你希望达到的目的，并经反复调试。

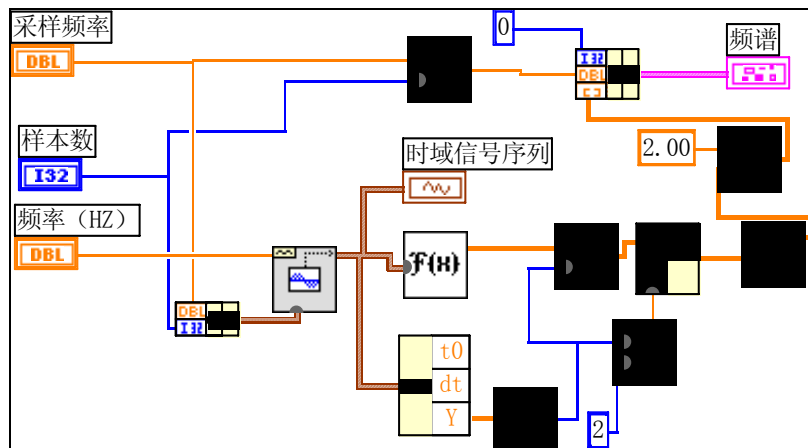
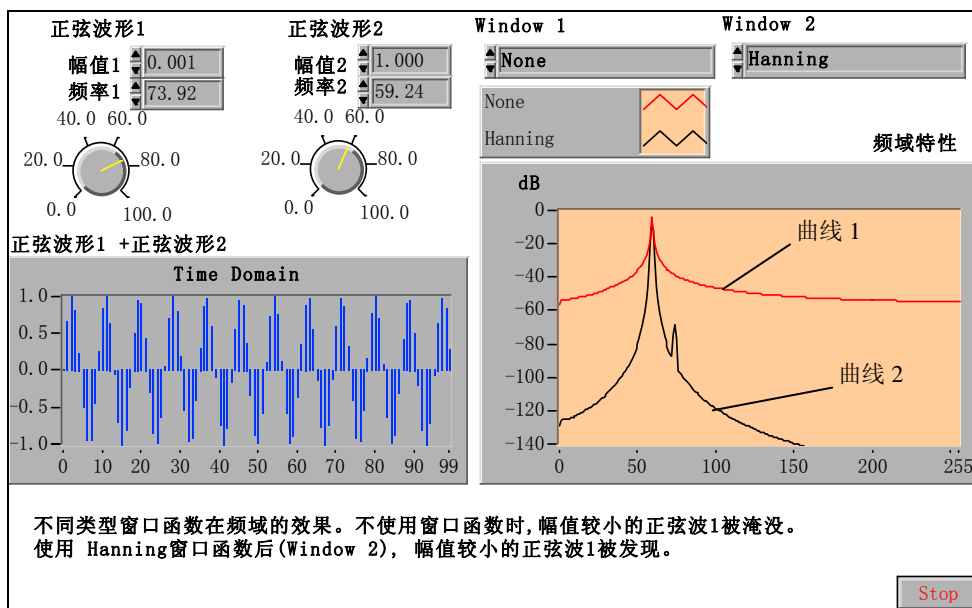


图 5.44 双边 FFT 流程图

图 5.45 所示是“从频率接近的信号中分离出幅值不同信号”的 VI 的显示结果，正弦波 1 与正弦波 2 频率较接近，但幅值相差 1000 倍，相加后产生的信号变换到频域，如果在 FFT 之前不加窗，则频域特性中幅值较小的信号被淹没，见曲线 1。加 Hanning 窗后两个频率成分都被检出见曲线 2。



5.45 频率接近的信号中分离出幅值不同的信号

3. 谐波失真与频谱分析

当一个含有单一频率(比如 f_1)的信号 $x(t)$ 通过一个非线性系统时，系统的输出不仅包含输入信号的频率 f_1 ，而且包含谐波分量 ($f_2 = 2f_1, f_3 = 3f_1, f_4 = 4f_1$ 等等)，谐波的数量以及它们对应的幅值大小取决于系统的非线性程度。电网中的谐波是一个值得关注的问题。

LabVIEW 7i 提供的谐波分析模块与以前的版本有一些变化，如图 5.46。该 VI 对输入信号进行完整的谐波分析，包括测定基波和谐波，返回基波频率和所有的谐波幅度电平，以及总的谐波失真度 (THD)。

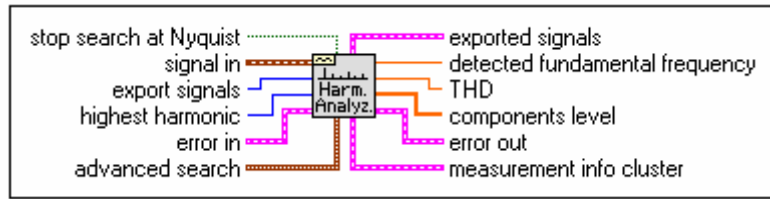


图 5.46 谐波分析模块

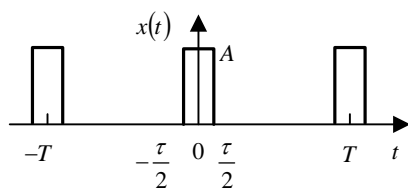
练习与思考

5.1 从示波器光屏中测得正弦波图形的“起点”坐标为(0, -1), 振幅为 2, 周期为 4π , 求该正弦波的表达式。

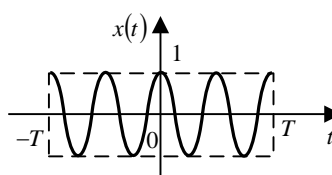
5.2 某复合信号由频率分别为 724Hz、600Hz、500Hz、44Hz 的同相正弦波迭加而成, 试求该复杂信号的周期。若要对该复杂信号进行不失真采样, 最小采样频率应为多少?

5.3 求信号 $x(t) = e^{\cos^2 10\pi t} (-\alpha < t < \alpha)$ 的周期, 并绘出时域图形。

5.4 已知矩形单位脉冲信号 $x_0(t)$ 的频谱为 $X_0(\omega) = A\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 试求如题图 5.1 所示的脉冲信号的频谱。



题图 5.1



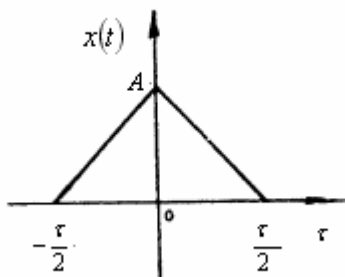
题图 5.2

5.5 求被截断的余弦函数(题图 5.2)的傅里叶变换。

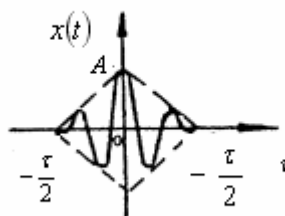
$$x(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & |t| \leq t_0 \\ 0 & |t| > t_0 \end{cases}$$

5.6 求如题图 5.3 所示三角脉冲的傅里叶变换。

5.7 余弦信号 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 被三角脉冲做幅度调制(题图 5.4), 求调幅信号 $x_A(t)$ 的频谱。



题图 5.3



题图 5.4

5.8 试绘出题 5.5 中调制信号与调幅波的频谱。

5.9 已知一信号的自相关函数 $R_x(\tau) = \frac{64\sqrt{2}}{\tau} \sin(50\sqrt{2}\tau)$, 求该信号的均方值 ψ_x 及均方根值。

5.10 求余弦信号 $x(t) = X \cos \omega t$ 的均方根值。

5.11 用 1/10 倍频程带宽的功率谱密度分析仪, 在中心频率 50 Hz、100Hz、1000Hz 处进行功率谱密度测定, 设平均时间为 1s, 若带通滤波器为理想滤波器。求功率谱密度测量的标准化误差 σ / μ_G 。

5.12 求正弦信号 $x(t) = X \sin \omega t$ 的均值、均方值。

5.13 离散傅里叶变换产生误差的原因有哪些? 应如何设法减少这些误差?

5.14 对3个正弦信号 $x_1(t) = \cos 2\pi t$, $x_2(t) = \cos \pi t$, $x_3(t) = \cos 10\pi t$ 进行采样, 已知采样频率 $f_s = 4\text{Hz}$, 求3个采样输出序列并比较这3个结果。若对由这三个信号叠加后的信号进行不失真采用, 试求最大采用周期?

5.15 按图 5.42 建立 VI, 把该 VI 保存为 LabVIEW\Activity 目录中的 FFT_2sided.vi。选择频率 (Hz) =10, 采样率= 100, 样本数= 100。把频率分别设置为 48Hz 和 52Hz, 执行该 VI。观察这两种情况下图形是否相同, 并解释原因。